

Convection induite par l'effet Soret au sein d'un milieu poreux saturé par un fluide ayant un maximum de densité

Zineddine ALLOUI^{1*}, Hassen BEJI², Patrick VASSEUR¹

¹ Département de Génie Mécanique, École Polytechnique, Montréal, Québec, H3C 3A7, Canada

² Laboratoire des Technologies Innovantes, Université Jules Vernes d'Amiens, rue des Facultés le Bailly, 800025 Amiens Cedex, France

*(auteur correspondant: zineddine.alloui@polymtl.ca)

Résumé - Dans la présente investigation on considère le cas d'une cavité carrée poreuse, saturée avec une solution binaire présentant un extremum de densité et ayant une concentration initiale uniforme. Des températures différentes sont imposées sur les parois verticales de la cavité, les parois horizontales étant adiabatiques et imperméables. Les équations de base décrivant la convection naturelle induite par l'effet Soret, au sein de la cavité, sont résolues numériquement par la méthode des volumes de contrôle. Les paramètres de base gouvernant ce problème sont le nombre de Rayleigh thermique R_T , le nombre de Rayleigh solutal R_S , le nombre de Lewis Le , et le paramètre d'inversion de la densité γ . Les résultats numériques démontrent l'existence d'une riche variété d'écoulements dans la gamme des paramètres de contrôle étudiée.

Nomenclature

A	rapport de forme de la cavité, (L'/H')	V'	vitesse de l'écoulement,
D	diffusivité massique, $m^2 K^{-1}$	x, y	coordonnées adimensionnelles,
H'	hauteur de la cavité, m		$(x', y')/H'$
k	conductivité thermique, $W m^{-1} K^{-1}$	Symboles Grecs	
K	perméabilité du milieu poreux, m^2	α	diffusivité thermique, $m^2 s^{-1}$
L'	largeur de la cavité, m	β_N	coefficient d'expansion massique
Le	nombre de Lewis, (α/D)	β_T'	coefficient d'expansion thermique,
N	concentration		K^{-1}
N_0	concentration de référence	ε	porosité normalisée du milieu poreux,
ΔN	écart caractéristique de concentration		ϕ/σ
Nu	nombre de Nusselt	ν	viscosité cinématique du fluide, $m^2 s^{-1}$
R_T	nombre de Rayleigh thermique,	φ	rapport des forces de poussée,
	$(g\beta_T'K\Delta T'H'/\nu\alpha)$		$(\beta_N\Delta N/\beta_T'\Delta T')$
S	concentration normalisée	ρ	densité du fluide, $kg m^{-2}$
Sh	nombre de Sherwood	ρ_0	densité de référence, $kg m^{-2}$
t	temps adimensionnel, $(t'\alpha/H'^2)$	$(\rho C)_p$	chaleur massique du milieu poreux,
T	température adimensionnelle,	$(\rho C)_f$	chaleur massique milieu fluide
	$(T' - T'_C)/\Delta T'$	ϕ	porosité du milieu poreux
T'_0	température de référence,	Ψ	fonction de courant adimensionnelle,
$\Delta T'$	différence de température caractéristique, $(T'_H - T'_C)$		Ψ'/α
u, v	composantes de la vitesse adimensionnelle, $(u', v') \times (H'/\alpha)$	γ	paramètre d'inversion,
			$\gamma = 2(T'_R - T'_0)/\Delta T'$

1. Introduction

Une cavité rectangulaire fermée et contenant un fluide, à travers laquelle la chaleur est transmise par convection, représente une idéalisation simplifiée de nombreuses situations pratiques et a fait l'objet dans le passé d'un certain nombre d'études tant théoriques qu'expérimentales. Une revue bibliographique complète de travaux effectués dans ce domaine a été présentée par Nield et Bejan [1] pour les milieux poreux et Bejan [2] pour les milieux fluides.

