

# Prédiction numérique du transfert de chaleur par convection naturelle dans une cavité carrée, partitionnée et différentiellement chauffée.

Mohammed Amine MOUSSAOUI <sup>1\*</sup>, Ahmed MEZRHAB <sup>1</sup>, Hassan NAJI <sup>2</sup>, M'hammed Bouzidi <sup>3</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Mécanique & Energétique Faculté des sciences, Département de physique 60000 Oujda, Maroc.

<sup>2</sup> Université Lille 1 - Sciences et Technologies/Polytech'Lille LML UMR CNRS 8107, F-59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France.

<sup>3</sup> Université Clermont 2, LaMI EA 3867, IUT de Montluçon, Av. A. Briand, BP 2235, F-03101 Montluçon cedex, France.

\* auteur correspondant : [mouamine1@yahoo.fr](mailto:mouamine1@yahoo.fr)

**Résumé** - Dans cette étude, nous présentons une modélisation numérique du transfert de chaleur dans une cavité carrée différentiellement chauffée, formée par deux parois horizontales adiabatiques et deux parois verticales isothermes. Deux partitions verticales sont insérées parallèlement aux parois isothermes. Une partition est attachée à la paroi adiabatique haute tandis que l'autre est attachée à la paroi adiabatique basse. Les champs thermique et dynamique sont obtenus à l'aide de la méthode de Boltzmann sur réseau à temps de relaxation multiple. Le fluide caloporteur considéré ici est l'air. On s'intéresse à l'influence du nombre de Rayleigh, de la hauteur des partitions et leurs positions sur le transfert de la chaleur et la structuration de l'écoulement.

## Nomenclature

$g$	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$	$x, y$	coordonnées cartésiennes
$H$	hauteur de la cavité, $m$	<i>Symboles grecs</i>	
$l_p$	hauteur des partitions	$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
$Nu$	nombre de Nusselt moyen, $-1/\Delta T \int_0^H (\partial T/\partial x) dy$	$\beta$	constante de Boussinesq, $k^{-1}$
$Pr$	nombre de Prandtl, $= \nu/\alpha$	$\nu$	viscosité cinématique du fluide, $m^2.s^{-1}$
$Ra$	nombre de Rayleigh, $= g\beta(T_h - T_c)H^3/\nu\alpha$	$\theta$	température adimensionnelle, $(T-T_0)/(T_c-T_f)$
$s_p$	position des partitions	<i>Indices</i>	
$T$	température, $K$	$c$	chaud
$T_0$	température moyenne, $(T_c + T_f)/2$	$f$	froid
$u, v$	composantes de la vitesse, $m.s^{-1}$		

## 1. Introduction

Le concept de la convection naturelle dans une cavité partitionnée a été largement utilisé comme prototype de recherches dans de nombreuses applications industrielles comme les collecteurs solaires, le refroidissement électronique, le bâtiment, le génie nucléaire, chauffage et ventilation, etc. Selon le type d'application, les partitions peuvent être attachées aux parois horizontales ou verticales [1-5]; toutefois la cavité carrée différentiellement chauffée incluant des partitions attachées aux parois horizontales est peut être la configuration qui a moins attiré l'attention de la communauté.

Dans cet article, nous étudions par simulation numérique, l'influence des partitions sur la structuration de l'écoulement et sur l'échange thermique dans la cavité. La méthode de Boltzmann sur réseau avec plusieurs temps de relaxation (*MRT-LBM*) couplée avec la

méthode des différences finies (DF) est ici adoptée comme stratégie numérique. Cette approche a été proposée par Lallemand et Luo [6] et par Mezrhab et al. [7] et elle est maintenant très utilisée [8-11]. Son principe consiste en l'obtention du champ des vitesses par la méthode de Boltzmann sur réseau et la température par la méthode des différences finies. Le choix de ce couplage numérique est dicté pour des raisons de stabilité numérique, par sa simplicité de programmation et par le gain en temps de calcul.

## 2. Description du problème et méthode numérique

Le problème physique considéré dans cette étude est celui d'un écoulement incompressible, laminaire et bidimensionnel dans une cavité carrée partitionnée verticalement, de hauteur  $H$  et dont les parois horizontales sont adiabatiques et les parois verticales sont portées et maintenues à des températures chaudes et froides (voir *figure 1*). Les deux partitions de hauteur  $l_p$  et une épaisseur très fine, sont insérées sur les parois adiabatiques de la cavité à une distance  $s_p$ . Le gradient horizontal de température induit la mise en mouvement du fluide et la formation d'un écoulement dans la cavité. Le fluide caloporteur considéré dans cette étude est l'air (nombre de Prandtl  $Pr = 0,71$ ). Ses propriétés physiques, à l'exception de sa densité, sont supposées constantes.

