

Simulation tridimensionnelle de la convection naturelle dans une enceinte cubique munie d'une source de chaleur localisée sur sa base

Karim RAGUI¹, Youb Khaled BENKAHLA¹, Elisabeth BRUNIER²

¹Laboratoire des Phénomènes de Transfert, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

BP. 32 El Alia, 16111 Bab Ezzouar, Alger, Algérie

²Université de Technologie de Compiègne, France

BP. 20529 – 60205 Compiègne, France

*(auteur correspondant : ragui-karim@live.fr)

Résumé - Il s'agit d'étudier le comportement hydrodynamique et thermique de l'air remplissant entièrement une cavité cubique qui présente une source de chaleur, occupant une fraction de sa base. A l'exception de ses parois verticales, droite et gauche, maintenues à une température uniforme et inférieure à celle de la source, toutes les autres surfaces sont considérées comme adiabatiques. L'écoulement et le transfert thermique sont gouvernés par le nombre de Rayleigh ainsi que par l'étendue de la source de chaleur. Les équations générales de conservation sont discrétisées par le biais de la méthode des volumes finis et sont résolues en utilisant un code de calcul, basé sur l'algorithme SIMPLER.

Nomenclature

C_p chaleur spécifique du fluide, $J.kg^{-1}.K^{-1}$
 g accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$
 H hauteur de la cavité, m
 k conductivité thermique du fluide, $W.m^{-2}.K^{-1}$
 Nu nombre de Nusselt
 P' pression statique du fluide, Pa
 Pr nombre de Prandtl, $= C_p \mu / k$
 Ra nombre de Rayleigh, $= g \beta \rho^2 \Delta T' H^3 C_p / \mu k$
 S terme source
 T' température du fluide, K
 V' vitesse dimensionnelle, $m.s^{-1}$
 x coordonnée horizontale, m
 X coordonnée horizontale adimensionnelle, $= x/H$
 y coordonnée verticale, m
 Y coordonnée verticale adimensionnelle, $= y/H$
 z coordonnée transversale, m

Z coordonnée transversale adimensionnelle, $= z/H$

Symboles Grecs

β coefficient de dilatation thermique, K^{-1}
 ε étendue de la source de chaleur, m
 μ_0 viscosité dynamique du fluide, $kg.m^{-1}.s^{-1}$
 ρ_0 masse volumique de fluide à la température de référence $kg.m^{-3}$
 θ température adimensionnelle du fluide, $= (T' - T'_f) / (T'_c - T'_f)$

Indices et Exposants

' variable dimensionnelle
 a nombre de boucles d'itération
 c chaude
 f froide

1. Introduction

En raison de son implication dans divers systèmes industriels, comme le refroidissement de composants électriques, la thermique des bâtiments ainsi que les pertes thermiques dans les collecteurs solaires, la cavité carrée comportant une source de chaleur, localisée au centre de sa paroi inférieure, compte parmi les configurations qui ont suscité l'intérêt des chercheurs au cours de ces dernières décennies. Citons, à titre d'exemple, les travaux de Ntubarufata et al. [1] en 1993, Aydin and Yang [2] en 2000, Deng et al. [3] en 2002, Calcagni et al. [4] en 2005, ainsi que les travaux de Cheikh et al. [5] en 2007.

Dans ces travaux et beaucoup d'autres, la principale hypothèse utilisée afin de justifier la validité du modèle 2D, consiste à supposer que la cavité est suffisamment large le long de la troisième direction (suivant OZ). Ainsi, malgré sa complexité, l'étude de la géométrie cubique a donné la naissance à un nouvel axe de recherche, en modèle 3D.

A la lumière des travaux de Davis [6], Heitz et Westwater [7], Catton [8], ainsi qu'Ozoe et al. [9], produits entre la période de 1967 et 1976, il a été constaté que le développement de la structure de l'écoulement et du transfert thermique par convection, quand le régime convectif domine, est considéré comme tridimensionnel et non pas bidimensionnel.