Dans la plupart des travaux existant dans ce domaine, il a été supposé que le coefficient d'expansion thermique du fluide demeurerait constant pour la gamme de températures considérée. Pour des écarts importants de température, une valeur moyenne de ce coefficient peut alors être utilisée dans les calculs. Pour la plupart des fluides qui possèdent une relation monotonique entre la température et la masse volumique, une telle hypothèse est justifiée pourvu néanmoins que la relation entre la masse volumique et la température demeure linéaire. Cependant dans le cas de certaines solutions une relation linéaire n'est pas justifiée. Par exemple, la masse volumique de l'eau, au voisinage du point de congélation, atteint une valeur maximum à une température de 3.98°C pour ensuite décroître de par et d'autre de cette température. Pour une telle situation l'utilisation d'une valeur moyenne du coefficient d'expansion thermique devient alors physiquement irréaliste. Plus encore, le changement de direction de la force de flottabilité peut donner lieu à des inversions des écoulements. Une revue des travaux dans ce domaine a été effectuée récemment par Zheng et al. [3]. Une extension de ce type de problème concerne le cas de fluides binaires (solvant et soluté) présentant un maximum de masse volumique dans une gamme de température donnée. Les travaux existant dans ce domaine sont cantonnés au cas de la double diffusion, pour lequel les gradients solutaux sont générés par des conditions de concentrations imposées sur les parois de la cavité (voir par exemple Sivasankaran and Kandaswamy [4]). Cependant, en général, les gradients solutaux au sein d'une solution binaire ayant une concentration initiale uniforme peuvent également être générés par les gradients thermiques, i.e. par l'effet Soret (voir par exemple Alloui et al.[5]). Dans cette étude on étudie le cas de la convection naturelle induite par l'effet Soret d'une solution binaire présentant un maximum de densité

2. Description du problème et formulation mathématique

La configuration géométrique étudiée, les conditions aux limites et les axes de coordonnées sont montrés sur la figure 1. L'écoulement résultant est supposé bidimensionnel et laminaire et les propriétés du fluide sont considérées constantes. La variation de la masse volumique ρ suivant la température et la concentration est calculée en utilisant la relation suivante (Antar [6]):

$$\rho = \rho_0 \left[1 - \beta'_T (T' - T_0)^2 - \beta'_N (N - N_0) \right] \quad (1)$$

Les équations gouvernantes sont les suivantes :

$$\frac{\mu}{K} \mathbf{V}' = -\nabla P' + \Delta \rho \mathbf{g} \quad (2)$$

$$(\rho C)_p \frac{\partial T'}{\partial t'} + (\rho C)_f \mathbf{V}' \cdot \nabla T' = k \nabla^2 T' \quad (3)$$

$$\phi \frac{\partial N}{\partial t'} + \mathbf{V}' \cdot \nabla N = D \nabla^2 N + a D' N_0 (1 - N_0) \nabla^2 T' \quad (4)$$

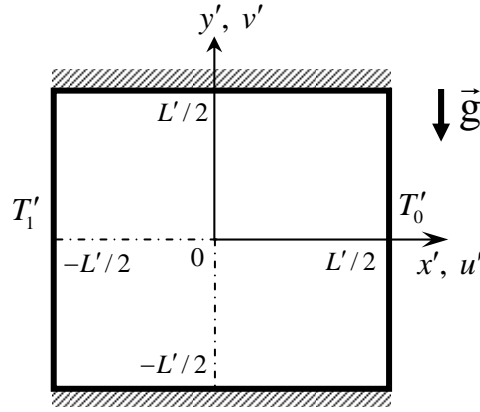


Figure 1 : Configuration géométrique du problème.

Sous forme normalisée et en termes de la fonction de courant ces équations deviennent :

$$\nabla^2 \Psi = \frac{\partial}{\partial x} \left[R_T (\gamma T - T^2) - \frac{R_S}{Le} S \right] \quad (5)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \nabla^2 T \quad (6)$$

$$\varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{1}{Le} (\nabla^2 S - a \nabla^2 T) \quad (7)$$

Les conditions aux limites relatives à ce problème sont données par :

$$x = -\frac{1}{2}, \quad \Psi = 0, \quad T = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = a \frac{\partial T}{\partial x} \quad (8)$$

$$x = \frac{1}{2}, \quad \Psi = 0, \quad T = 1, \quad \frac{\partial S}{\partial x} = a \frac{\partial T}{\partial x} \quad (9)$$

$$y = -\frac{1}{2}, \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad (10)$$

$$y = \frac{1}{2}, \quad \Psi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

3. Solution numérique

La méthode de solution est basée sur le concept des volumes de contrôle. Un maillage uniforme de (81×81) a été utilisé dans la plupart des résultats présentés dans cette étude. Les équations discrétisées ont été dérivées en les intégrant d'abord dans un petit volume de contrôle et ensuite en utilisant les différences centrées pour calculer les flux. Des différences avant ont été utilisées pour la discrétisation dans le temps. La résolution des équations discrétisées est basée sur la technique ADI (méthode implicite aux directions alternées) à chaque pas de temps. Nous considérons que la solution finale est atteinte lorsque la condition de convergence, appliquée pour chaque quantité et à tous les points du maillage, est suffisamment petite pour que des itérations supplémentaires n'introduisent pas de changement appréciable ($\varepsilon \leq 10^{-6}$). Le programme élaboré a été testé en prenant comme références les résultats de Goyeau et al. [7].

