

Algorithme d'optimisation de paramètres en thermique instationnaire appliqué au refroidissement d'un four

Raouf KHELALFA, Jean-Félix DURASTANTI, Youssef SFAXI, Olivier RIOU

Université Paris-Est Créteil Val de Marne (UPEC), Centre d'Etudes et de Recherche en Thermique, Environnement et Systèmes, CERTES
61 Avenue du Général de Gaulle 94000 Créteil

Résumé

L'optimisation de systèmes thermiques est une étape qui nécessite généralement des temps de calcul longs lorsque l'on utilise des méthodes classiques. Le problème se pose en instationnaire lors du réajustement de paramètres physiques dans la résolution de l'équation de la chaleur. La réanalyse présentée ici permet de remédier à cette difficulté en découplant la phénoménologie et les conditions aux limites. On obtient un système de taille réduite plus simple à résoudre. On présente ici le cas du refroidissement d'un four. On compare les résultats de la réanalyse avec ceux des éléments finis.

Nomenclature

T	Température, C	$[K_v]$	Matrice volumique
K	Conductivité thermique, $W.m^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$[K_s]$	Matrice surfacique
C_p	Chaleur spécifique, $J.kg^{-1}.^{\circ}C^{-1}$	$[K]$	Matrice de conductance thermique
h	Coefficient de convection, $W.m^{-2}.^{\circ}C^{-1}$	$[C]$	Matrice de capacité thermique
L, l	Dimension du four, m	$[I_p]$	Matrice identité de dimension p
T_0	Température initiale, $^{\circ}C$	$\{F_g\}_t$	Vecteur des sollicitations thermiques
T_{∞}	Température ambiante, $^{\circ}C$	$\{F_d\}_t$	Vecteur flux connu
t	Temps, s	$\{F_r\}_t$	Vecteur flux inconnu
t_{cpu}	Temps cpu machine	$\{\Phi\}_t$	Vecteur de la variable de réanalyse
t_{rea}	Temps cpu réanalyse	Bi	Nombre de Biot
t_{elf}	Temps cpu éléments finis	$nvar$	Nombre de variation de paramètre
x,y	Coordonnées cartésiennes	Nd	Numéro de nœud

1. Introduction

Lors de la conception d'un dispositif thermique, la recherche d'un fonctionnement opérationnel optimal nécessite souvent un paramétrage des données physiques ou géométriques obtenu à la suite de plusieurs séries de tests. Le problème qui se pose dans ce type de procédure est le coût élevé du processus de validation. Pour remédier à cette contrainte d'étude, on s'intéresse dans ce cas à une diminution du temps de calcul dans les traitements numériques.

Dans ce contexte, on présente une approche particulière de la résolution de l'équation de la chaleur instationnaire où certains paramètres physiques et sollicitations thermiques du problème sont variables (coefficient d'échange convectif, température et flux de chaleur à la frontière,...etc.). Le travail exposé ici est une adaptation de l'algorithme de réanalyse [1], [2], appliqué à l'optimisation d'un four dans le cas d'un système spatio-temporel discrétisé en éléments finis et en différences finies. Par l'introduction de nouvelles variables d'interfaces, on réduit ainsi le nombre de degrés de liberté lors de la réévaluation des solutions du problème.

2. Réanalyse de la thermique instationnaire

2.1. Principe de l'algorithme d'optimisation

Dans le traitement numérique d'un problème de thermique instationnaire, on rappelle que la discrétisation spatiale et temporelle de l'équation d'évolution nous donne le système matriciel de taille $(n \times n)$ suivant :

$$[\bar{K}] \{T_n\}_{t+\Delta t} = \{\bar{R}\}_{t+\Delta t} \quad (1)$$

avec la matrice $[\bar{K}]$:

$$[\bar{K}] = [C] + \Delta t \theta [K] \quad \text{tel que : } \theta \text{ un coefficient qui vaut : } 0; 0.5 \text{ ou } 1$$

et le vecteur $\{\bar{R}\}_{t+\Delta t}$ de taille $(n \times 1)$:

$$\{\bar{R}\}_{t+\Delta t} = -\Delta t \left(\theta \{F\}_{t+\Delta t} + (1-\theta)\{F\}_t \right) - \Delta t (1-\theta)[K] \{T_n\}_t + [C]\{T_n\}_t$$

