



d'analyser l'influence de l'angle d'inclinaison du cône sur les transferts qui se déroulent dans la couche limite.

Dans ce travail, les équations de conservation sont discrétisées à l'aide d'un schéma implicite aux différences finies. Les champs de vitesses et de températures sont déterminés à partir de l'algorithme de Thomas.

## 2. Formulation mathématique

Le modèle physique considéré est constitué d'un cône de révolution de longueur  $L$  et incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à la verticale. La paroi du cône est maintenue à une température constante  $T_p$ , différente de la température  $T_\infty$  du fluide loin de la paroi qui est également constante.

### 2.1. Hypothèses simplificatrices

Outre les hypothèses classiques de la couche limite et celles de Boussinesq, nous posons les hypothèses suivantes :

- le cône est immobile,
- les transferts sont laminaires et permanents,
- les transferts radiatifs et la dissipation d'énergie visqueuse sont négligeables,
- le fluide est de l'air dont les propriétés physiques sont constantes à l'exception de sa masse volumique dont la variation est à l'origine de la convection naturelle.

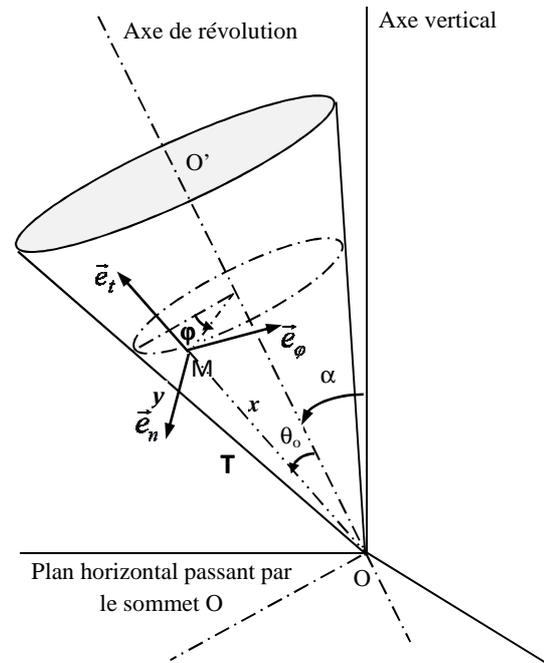


Figure 1 : Schéma du modèle physique

### 2.2. Equations de conservation dans la couche limite

En utilisant les variables adimensionnelles suivantes :

$$x_+ = \frac{x}{L}, y_+ = \frac{y}{L} Gr^{\frac{1}{4}}, \varphi_+ = \varphi, V_x^+ = \frac{V_x}{\sqrt{Lg\beta\Delta T}}, V_y^+ = \frac{V_y Gr^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{Lg\beta\Delta T}}, V_\varphi^+ = \frac{V_\varphi}{\sqrt{Lg\beta\Delta T}}, r^+ = \frac{r}{L},$$

$$T^+ = \frac{T - T_\infty}{T_p - T_\infty}$$

avec  $Gr = \frac{g\beta(T_p - T_\infty)L^3}{\nu^2}$ , le nombre de Grashof.

Les équations adimensionnelles dans la couche limite s'écrivent dans le repère local  $(M, e_x, e_y, e_\varphi)$  :

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial V_x^+}{\partial x_+} + \frac{\partial V_y^+}{\partial y_+} + \frac{1}{r^+} \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial \varphi_+} + \frac{V_x^+}{r^+} \frac{dr^+}{dx_+} = 0 \quad (1)$$

- Equation de la quantité de mouvement

$$V_x^+ \frac{\partial V_x^+}{\partial x_+} + V_y^+ \frac{\partial V_y^+}{\partial y_+} + \frac{V_\varphi^+}{r^+} \frac{\partial V_x^+}{\partial \varphi_+} - \frac{V_\varphi^{+2}}{r_+} \frac{dr^+}{dx_+} = S_x T^+ + \frac{\partial^2 V_x^+}{\partial y_+^2} \quad (2)$$

$$V_x^+ \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial x_+} + V_y^+ \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial y_+} + \frac{V_\varphi^+}{r^+} \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial \varphi_+} + \frac{V_x^+ V_\varphi^+}{r^+} \frac{dr^+}{dx_+} = S_\varphi T^+ + \frac{\partial^2 V_\varphi^+}{\partial y_+^2} \quad (3)$$