En conséquence, le but de la présente étude est d'analyser l'effet de prise en compte de la troisième direction (OZ) sur la structure de l'écoulement ainsi que sur le transfert thermique au sein d'une enceinte remplie d'air et munie d'une source de chaleur occupant une fraction de la base de l'enceinte tandis que les parois verticales de gauche et de droite sont refroidies. La comparaison du modèle 3D avec le modèle 2D a constitué le principal objectif de ce travail. Ainsi, nous examinons l'influence du nombre de Rayleigh et de l'étendue de la source de chaleur sur les caractéristiques hydrodynamique et thermique de l'écoulement convectif afin de discuter la limite de validité de la configuration bidimensionnelle.

2. Description du modèle physique

On se propose, comme schématisé à travers la figure 1, d'étudier le phénomène de convection naturelle induit par une source de chaleur, placée au centre de la paroi inférieure d'une cavité cubique, remplie entièrement d'air. Les parois latérales (gauche et droite) sont maintenues à une température T_f inférieure à celle relevée sur la source T_c . Cependant, toutes les autres parois de la cavité, à savoir, les parois avant et arrière, la paroi supérieure ainsi que le reste de la paroi inférieure (non occupé par la source de chaleur), sont en revanche considérées comme adiabatiques. Enfin, toutes les propriétés physiques du fluide caloporteur sont supposées constantes et uniformes, à l'exception de la masse volumique dans le terme de poussée, qui suit l'approximation de Boussinesq.

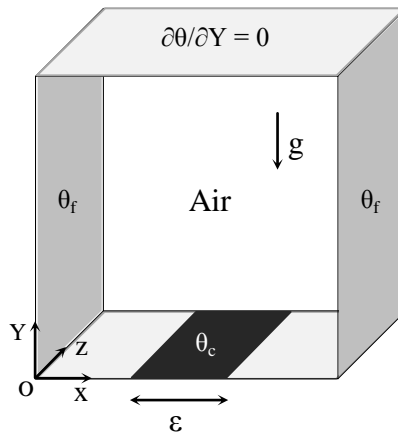


Figure 1 : Schématisation de problème physique et des conditions aux limites.

3. Mise en équations du problème physique

Les équations de continuité, de la quantité de mouvement et celle de l'énergie forment le système d'équations qui régit l'écoulement et le transfert thermique au sein de la cavité cubique. Sous forme dimensionnelle, ce système peut s'écrire comme suit :

$$\nabla \vec{V}' = 0 \quad (1)$$

$$\rho_0 (\vec{V}' \cdot \nabla V') = -\vec{\nabla} P' + \mu_0 \nabla^2 \vec{V}' + \rho_0 [1 - \beta(T - T_0)] \vec{g} \quad (2)$$

$$\rho_0 C_p (\vec{V}' \cdot \vec{\nabla} T') = \nabla (k \nabla^2 T') \quad (3)$$

Les nombres de Nusselt moyens calculés le long des parois actives (chaude et les deux faces froides) sont obtenus par le biais des expressions suivantes :

$$Nu_c = \int_0^1 \int_{(1-\varepsilon)/2}^{(1+\varepsilon)/2} (\partial\theta/\partial Y)_{Y=0} dX dZ \quad (4)$$

$$Nu_f = \int_0^1 \int_0^1 (\partial\theta/\partial X)_{X=0,H} dY dZ \quad (5)$$

4. Méthode numérique et validation

En raison de sa fiabilité, quand au phénomène de convection, la méthode des volumes finis est adoptée afin de discrétiser des équations générales de conservation, tout en utilisant le schéma de la loi de puissance (Power Law) en mode stationnaire. La résolution de système d'équations algébriques ainsi obtenu est assurée par la procédure ligne par ligne, qui consiste en la combinaison entre la méthode de Gauss-Seidel et la méthode directe TDMA.

Comme l'équation de la quantité de mouvement est écrite en fonction des variables primitives (U, V, W et P), la procédure itérative tient compte de la correction de pression et ce, par l'implémentation de l'algorithme SIMPLER [10].

Afin que la solution converge, un critère de convergence est imposé aux composantes de la vitesse, à la température et à la pression. Ce critère est défini comme suit :

$$\frac{\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^L |\phi_{i,j,k}^{a+1} - \phi_{i,j,k}^a|}{\sum_{k=1}^N \sum_{j=1}^M \sum_{i=1}^L |\phi_{i,j,k}^{a+1}|} \leq 10^{-4} \quad (6)$$

où ϕ représente les variables dépendantes U, V, W, P et θ ; les indices i, j, k se réfèrent au nœud considéré, alors que le facteur a représente le nombre d'itérations.