Le groupement $[\bar{K}]$ qu'on a défini ci-dessus, se compose explicitement de la matrice régulière des capacités thermiques $[C]$ et la matrice des conductances $[K]$ auxquelles on impose des conditions aux limites. Dans l'expression de $\{\bar{R}\}_{t+\Delta t}$ nous définissons le vecteur des sollicitations thermiques $\{F\}_t$, écrit à l'instant t . Dans notre démarche d'optimisation, on décompose dans un premier temps les équations (1) en découplant la partie phénoménologique du problème et la partie issue des conditions aux limites. A partir de là, le système régulier qu'on obtient est inversé afin de trouver par la suite une réponse générale en fonction des nouvelles variables. Ces dernières sont calculées à la frontière physique du problème à étudier après avoir construit le système de réanalyse. A travers cette procédure, toute modification apportée dans les conditions aux limites pour une géométrie donnée, s'effectue sans avoir besoin de reprendre toutes les étapes de calcul, contrairement à un processus classique.

2.2. Réécriture du modèle discrétisé

Dans l'équation thermique discrétisée (1), on sépare les conditions aux limites de l'aspect phénoménologique par la décomposition de la matrice de conductance $[K]$ sous la forme [1] :

$$[K] = [K_v] + [K_s]$$

où $[K_v]$ dépend de l'élément de volume qui caractérise la phénoménologie du problème. La matrice $[K_s]$ modélise quant à elle, l'impact des conditions aux limites sur la frontière du volume étudié. La forme matricielle de l'équation de la chaleur en régime instationnaire (1) devient :

$$[C] \left(\{T_n\}_{t+\Delta t} - \{T_n\}_t \right) + \Delta t [K_v] \left(\theta \{T_n\}_{t+\Delta t} + (1-\theta)\{T_n\}_t \right) + \theta \Delta t \{F_g\}_{t+\Delta t} + (1-\theta) \Delta t \{F_g\}_t = 0 \quad (2)$$

avec $\{F_g\}_t$ le vecteur des sollicitations globales de taille $(n \times 1)$ tel que :

$$\{F_g\}_t = \{F\}_t + [K_s]\{T_n\}_t \quad (3)$$

En posant que : $\left[\overline{K_r} \right] = [C] + \Delta t \theta [K_v]$

$$\text{et } \left\{ \overline{R_r} \right\}_{t+\Delta t} = -\Delta t \left(\theta \{F_g\}_{t+\Delta t} + (1-\theta) \{F_g\}_t \right) + \left([C] - \Delta t (1-\theta) [K_v] \right) \{T_n\}_t$$

on obtient à partir de (2) le nouveau système de taille $(n \times n)$ qu'on résout à chaque pas de temps :

$$\left[\overline{K_r} \right] \{T_n\}_{t+\Delta t} = \left\{ \overline{R_r} \right\}_{t+\Delta t} \quad (4)$$

Les sollicitations thermiques $\{F_g\}_t$ définies ci-dessus (3) se composent de termes connus placés dans le vecteur $\{F_d\}_t$, généralement nuls [3] et de termes inconnus placés dans le vecteur $\{F_r\}_t$ qu'on exprime par :

$$\{F_g\}_t = \{F_d\}_t + \{F_r\}_t = \{F_d\}_t + [L] \{\phi\}_t$$

La matrice $[L]$ de taille $(n \times p)$ est construite en supprimant les composantes nulles de $\{F_r\}_t$ à partir d'un vecteur $\{\phi\}_t$ de même nature physique (flux thermique échangé à la frontière) et de taille réduite $(p \times 1)$ tel que $p \ll n$. En choisissant maintenant de définir un nouveau groupement vectoriel $\{D\}_{t+\Delta t}$ de dimension $(n \times 1)$ par l'expression :

$$\{D\}_{t+\Delta t} = \left(\left[\overline{K_r} \right] - \Delta t [K_v] \right) \{T_n\}_t + \Delta t \left(\theta \{F_d\}_{t+\Delta t} + (1-\theta) \left(\{F_d\}_t + [L] \{\phi\}_t \right) \right)$$

$$\text{Le système (4) devient ; } \left[\overline{K_r} \right] \{T_n\}_{t+\Delta t} = \{D\}_{t+\Delta t} + \theta \Delta t [L] \{\phi\}_{t+\Delta t} \quad (5)$$