Où les coefficients  $S_x$  et  $S_\varphi$  désignent les facteurs de configuration géométrique définis par :

$$S_x = \sin \alpha \cdot \cos \varphi \cdot \sin \theta_0 + \cos \alpha \cdot \cos \theta_0 \quad (4)$$

$$S_\varphi = -\sin \alpha \cdot \sin \varphi \quad (5)$$

• Equation de la chaleur

$$V_x^+ \frac{\partial T^+}{\partial x_+} + V_y^+ \frac{\partial T^+}{\partial y_+} + \frac{V_\varphi^+}{r^+} \frac{\partial T^+}{\partial \varphi_+} = \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T^+}{\partial y_+^2} \quad (6)$$

avec  $Pr = \frac{\mu C_p}{\lambda} = \frac{v}{a}$  , le nombre de Prandtl

A ces équations, nous associons les conditions aux limites adimensionnelles suivantes :

- A la paroi  $y^+ = 0$  :

$$T^+ = 1, \quad V_x^+ = V_y^+ = V_\varphi^+ = 0 \quad (7)$$

- Loin de la paroi  $y^+ \rightarrow \infty$

$$T^+ = 0, \quad V_x^+ = V_y^+ = V_\varphi^+ = 0 \quad (8)$$

### 2.3. Nombre de Nusselt et coefficients de frottement

- Nombre de Nusselt

$$NuGr^{\frac{1}{4}} = - \left( \frac{\partial T^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0} \quad (9)$$

- Coefficients de frottement à la paroi

$$\frac{1}{2} Cf_u Gr^{\frac{1}{4}} = \left( \frac{\partial V_x^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0} \quad (10)$$

$$\frac{1}{2} Cf_w Gr^{\frac{1}{4}} = \left( \frac{\partial V_\varphi^+}{\partial y_+} \right)_{y_+=0} \quad (11)$$

## 3. Méthodologie numérique

Le domaine d'étude est subdivisé en  $N \times M \times L$  parallélépipèdes curvilignes rattachés au corps et définis par les pas adimensionnels  $\Delta x_+$ ,  $\Delta y_+$  et  $\Delta \varphi_+$ , où  $N$  et  $L$  étant les nombres de méridiens et de parallèles.

Pour raison de clarté, nous notons respectivement  $U$ ,  $V$ ,  $W$  et  $T$  les composantes méridienne, normale, azimutale de la vitesse et de la température adimensionnelles.

Les équations de conservation adimensionnelles (1), (2), (3) et (6) sont discrétisés à l'aide d'un schéma implicite des différences finies. Les calculs sont effectués aux nœuds  $(i, j, k)$  avec  $1 \leq i \leq N$ ,  $1 \leq j \leq M$  et  $1 \leq k \leq L$ .

Après arrangement, les équations discrétisées peuvent respectivement se mettre sous la forme suivante :

$$A X_{j+1} + B X_j + C X_{j-1} = D_j \quad 2 \leq j \leq \text{JMAX} - 1 \quad (12)$$

Où X représente les grandeurs U, W et T, JMAX caractérise l'épaisseur de la couche limite.

Les systèmes algébriques (12) associés aux conditions aux limites discrétisés sont résolus par l'algorithme de Thomas. Quant à la composante normale adimensionnelle, elle est calculée à partir de l'équation de continuité.

$$V_{i+1,j}^k = \frac{1}{4} \left[ 3V_{i+1,j+1}^k + V_{i+1,j-1}^k + 2\Delta y_+ \left( \frac{U_{i+1,j}^k - U_{i,j}^k}{\Delta x_+} + \frac{3W_{i+1,j}^{k+1} - 4W_{i+1,j}^k + W_{i+1,j}^{k-1}}{2\Delta\phi_+ r_{i+1}^+} + \frac{U_{i+1,j}^k}{\Delta x_+} \left( 1 - \frac{r_i^+}{r_{i+1}^+} \right) \right) \right] \quad (13)$$

$$1 \leq i \leq N - 1, 1 \leq k \leq L - 1 \text{ et } 2 \leq j \leq \text{JMAX} - 1$$

La convergence au sein de la couche limite est assurée lorsque le critère suivant :

$$\left| \frac{|X^{(p+1)}| - |X^{(p)}|}{\text{Sup}(|X^{(p+1)}|, |X^{(p)}|)} \right| \leq \varepsilon \quad (14)$$

est simultanément vérifié pour T, U et W.