Dans le but de vérifier la fiabilité de nos simulations numériques, quant au phénomène de convection, nous avons confronté nos résultats à ceux de Turan et al. [11], pour le modèle 2D (Figure 2), et à ceux de He et al. [12], et de Frederick et Moraga [13] pour le modèle 3D (Tableau 1).

Les maillages 80^2 et 48^3 ont été utilisés pour respectivement les modèles 2D et 3D. La figure 2, représentant la variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi verticale chaude d'une cavité carrée remplie d'eau en fonction du nombre de Rayleigh, ainsi que le tableau 1, traduisant la variation du nombre de Nusselt moyen calculé le long de la paroi gauche chaude d'une cavité cubique, remplie d'air, en fonction du nombre de Rayleigh, montrent dans ces deux cas, une excellente concordance avec les résultats précités.

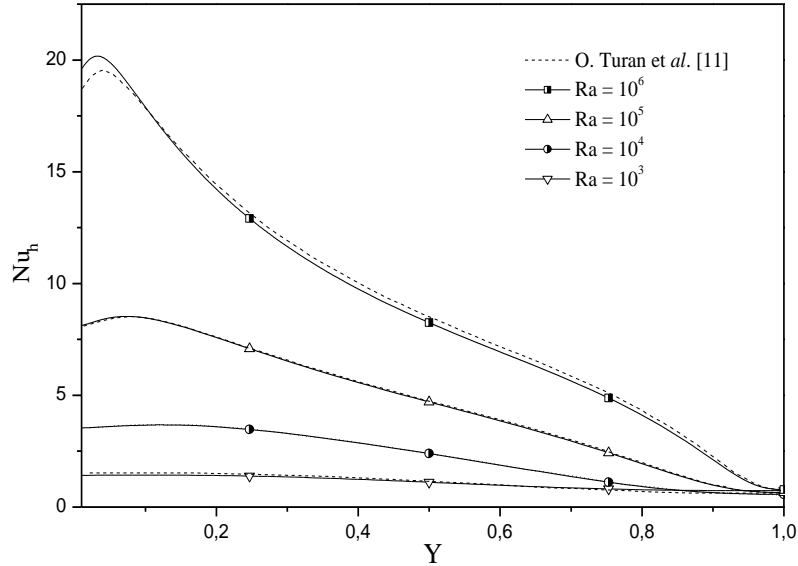


Figure 2 : Variation du nombre de Nusselt local le long de la paroi verticale chaude d'une cavité carrée. $Bn = 0$, $Pr = 7$; $A = 1$.

Tableau 1 : Valeurs du nombre de Nusselt moyenné, le long de la paroi chaude d'une cavité cubique remplie d'air, pour différents nombres de Rayleigh.

	Ra	10^3	10^4	10^5	10^6
Nu_{moy}	He et al. [12]	1,064	2,060	4,400	8,912
	Frederick et Moraga [13]	1,071	2,057	4,353	8,740
	Présent Travail	1,071	2,062	4,391	8,861
Ecart relatif maximal (%)		0,65	0,24	0,86	1,36

5. Résultats et discussion

5.1. Effet du nombre de Rayleigh

Commençons au préalable par l'étude de l'effet du nombre de Rayleigh, Ra , sur le comportement hydrodynamique et thermique de l'air confiné dans une cavité carrée. Cette dernière présente des parois verticales froides et une source de chaleur localisée sur une portion de longueur ε de la paroi inférieure.

5.1.1. Cas d'une cavité bidimensionnelle

La figure 3 illustre les différentes structures d'écoulement et les isothermes pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh, et $\varepsilon = 0,60 H$.

Pour des faibles valeurs du nombre de Rayleigh ($Ra \leq 10^4$), l'écoulement n'est pas très important et les échanges thermiques sont alors dominés par le mode de conduction (régime conductif). Cependant, pour des valeurs élevées du nombre de Rayleigh ($Ra \geq 10^5$), l'écoulement s'intensifie et les échanges convectifs l'emportent devant la contribution conductive, donnant lieu à un régime convectif.