A partir de là, la solution générale des températures nodales s'écrit :

$$\{T_n\}_{t+\Delta t} = \left[\overline{K_r} \right]^{-1} \{D\}_{t+\Delta t} + \theta \Delta t \left[\overline{K_r} \right]^{-1} [L] \{\phi\}_{t+\Delta t} \quad (6)$$

On voit d'après cette expression (6) que la résolution du problème thermique par la réanalyse revient donc à rechercher les nouvelles variables $\{\phi\}_{t+\Delta t}$ qu'on détermine à chaque pas de temps.

2.3. Prise en compte des conditions de frontière

Pour que le problème thermique instationnaire (5) soit bien posé, on introduit p conditions aux limites indépendantes [1], décrites par le système linéaire suivant :

$$[CT] \{T_n\}_{t+\Delta t} + [CF] \{\phi\}_{t+\Delta t} = \{\delta\}_{t+\Delta t} \quad (7)$$

La matrice $[CT]$ de taille $(p \times n)$ caractérise la prise en compte des valeurs de frontière, limitées aux températures. Quant à la matrice $[CF]$ de dimension $(p \times p)$ est la matrice des conditions aux

limites, relative aux flux de chaleur qu'échange le système physique avec l'extérieur. Le vecteur $\{\delta\}_{t+\Delta t}$ dont les p composantes peuvent être des températures ou des flux de chaleur est calculé à chaque pas de temps. En injectant maintenant l'expression (6) de $\{T_n\}_{t+\Delta t}$ dans (7) et en posant que :

$$[TR] = \theta \Delta t [CT] \left[\overline{K_r} \right]^{-1} [L] + [CF]$$

on obtient le système de réanalyse de taille $(p \times p)$:

$$[TR] \{\phi\}_{t+\Delta t} = \{\delta\}_{t+\Delta t} - [CT] \left[\overline{K_r} \right]^{-1} \{D\}_{t+\Delta t} \quad (8)$$

La résolution de (8), nous donne les variables d'interfaces :

$$\{\phi\}_{t+\Delta t} = [TR]^{-1} \{\delta\}_{t+\Delta t} - [TR]^{-1} [CT] \left[\overline{K_r} \right]^{-1} \{D\}_{t+\Delta t} \quad (9)$$

Dans cette démarche de décomposition matricielle par la réanalyse, les températures nodales $\{T_n\}_{t+\Delta t}$ d'après l'expression (6), sont déterminées en résolvant un système d'équations (8) de taille beaucoup plus petite ($p \ll n$), comparé à un traitement numérique classique.

2.3.1. Conditions aux limites mixtes

Dans une configuration particulière où on impose des conditions aux limites mixtes, la matrice $[CT]$ et $[CF]$ peuvent être identifiées par [3] :

$$[CT] = [L]^t \cdot [\overline{K}] \quad [CF] = [0] \quad (\text{Matrice nulle})$$

De là, le vecteur $\{\delta\}_{t+\Delta t}$ d'après (7) à pour expression : $\{\delta\}_{t+\Delta t} = [L]^t \cdot \{\overline{R}\}_{t+\Delta t}$

2.3.2. Conditions aux limites en température

Dans le cas des conditions aux limites de type Dirichlet (température imposée), les matrices $[CT]$ et $[CF]$ ainsi que le vecteur $\{\delta\}_{t+\Delta t}$ peuvent être assimilées à :

$$[CT] = [L]^t \cdot [K_v] \quad [CF] = -[I_p] \quad \{\delta\}_{t+\Delta t} = \{0\}$$

3. Application dans le cas d'un refroidissement d'un four

3.1. Position et données du problème

L'algorithme de réanalyse développé précédemment (5)-(9) est appliqué ici dans un cas test d'un problème de paramétrage des données physiques de refroidissement d'un four (Figure.1). De forme carrée, de coté extérieur L et de coté intérieur l ce dispositif thermique est soumis sur les parois intérieures à une température T_l contrôlée par un thermostat. Quant aux parois extérieures, elles sont soumises à des conditions de flux q_{cau} de type Cauchy. Dans ce premier test de validation numérique, on suppose pour les matériaux qui constituent le four (matériaux réfractaires,....etc.), une conductivité thermique et une chaleur spécifique moyenne respectivement égale à k_0 et c_{p_0} .