4. Résultats et discussions

La figure 2 montre la relation entre le nombre de Nusselt, Nu , et le paramètre d'inversion γ pour $R_T = 100$ et en l'absence de l'effet Soret ($a = 0$). Comme démontré dans le passé par Zheng et al. [8] en raison de la symétrie de l'équation d'état, il s'en suit que le nombre de Nusselt est gouverné par la relation $Nu(\gamma) = Nu(2 - \gamma)$. En augmentant la valeur du paramètre d'inversion au-dessus $\gamma = 2$, la densité maximale se trouvera à l'extérieur de la cavité. Néanmoins, l'effet non linéaire de l'équation d'état continuera à affecter l'écoulement convectif, le transfert de chaleur correspondant et la distribution de la concentration au sein de la cavité. Naturellement, quand le paramètre d'inversion γ est suffisamment important, la non linéarité des termes dans l'équation d'état devient négligeable et le régime de la convection classique est retrouvé.

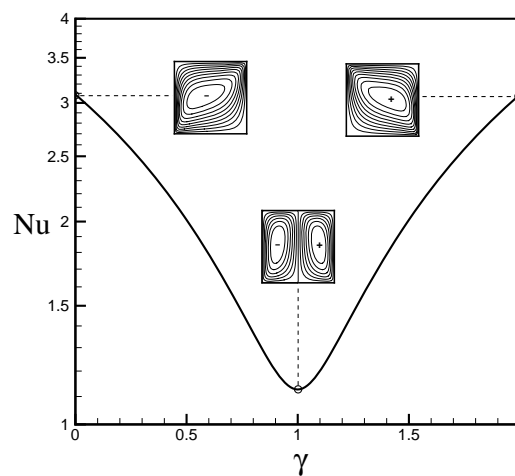


Figure 2 : Nombre de Nusselt en fonction du paramètre d'inversion γ pour $R_T = 10^2$, $R_S = 0$, $Le = 10$ et $a = 0$

Les figures 3a et 3b montrent l'effet du paramètre d'inversion γ sur le nombre de Nusselt pour $R_T = 100$ et pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh solutal R_S . En augmentant le nombre de Rayleigh solutal de $R_S = 0$ (Fig. 2) à $R_S = 1000$ et $R_S = -1000$ (Fig. 3a) il apparaît que les courbes obtenues sont qualitativement similaires. Toutefois la symétrie de la courbe à l'égard de γ , observé dans le cas de convection non-linéaire pur, est détruite par l'effet Soret. De plus, la valeur de γ , correspondant au nombre minimum de Nusselt, passe de $\gamma = 1$ à $\gamma = 1.15$ lorsque R_S varie de 0 à 1000. Cette tendance est inversée pour les valeurs négatives de R_S comme indiqué par la courbe obtenue pour $R_S = -1000$, pour laquelle le transfert de chaleur minimum se produit alors à $\gamma = 0.85$. La perte de symétrie de la courbe du nombre de Nusselt en fonction du paramètre d'inversion γ , a été rapportée aussi dans le passé par Vasseur et al. [9], dans le cas de la convection naturelle dans un espace annulaire horizontale cylindrique. Toutefois, la perte de la symétrie dans ce cas était une conséquence de la géométrie de l'enceinte. La figure 3b montre les résultats obtenus sur R_S variant de 1000 à 1500. La forme de la courbe résultante est complètement différente de celle obtenue dans la Fig. 3a. Ainsi, lorsque γ , augmente de 0 à 1, on remarque que le nombre de Nusselt diminue fortement. Entre $\gamma = 1$ et 1.45 la diminution du nombre de Nusselt est assez faible et l'écoulement est caractérisé par l'apparition d'une petite cellule secondaire de convection antihoraire située près du coin en bas à droite de la cavité. Cette cellule augmente brusquement en taille et en intensité à $\gamma = 1.46$ (voir les détails dans la Fig. 3b). En

augmentant encore la valeur de γ les résultats indiquent que la cellule de circulation en sens antihoraire ne cesse de croître en taille et en intensité.