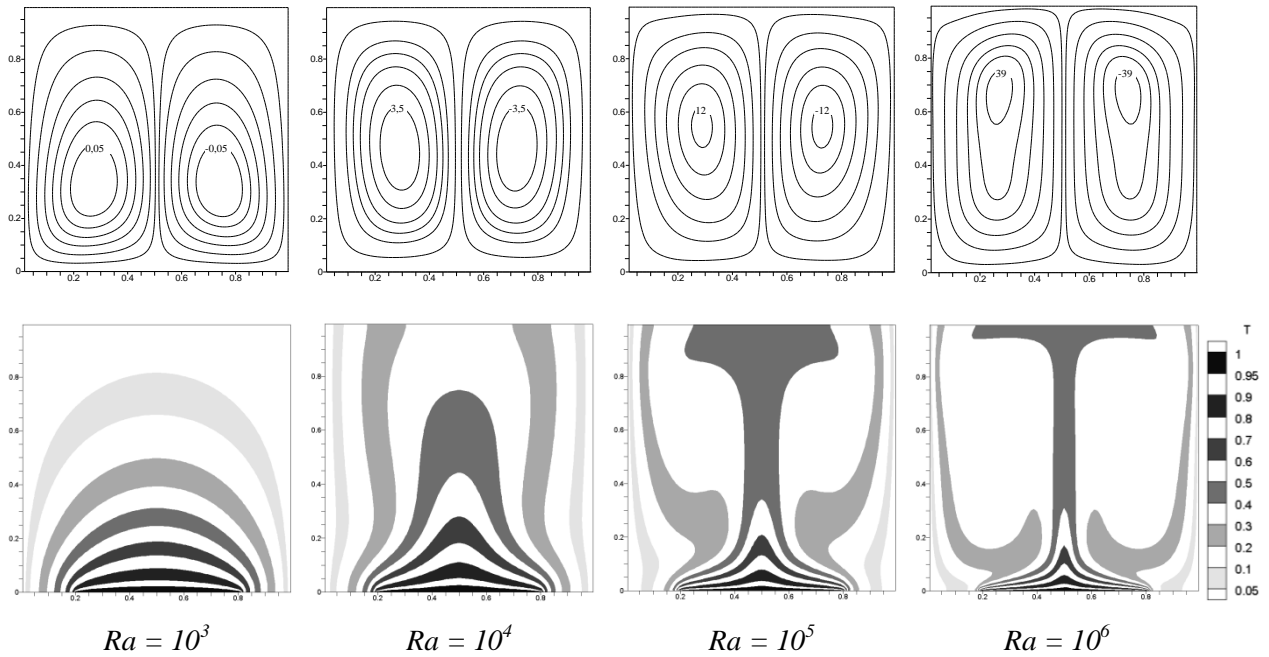


Figure 3 : Lignes de courant et isothermes relatives au modèle 2D pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh. $Pr = 0,71$; $\varepsilon = 0,60 H$.

5.1.2. Cas d'une cavité tridimensionnelle

L'analyse des résultats obtenus pour $Ra = 10^4$ et $Ra = 10^6$, montre l'importance de la prise en compte de l'effet de la troisième direction (Oz) sur le comportement hydrodynamique et thermique du fluide. En effet, les figures 4 et 5 illustrent, en fonction du nombre de Rayleigh, la projection du vecteur vitesse et des isothermes sur les plans XY, YZ et XZ, respectivement. La figure 6 représente les iso-surfaces de température au sein de la cavité cubique et ce, pour différentes valeurs de Ra.

Pour $Ra = 10^4$, la figure 4(a) confirme, comme observé en 2D, la structure bicellulaire symétrique de l'écoulement. Toutefois, en faisant varier Z, l'écoulement du fluide s'intensifie, comme montré sur le plan vertical localisé en $Z = 0,50$.

Sur la partie centrale du plan YZ (figure 4 (b)), localisé en $X = 0,50$, on observe une ascension rectiligne de l'air chaud. Quand on s'éloigne de $X = 0,50$ la recirculation de l'air s'intensifie près de la source chaude et de la paroi supérieure adiabatique. Pour les trois plans horizontaux (XZ) de la figure 4(c), le comportement hydrodynamique du fluide convectif devient prévisible et se traduit par une ascension du fluide par le centre et une descente de ce dernier près des parois latérales.