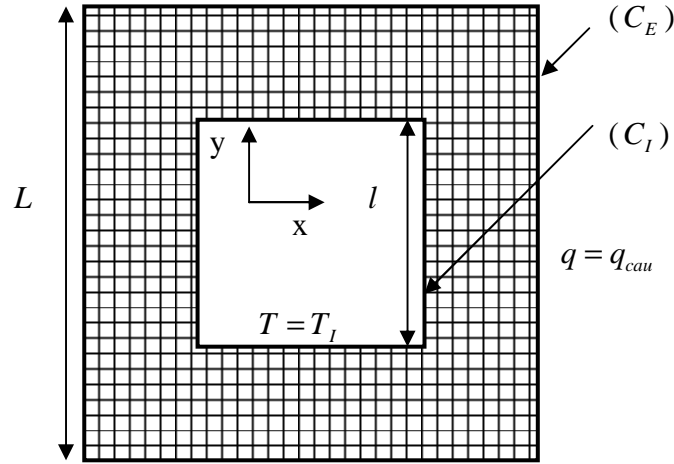


Figure 1 : Refroidissement d'un four

3.2. Ecriture du modèle sans dimension

En choisissant de prendre pour ce problème de diffusion instationnaire les variables sans dimensions suivantes :

$$\frac{x}{L} = \bar{x} \quad \frac{y}{L} = \bar{y} \quad \frac{t}{\tau_0} = \bar{t} \quad \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = \bar{T} \quad \frac{\rho}{\rho_0} = 1 \quad \frac{c_p}{c_{p_0}} = 1 \quad \frac{k}{k_0} = 1 \quad (10)$$

l'équation de la chaleur sous forme adimensionnelle s'écrit :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} - \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{y}^2} \right) = 0 \quad (11)$$

avec comme conditions aux limites et initiales :

$$\bar{T}(\bar{t}; \bar{x}_{C_I}; \bar{y}_{C_I}) = 1 \quad -\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{x}} \Big|_{C_E} = -\frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{y}} \Big|_{C_E} = Bi \bar{T}(\bar{t}; \bar{x}_{C_E}; \bar{y}_{C_E}) \quad \bar{T}(0; \bar{x}; \bar{y}) = \bar{T}_0 \quad (12)$$

Pour l'échelle de temps τ_0 on a pris : $\tau_0 = \frac{L^2}{\alpha_0}$

On rappelle que : $\alpha_0 = \frac{k_0}{\rho_0 c_{p_0}}$ $Bi = \frac{h_0 L}{k_0} = O(1)$ (nombre de Biot)

3.3. Résultats

On présente ici le problème du refroidissement du four décrit précédemment, traité par la méthode des éléments finis avec des éléments à trois nœuds ; on résout le système d'équation discrétisé d'une part par la méthode classique (1) et d'autre part par la réanalyse (5)-(9). L'intérieur du four est initialement à la température T_i égale à 1200°C et l'environnement à T_∞ égale à 20°C . On décide d'arrêter immédiatement le chauffage en faisant passer T_i de 1200°C à 20°C ; on vérifie que les évolutions des températures sont analogues (voir tableau 1). Pour les dimensions du four, on a pris respectivement pour L et l , 1 m et 0.25 m .