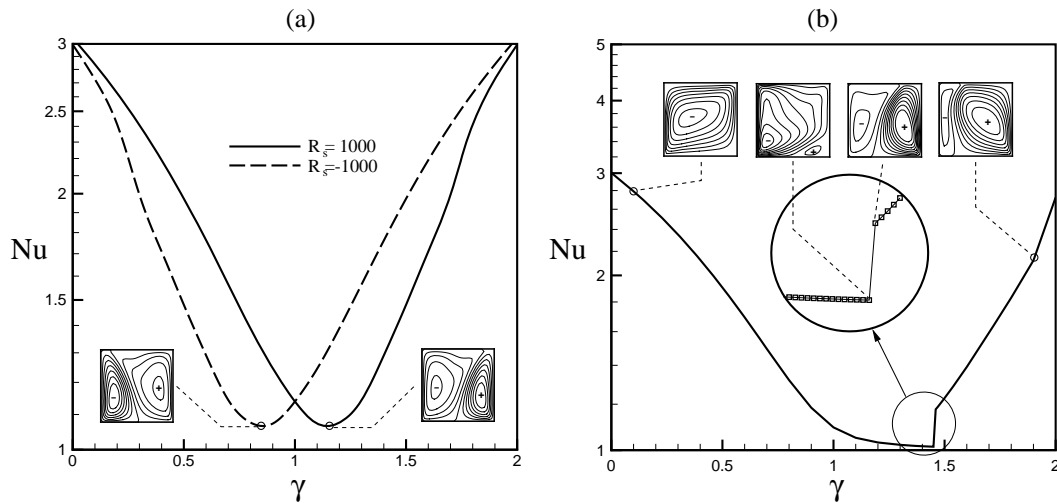


Figure 3 : Nombre de Nusselt en fonction du paramètre γ pour $R_T = 10^2$, $Le = 10$, $a = 1$:

a) $R_S = 10^3$ et -10^3 , b) $R_S = 1.5 \times 10^3$

La figure 4a) montre l'impact du nombre de Rayleigh solutal R_S sur le nombre de Nusselt pour différentes valeurs du nombre de Rayleigh thermique R_T avec $\gamma = 1$. Pour ce cas particulier, en l'absence d'effets solutaux ($R_S = 0$) un écoulement bi-cellulaire, avec deux cellules contra-rotatives, de taille et d'intensité égale est obtenu. Le transfert de chaleur est alors minimum. Cela est dû au fait que le transfert de chaleur entre la paroi (chauffée) gauche et la paroi (refroidie) droite ne résulte pas du mouvement de convection du fluide entre les deux parois thermiquement active comme dans le cas d'un fluide linéaire pour lequel une cellule unique prévaut dans la cavité. Au contraire, le transfert de chaleur, à travers la ligne verticale passant par le centre géométrique de la cavité, se fait par conduction pure, réduisant ainsi considérablement le nombre de Nusselt. À première vue, la figure. 4a indique que les courbes obtenues pour $R_S > 0$ sont les images inverses de celles obtenues pour $R_S < 0$, et ce pour toutes les valeurs de la R_T considérés ici. Cela découle de la valeur particulière $\gamma = 1$ considérée, ainsi que de la symétrie de l'équation d'état (1). En augmentant (ou diminuant) la valeur de la R_S il est observé que, indépendamment de la valeur de R_T , le nombre de Nusselt augmente d'abord. Ce résultat peut être compris en examinant les champs d'écoulement, d'isotherme et d'isoconcentration de la fig. 4b), obtenu aux positions (1)-(3), indiquées dans la Fig. 4a). Ainsi, lorsque la valeur de R_S augmente de 0 à 1000 on remarque que l'effet Soret favorise considérablement la taille et l'intensité de la cellule tournant dans le sens horaire, tandis que celle qui tourne dans le sens antihoraire est réduite. Le nombre de Nusselt est ainsi renforcé par la cellule de convection dans le sens horaire apportant du fluide chaud de la paroi verticale gauche à la paroi verticale froide. Toutefois, une nouvelle augmentation de R_S modifie considérablement le champ de concentration, figure 4b) (3). Une stratification verticale stable est alors induite, inhibant l'intensité de l'écoulement dans la cavité. Le transfert de chaleur est ainsi réduit.