Là où les effets convectifs sont importants, figure 5 où $Ra = 10^6$, nous remarquons que la structure bicellulaire reste conservée, mais notablement affectée par la troisième direction. En effet, la projection suivant le plan XZ montre que le fluide chaud a tendance à remonter plus rapidement au niveau de trois positions : au centre de la cavité cubique ainsi que près des parois verticales adiabatiques. En revanche, sa vitesse d'ascension s'affaiblit entre ces trois positions. Ce développement d'écoulement dans la direction Y indique que le mode de transfert n'est plus conductif (comme c'est illustré sur la figure 6).

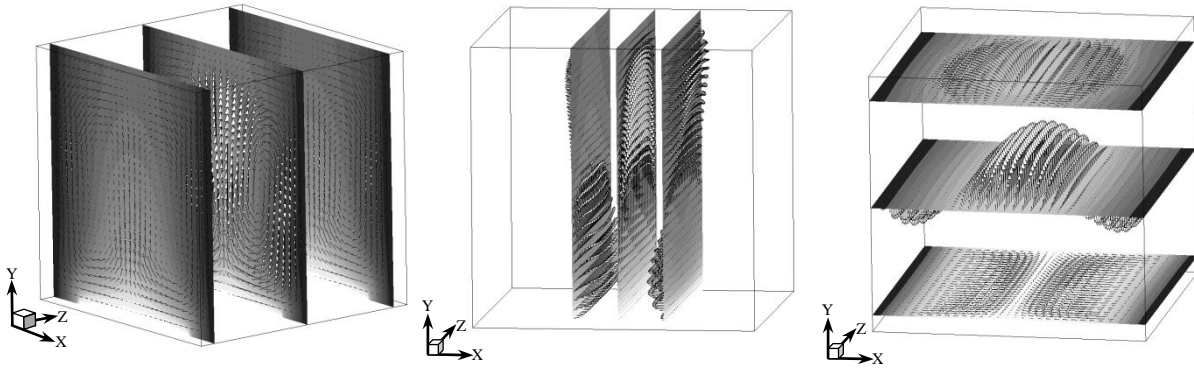


Figure 4 : Projection de vecteur vitesse et les isothermes suivant le plan XY (a), suivant le plan YZ (b), et suivant le plan XZ (c). $Ra = 10^4$; $Pr = 0,71$; $\varepsilon = 0,60 H$.

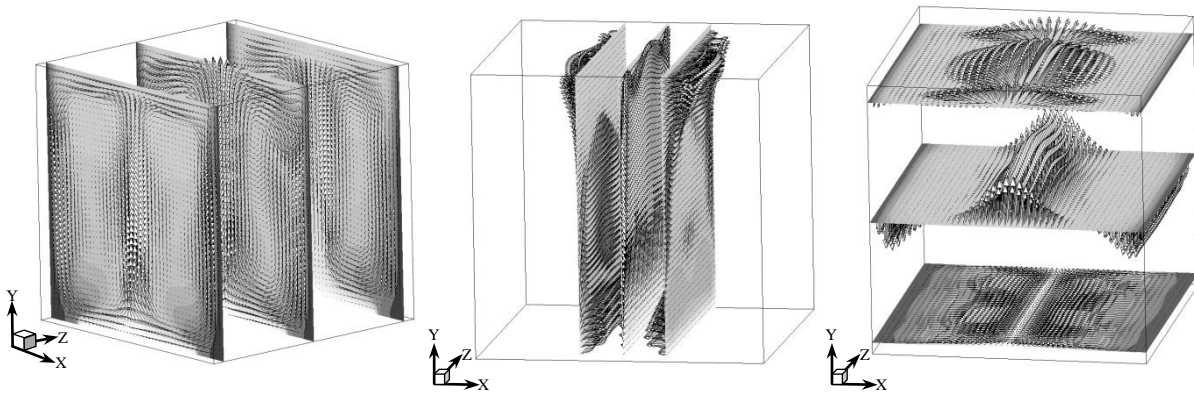


Figure 5 : Projection de vecteur vitesse et les isothermes suivant le plan XY (a), suivant le plan YZ (b), et suivant le plan XZ (c). $Ra = 10^6$; $Pr = 0,71$; $\varepsilon = 0,60 H$.