$X^{(p)}$  et  $X^{(p+1)}$  sont respectivement les valeurs de la grandeur X aux itérations p et p+1.

#### 4. Résultats et discussions

Nos résultats ont été obtenus pour un cône de longueur L et de demi-angle d'ouverture  $\theta_0 = 20^\circ$ ,  $\text{Pr}=0,72$ ,  $T_p = 373\text{K}$  et  $T_\infty = 298\text{K}$ .

Nous avons validé le code numérique en comparant les résultats issus de nos calculs avec ceux déduits de la littérature [7]. La figure 2, illustrant l'évolution de la température à l'état stable en fonction de la coordonnée normale  $y_+$  pour  $x_+ = 1,0$ , montre que nos résultats sont en bon accord avec ceux de la littérature, l'écart relatif ne dépassant pas 5%. Les figures 3.a et 3.b illustrent l'évolution de la composante méridienne adimensionnelle de la vitesse en fonction de la coordonnée normale adimensionnelle  $y_+$  pour  $\phi = 0^\circ$  et  $\phi = 180^\circ$  respectivement. Les courbes montrent que l'amplitude maximale de cette composante augmente sur le méridien inférieur défini par  $\phi = 0^\circ$  lorsque  $\alpha$  augmente (figure 3.a), tandis que la situation inverse s'est produite sur le méridien supérieur d'équation  $\phi = 180^\circ$  (figure 3.b). Par ailleurs, on constate que l'inclinaison du cône affecte très peu l'épaisseur de la couche limite. Ces résultats corroborent avec l'évolution de la température adimensionnelle en fonction de la coordonnée normale adimensionnelle représentée par les courbes de la figure 7. Les courbes de la figure 4.a et 4.b représentent l'évolution de la composante normale adimensionnelle en fonction de l'abscisse curviligne adimensionnelle  $x_+$  respectivement pour  $\phi = 0^\circ$  et  $\phi = 180^\circ$ , et pour quelques valeurs de l'angle d'inclinaison  $\alpha$ . Ces courbes montrent qu'elle est à valeurs positives pour de faible inclinaison ( $\alpha < 20^\circ$ ) et décroît le long de la paroi du cône, Par contre, la situation est inversée pour  $\alpha > 20^\circ$ , et l'on peut constater que cette composante est nulle pour  $\alpha = 20^\circ$  (figure 4.a). En effet, il apparaît une aspiration du fluide vers la paroi, caractérisée par les valeurs négatives de la composante normale de la vitesse, lorsque l'angle d'inclinaison est grand. Ce mouvement du fluide est confirmé par les courbes de variations de cette composante en fonction de la coordonnée normale adimensionnelle  $y_+$ , représentées sur la figure 5.b. De plus, il semble évident que le fluide n'adhère pas mieux à la paroi de la surface supérieure. L'influence de l'inclinaison du cône se traduit donc par une importante adhérence du fluide à la paroi de la surface inférieure du cône lorsque celui-ci est fortement incliné.

La figure 6 montre que la composante normale adimensionnelle évolue d'une manière sinusoïdale en fonction de  $\varphi$  et que ses intensités augmentent avec l'angle d'inclinaison. On constate qu'il existe un point privilégié situé au voisinage du méridien d'équation  $\varphi = 90^\circ$  et dont la position dépend de l'abscisse curviligne  $x_+$ , où cette composante ne dépend pas de l'angle d'inclinaison.

L'évolution du coefficient de frottement méridien  $Cf_u$  en fonction de la coordonnée azimutale  $\varphi$  est illustrée par les courbes de la figure 8. On voit qu'il varie suivant un profil sinusoïdal avec  $\varphi$  et que ses valeurs augmentent pour tendre vers des valeurs positives lorsque  $\alpha$  augmente. D'autre part, le coefficient de frottement azimutal  $Cf_w$  évolue également de manière sinusoïdale avec  $\varphi$  et son amplitude croît avec  $\alpha$  (figure 9).

## 5. Conclusion

Nous avons étudié numériquement l'écoulement et les transferts thermiques en convection naturelle autour d'un cône de révolution dont l'axe est incliné par rapport à direction verticale et la paroi est maintenue à une température constante. Et, nous avons rapporté essentiellement l'étude de l'influence de l'inclinaison sur la composante normale de la vitesse. Ainsi, nous avons montré qu'une forte inclinaison du cône génère un mouvement du fluide vers la paroi de la surface inférieure du cône. Par ailleurs, nous avons mis en évidence l'existence d'un point privilégié situé au voisinage du méridien  $\varphi = 90^\circ$  pour lequel la composante normale est indépendante de l'angle d'inclinaison. Toutefois, l'effet de l'inclinaison du cône est relativement très faible sur l'échange thermique au sein de la couche limite et sur l'épaisseur de celle-ci.