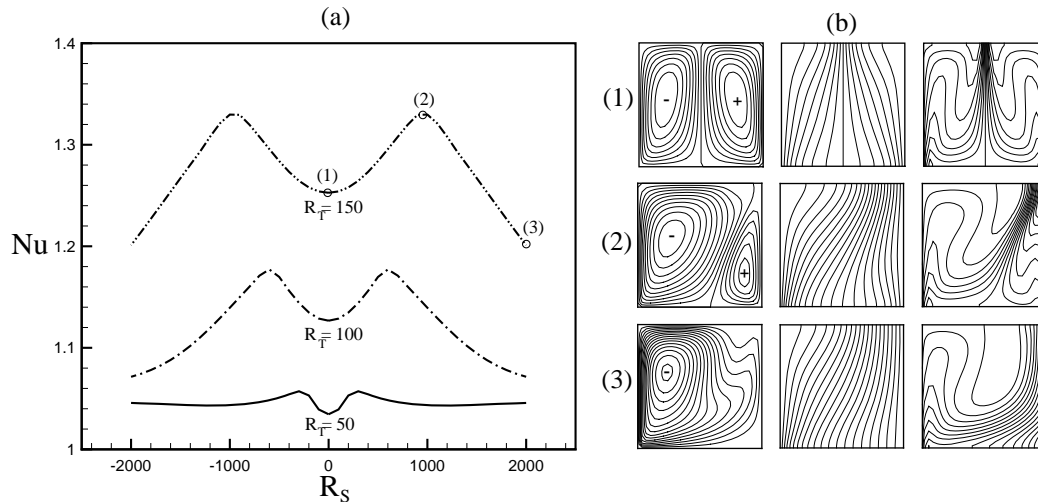


Figure 4 : a) Nombre de Nusselt en fonction du nombre de Rayleigh solutal pour différentes valeurs de R_T pour $\gamma = 1$; b) lignes de fonction de courant (gauche), température (milieu) et concentration (droite) aux positions (1)-(3)

5. Conclusion

En l'absence d'effet Soret ($R_S=0$, $a=0$), il est bien connu que l'écoulement et les champs de températures et de concentrations sont symétriques lorsque $\gamma = 1$ pour lequel la température des parois latérales sont à distance égale de la ligne du maximum de densité. Pour cette valeur particulière de γ , dénommé inversion parfaite, le nombre de Nusselt est au minimum. Lorsque les effets Soret sont pris en considération cette symétrie n'existe plus. En outre, pour ces conditions, le nombre minimum de Nusselt ne se produit pas à $\gamma = 1$, mais a une valeur au-dessus ou en dessous de l'unité, cette valeur dépendant du nombre de Rayleigh solutal R_S . Naturellement, pour cette situation, la symétrie de l'écoulement n'est plus retrouvée.

Références

- [1] D.A. Nield and A. Bejan, *Convection in porous media*, Springer, 1999.
- [2] A. Bejan, *Convection Heat transfer*, Springer, 1995.
- [3] W. Zheng L., Robillard, and P. Vasseur, "Convection in a Square Cavity filled with an Anisotropic Porous Medium Saturated with Water Near 4C", *Int. J. Heat Mass Transfer* 44, 3463-3470 (2001).
- [4] S. Sivasankaran and P. Kandaswamy, "Double Diffusive Convection of Anomalous Fluids in a Porous Cavity", *Transp. Porous Med.* 71, 133-145 (2008).
- [5] Alloui, Z., Bennacer, R., Beji, H. and Vasseur, P. "Variable Permeability Effect on Convection in Binary Mixtures in a Porous Medium", *Heat Mass transfer*, Vol. 45, 8, pp. 1117-1127, (2009).
- [6] Antar, B.N., "Penetrative double-diffusive convection". *Phys. Fluids* 30, 322-330 (1987).
- [7] Goyeau, B., Songbe, J.-P., Gobin, D., "Numerical study of double-diffusive natural convection in a porous cavity using the Darcy-Brinkman formulation". *Int. J. Heat Mass Transfer* 39, 1363-1378 (1996).
- [8] Zheng, W., Robillard, L., Vasseur, P., "Convection in a square cavity filled with an anisotropic porous medium saturated with water near 4C". *Int. J. Heat Mass Transfer* 44, 3463-3470 (2001).
- [9] Vasseur, P., Robillard, L., "Natural convection heat transfer of water within a horizontal cylindrical annulus with density inversion effect". *J. Heat Transfer* 105, 117-123 (1983).