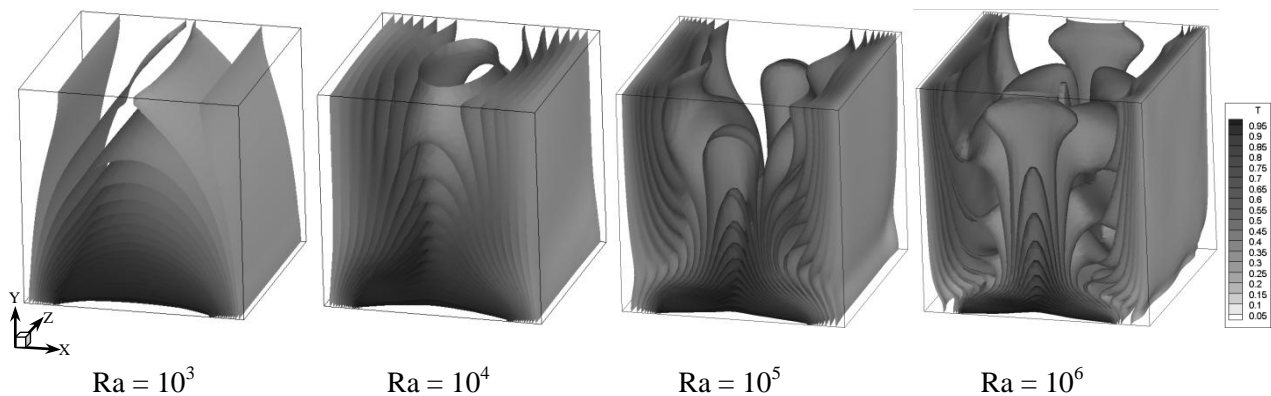


Figure 6 : Iso-surfaces de température pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh.

5.2. Effet de l'étendue de la source de chaleur

L'influence de l'étendue de source de chaleur ε sur le transfert thermique est également étudiée. La figure 7 illustre la projection de vecteur vitesse suivant les plans XZ et XY ainsi que les Iso-surfaces de température dans la cavité cubique, où le nombre de Rayleigh et prise égale à 10^6 et ce, pour les différentes valeurs de ε allant de $1/5$ jusqu'à $4/5$. Au fur et à mesure qu'on augmente l'étendue de la source de chaleur, l'écoulement du fluide convectif s'intense, et par voie de conséquence, la couche limite thermique (ainsi figuré près des parois latérales froides) devient très mince, ce qui rend le transfert thermique meilleur.