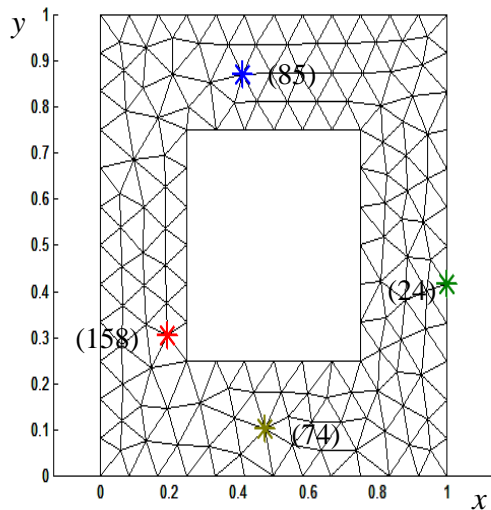


Figure 2 : maillage du four

Numéro du noeud	Méthode de résolution	Température T(2000 s ,x ,y)
Nd=24 x=1.00 y=0.41	Classique	54.457
	Réanalyse	54.451
Nd=74 x=0.47 y=0.10	Classique	528.991
	Réanalyse	528.988
Nd=85 x=0.41 y=0.87	Classique	648.246
	Réanalyse	648.242
Nd=158 x=0.19 y=0.3	Classique	920.911
	Réanalyse	920.915

Tableau 1 : comparaison de la méthode classique et la réanalyse

Confortés par ces résultats, on simule dix niveaux de refroidissement (nvar=10) entre 1200°C et 600°C pour la paroi intérieure; on compare les temps de calcul obtenus par les deux méthodes d'une part en faisant varier le nombre d'itérations Npas (Figure. 3) et d'autre part en faisant varier le nombre de nœuds NNd du maillage (Figure.4).

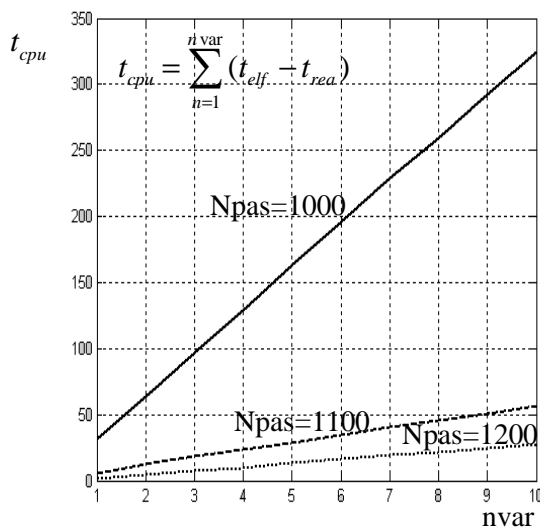


Figure 3 : Gain de temps en fonction du nombre de pas de calcul

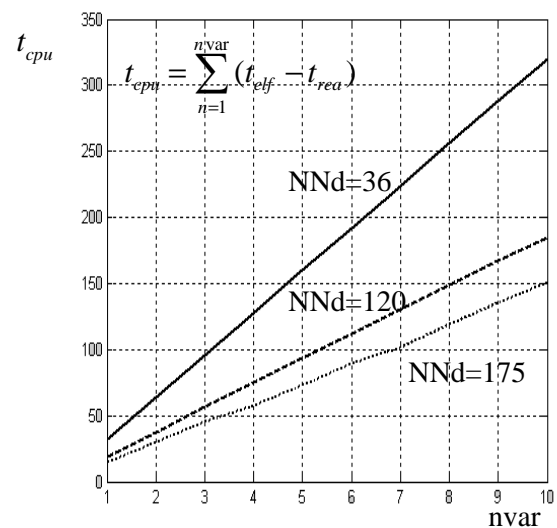


Figure 4 : Gain de temps en fonction du nombre de nœud

4. Conclusion

Dans ce travail on a pu montrer à travers le cas du refroidissement du four que l'algorithme d'optimisation de la réanalyse, basé essentiellement sur la décomposition phénoménologique du problème et des conditions aux limites, est particulièrement bien adapté à un problème de thermique à deux dimensions. La réanalyse permet manifestement d'obtenir des gains de temps de calcul intéressants.

Références

- [1] B. Peureux, La réanalyse en thermique, Thèse de doctorat de l'université de Bourgogne (1995).
- [2] P.M. Rabearivelo, Contribution à la résolution des équations de Navier Stokes par une méthode de réanalyse, Thèse de doctorat de l'université de Paris XII (2005).
- [3] B. Peureux, J.F. Durastanti, B. Martin, A. Loreda, La réanalyse de l'équilibre thermique, Revue Générale de Thermique (1995), 679-689.