## Références

- [1] F. A. Rakotomanga, E. Alidina, Transferts thermiques convectifs tridimensionnels autour d'un cône de révolution, *Congrès Français de Thermique* (mai 2013).
- [2] Bapuji Pullepu, K. Ekambavanan, Ali J. Chamkha, Unsteady laminar natural convection flow past an isothermal vertical cone, *Int. J. Heat Technology*, 25(2), (2007) 17–28.
- [3] M. A. Alim, M. Alam, M. K. Chowdhury, Pressure work effect on natural convection flow from a vertical circular cone with suction and non-uniform surface temperature, *Journal of Mechanical Engineering*, vol. ME36 (2006).
- [4] M. Siabdallah, B. Zeghamati, M. Dagenet, Etude de la convection naturelle thermique et massique dans la couche limite autour d'un tronc de cône à paroi sinusoïdale, *12è Journée Internationale de Thermique* (Maroc 2005).
- [5] Pop, Tsung Yen, Natural convection over a vertical wavy frustum of a cone, *Int. J. Non-linear Mechanics*, Vol.34, (1999) 925–934.
- [6] Pop, I., Takhar, H. S., Compressibility effects in laminar free convection from a vertical cone, *Appl. Sci. Res.*, 48 (1991) 71–78.
- [7] F. N. Lin, Laminar convection from a vertical cone with uniform surface heat flux, *Letters in Heat and Mass Transfer*, 3 (1976) 49–58.
- [8] S. Roy, Free convection from a vertical cone at high Prandtl numbers, *Trans. ASME Journal of Heat Transfer*, 96, (1974) 115–117.

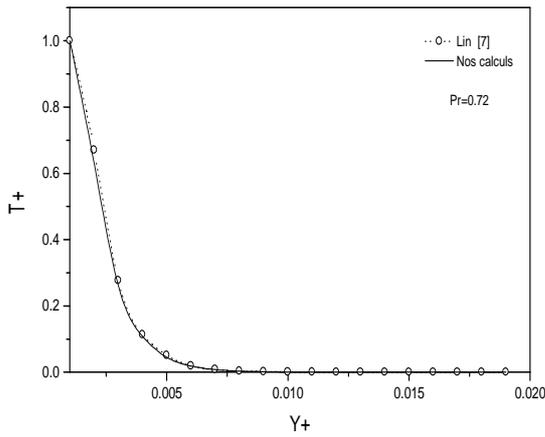


Figure 2: Comparaison de la température à l'état stable en fonction de  $y_+$ ,  $x_+=1.0$  et  $\alpha=0^\circ$

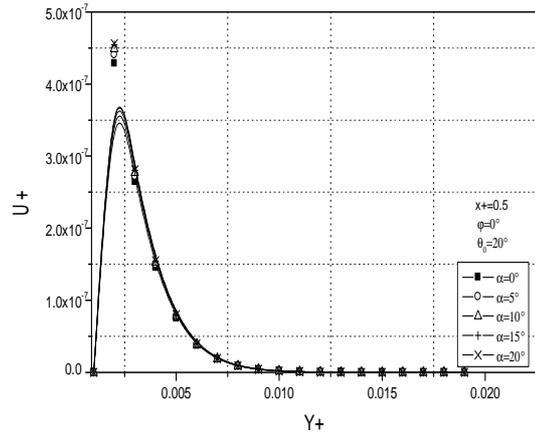


Figure 3.a: Composante méridienne en fonction de  $y_+$ , pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ ,  $\varphi = 0^\circ$  et  $\theta_0 = 20^\circ$