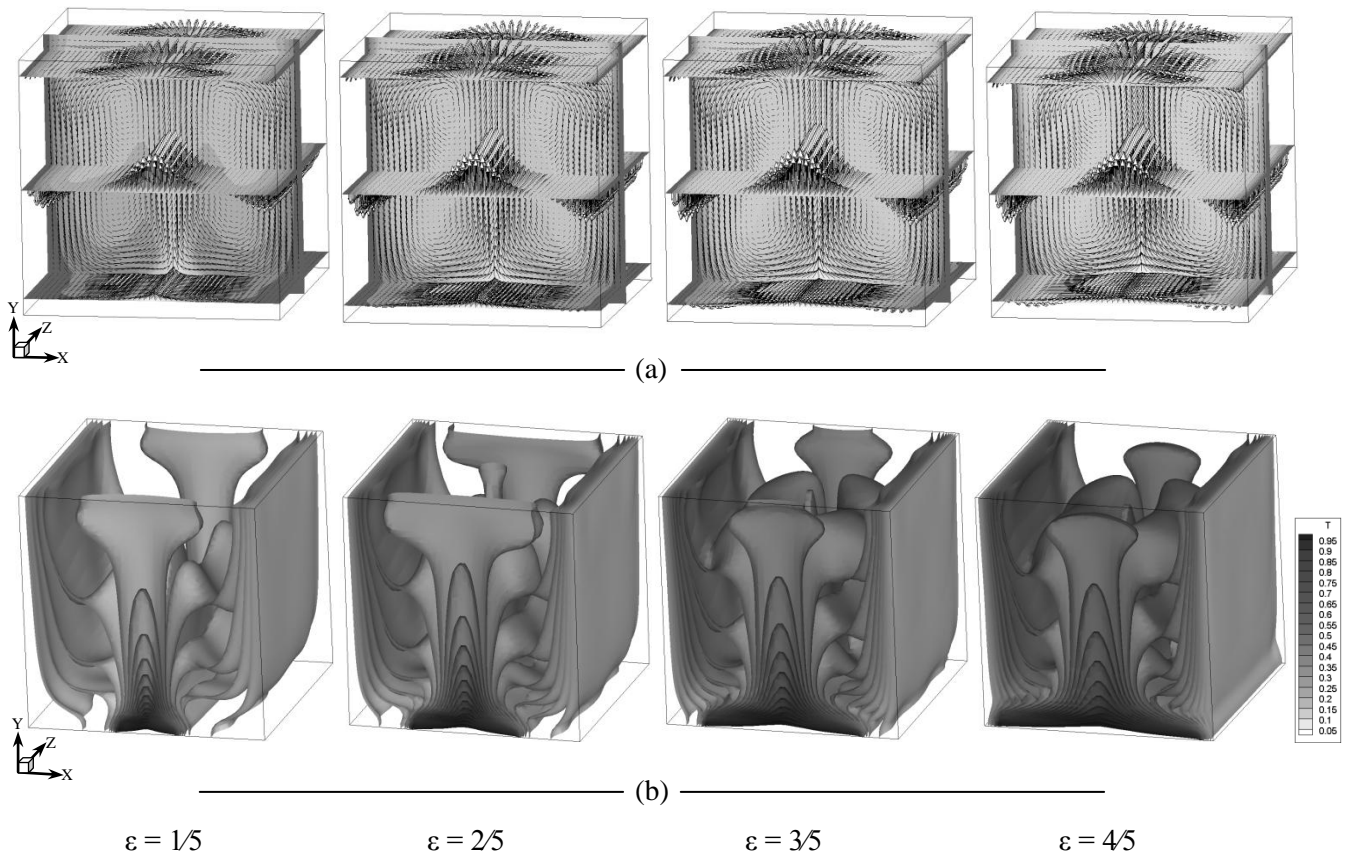


Figure 7 : Projection des vecteur vitesse suivant les plans XZ et XY (a), ainsi que les Iso-surfaces de température (b) dans la cavité cubique pour différentes valeurs de ϵ . $Ra = 10^6$; $Pr = 0,71$.

5.3. Nusselt moyen

La figure 8 montre l'évolution du nombre de Nusselt moyen calculé le long de la cavité avec le nombre de Rayleigh pour différentes valeurs de l'étendue de la source chaude et ce, pour le modèle 2D et 3D, respectivement.

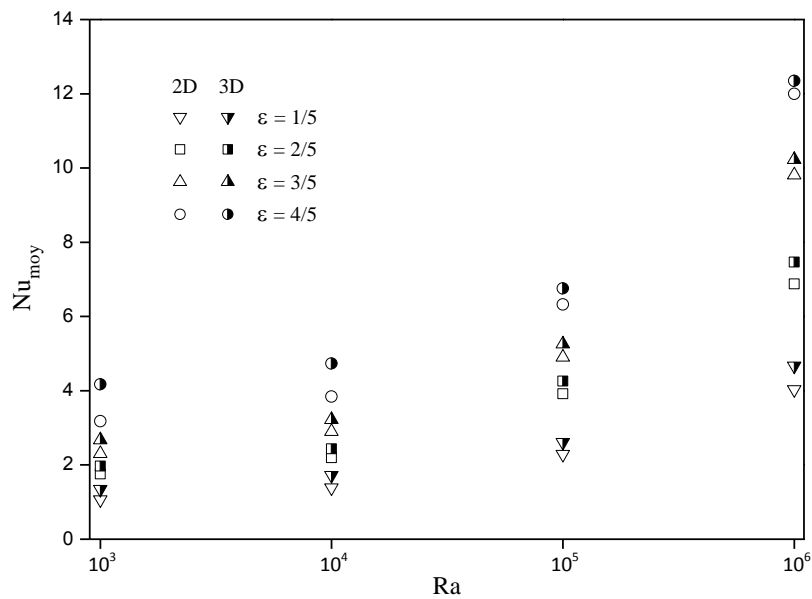


Figure 8 : Evolution du nombre de Nusselt moyen avec le nombre de Rayleigh pour différentes valeurs du l'étendue de la source de chaleur.

Le transfert thermique évolue comme une fonction croissante avec le nombre de Rayleigh et l'étendue de source de chaleur. En outre, avec la prise en compte de la troisième direction, on remarque que le taux de transfert thermique est plus important. La différence maximale calculée entre les deux modèles atteint près de 27%.

6. Conclusion

L'étude de comportement hydrodynamique et thermique d'un fluide newtonien au sein d'une cavité carrée et cubique a été réalisée par voie numérique en utilisant un code de calcul basé sur la méthode des volumes finis. L'effet du nombre de Rayleigh et celui de l'étendue de la source de chaleur, occupant une fraction de la paroi de base, a été examiné. Cette étude nous a permis de constater que deux régimes d'écoulement sont distingués suite de l'augmentation du nombre de Rayleigh. Un régime dit conductif pour une gamme de $Ra \leq 10^4$ et un régime convectif là où $Ra \geq 10^5$. Le taux de transfert thermique se trouve comme une fonction croissante du nombre de Rayleigh ainsi que l'étendue de la source de chaleur.

Les résultats de la comparaison entre les modèles 3D et 2D ont permis de conclure que, dans le régime conductif, le modèle 2D est valable et permet de prédire tous les résultats 3D avec une différence négligeable, ce qui n'est pas le cas dans le régime convectif où l'effet de la troisième direction (OZ) devient important.

References

- [1] E. Ntubarufata, M. Hasnaoui, E. Bilgen, P. Vasseur, Natural convection in partitioned enclosures with localized heating, *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid*, 3 (1993), 133-143.
- [2] O. Aydin, W.J. Yang, Natural convection in enclosures with localized heating from below and symmetrical cooling from sides, *Int. J. Numer. Methods Heat Fluid Flow*, 10-5 (2000), 519-529.
- [3] Q.H. Deng, G. F. Tang, Y. Li, A combined temperature scale for analyzing natural convection in rectangular enclosures with discrete wall heat sources, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 45 (2002), 3437-3446.
- [4] B. Calcagni, F. Marsili, M. Paroncini, Natural convective heat transfer in square enclosures heated from below, *Appl. Therm. Eng.*, 25 (2005), 2522-2531.
- [5] N. B. Cheikh, B. B. Beya, T. Lili, Influence of thermal boundary conditions on natural convection in a square enclosure partially heated from below, *Int. Com. Heat Mass Transfer*, 34 (2007), 369-379.
- [6] S. H. Davis, Convection in a box: linear theory. *J. Fluid Mech*, 30 (1967), 465-478.
- [7] W. L. Heitz and J. W. Westwater, Critical Rayleigh numbers for natural convection of water confined in square cells with L/D from 0.5 to 8, *J. Heat Transfer*, 93 (1971), 188-196.
- [8] I. Catton, The effect of insulating vertical walls on the onset of motion in a fluid heated from below, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15 (1972), 665-672.
- [9] H. Ozoe, K. Yamamoto, S. W. Churchill and H. Sayama, Three-dimensional, numerical analysis of laminar natural convection in a confined fluid heated from below, *J. Heat Transfer*, 98 (1976), 202-207
- [10] S.V. Patankar, Numerical Heat transfer and fluid flow, Hemisphere Publishing Corporation, Taylor and Francis Group, New York (1980).
- [11] O. Turan, N. Chakraborty, R. J. Poole, Laminar natural convection of Bingham fluids in a square enclosure with differentially heated side walls, *J. Non-Newt. Fluid Mech.*, 165 (2010), 901-913.
- [12] Y.L. He, W.W. Yang, W.Q. Tao, Three-dimensional numerical study of natural convective heat transfer of liquid in a cubic enclosure, *Num. Heat Transfer Part A*, (2005), 47, 917-934.
- [13] R.L. Frederick, S.G. Moraga, Three-dimensional natural convection in finned cubical enclosures, *Int. J. Heat Fluid Flow*, 28 (2007), 289-298.