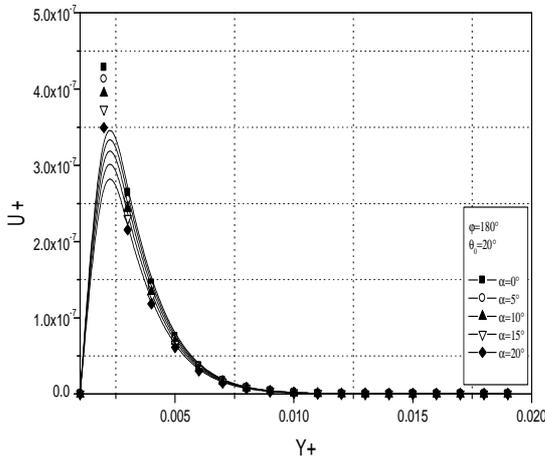


Figure 3.b: Composante méridienne en fonction de  $y_+$ , pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ ,  $\varphi = 180^\circ$  et  $\theta_0 = 20^\circ$

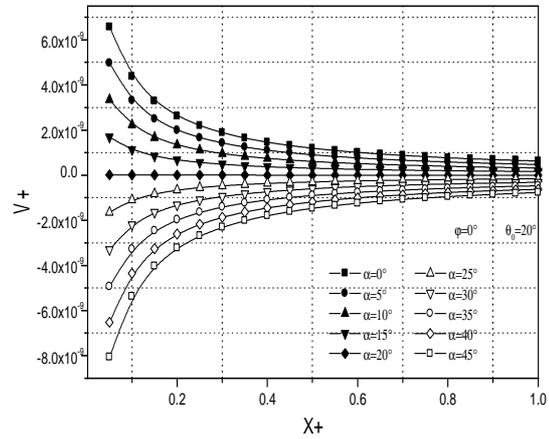


Figure 4.a: Composante normale en fonction de  $x_+$ , pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ ,  $\varphi=0^\circ$  et  $\theta_0=20^\circ$

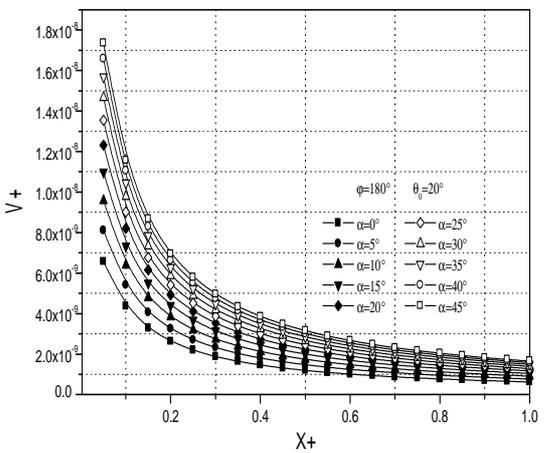


Figure 4.b: Composante normale en fonction de  $x_+$ , pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ ,  $\varphi=180^\circ$  et  $\theta_0=20^\circ$

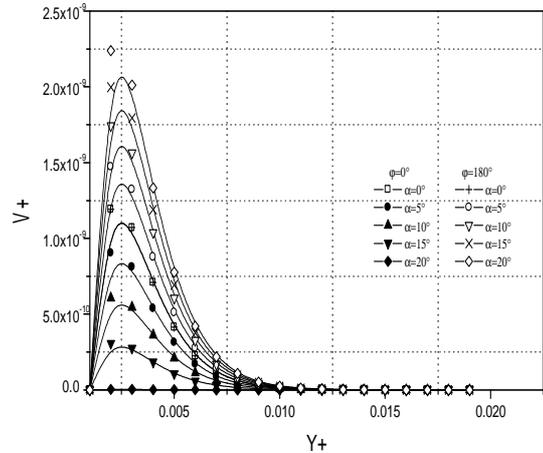


Figure 5.a: Composante normale en fonction de  $y_+$ , pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ ,  $x_+=0.5$  et  $\theta_0=20^\circ$

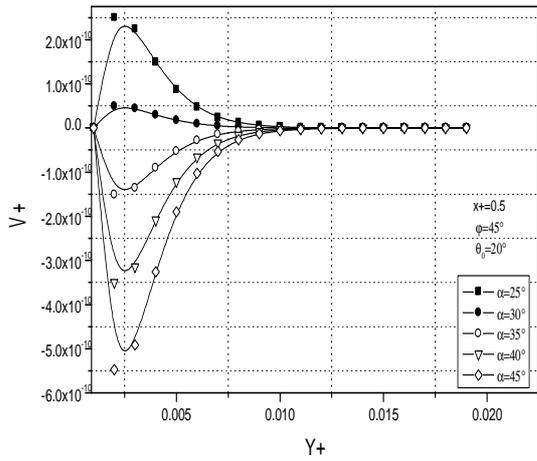


Figure 5.b: Composante normale en fonction de  $y_+$ , pour plusieurs valeurs de  $\alpha > 20^\circ$ ,  $\varphi = 45^\circ$ ,  $x_+ = 0.5$  et  $\theta_0 = 20^\circ$

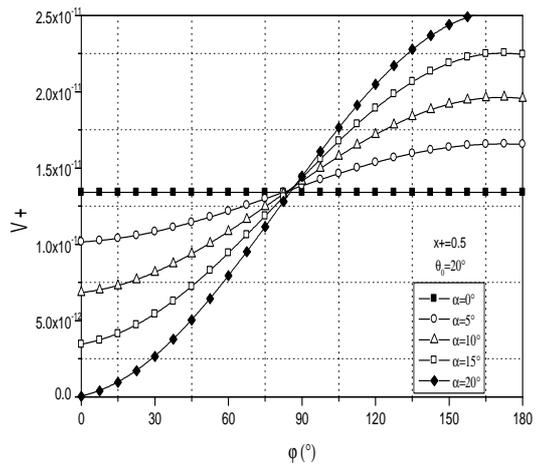


Figure 6: Composante normale en fonction de  $\varphi$ , pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ ,  $x_+ = 0.5$  et  $\theta_0 = 20^\circ$

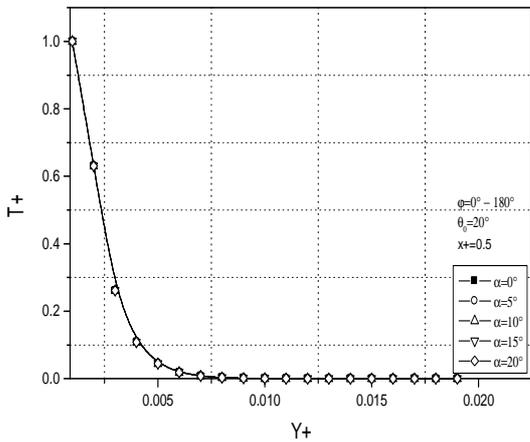


Figure 7: Profil de température en fonction de  $y_+$ , pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ ,  $x_+ = 0.5$ ,  $\varphi = 0^\circ$ ,  $\varphi = 180^\circ$  et  $\theta_0 = 20^\circ$

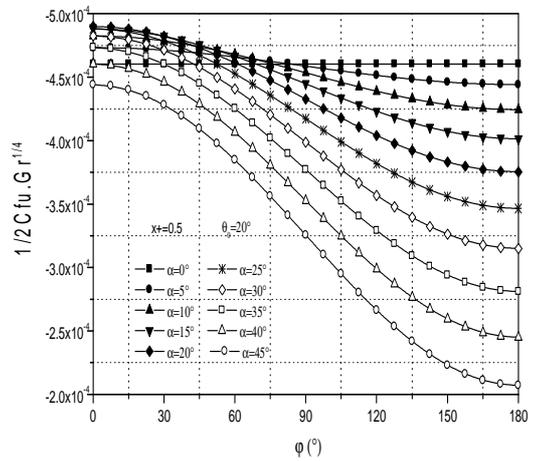


Figure 8: Coefficient de frottement méridien en fonction de  $\varphi$ , pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ ,  $x_+ = 0.5$  et  $\theta_0 = 20^\circ$

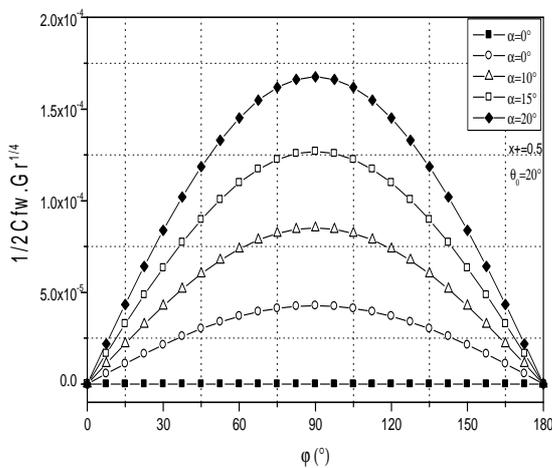


Figure 9: Coefficient de frottement azimutal en fonction de  $\varphi$ , pour plusieurs valeurs de  $\alpha$ ,  $x_+ = 0.5$  et  $\theta_0 = 20^\circ$