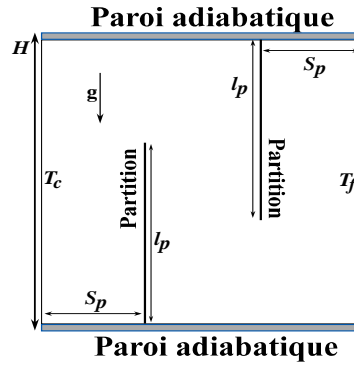


Figure 1: Configuration étudiée

### 2.1. Méthode de Boltzmann sur réseau

Vu le caractère bidimensionnel du problème, nous avons considéré un modèle à neuf vitesses discrètes appelé modèle  $D2Q9$  sur une grille carrée de pas  $\delta x = \delta y = 1$  (voir *figure 2*). Les particules fluides se déplacent d'un noeud de la grille vers un noeud voisin avec des vitesses discrètes qui sont données par:

$$e_i = \begin{cases} (0,0), & i = 0 \\ (\cos[(i-1)\pi/2], \sin[(i-1)\pi/2])c, & i = 1-4 \\ (\cos[(2i-9)\pi/4], \sin[(2i-9)\pi/4])\sqrt{2}c, & i = 5-8 \end{cases} \quad (1)$$

où  $c = \delta x / \delta t$ , avec le pas de temps  $\delta t = 1$ .

L'équation d'évolution temporelle de l'état du fluide est donnée par:

$$f_i(x + e_i, t + 1) = f_i(x, t) + \Omega f_i(x, t), \quad i = 0, 1, \dots, 8 \quad (2)$$

où  $f_i$  est la fonction de distribution d'une particule et  $\Omega$  est l'opérateur de collision représentant la variation de la fonction de distribution due aux collisions particulières. La linéarisation de cet opérateur autour de la fonction de distribution à l'équilibre local  $f_i^{eq}$  apporte une simplification importante de la méthode  $LBM$ .

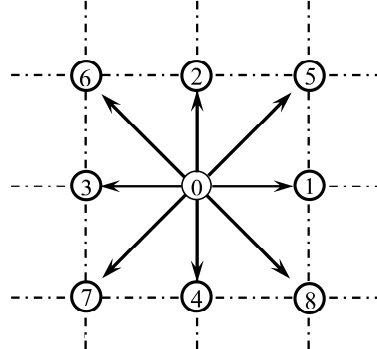


Figure 2: Modèle D2Q9.

A chaque nœud du domaine, on calcule un ensemble de neuf moments associés aux neuf fonctions de distribution et qui sont liées par la transformation linéaire [7]

$$m = Mf \quad (3)$$

où la matrice  $M$  d'ordre 9 est donnée dans [7]. Il importe de noter que durant l'étape de collision qui est locale en espace, trois moments sont conservés (la densité et la quantité de mouvement). Les autres moments, non conservés, sont calculés à partir d'une simple équation de relaxation linéaire vers les valeurs d'équilibre qui dépendent des quantités conservées:

$$m_k^c = m_k + s_k (m_k^{eq} - m_k), \quad k = 3, 5, \dots, 8 \quad (4)$$

où  $s_k = \Delta t / \tau_k$  est le taux de relaxation,  $m_k^c$  est le moment après collision et  $m_k^{eq}$  représente le moment à l'équilibre.

Les nouvelles fonctions de distribution  $f^c$  sont calculées à partir des nouveaux moments  $m^c$ :

$$f^c = M^{-1} m^c \quad (5)$$

Macroscopiquement, la densité de masse et le vecteur vitesse sont donnés par:

$$\rho(x, t) = \sum_i f_i(x, t) \quad (6)$$

$$\vec{u}(x, t) = \sum_i f_i(x, t) e_i / \rho(x, t) \quad (7)$$

Sur les parois de la cavité, des conditions aux limites de type "bounce-back" sont utilisées pour les vitesses. Ces conditions permettent d'avoir les vitesses nulles à l'interface fluide parois solide. A l'interface partition-fluide, on applique la méthode de "bounce-back" avec une interpolation quadratique [13].

L'équation d'énergie est discrétisée par une méthode de différences finies avec des schémas décentré en avant pour le temps et centré pour l'espace [7].

### 3. Résultats et discussion

Dans cette étude, le calcul est effectué pour des nombres de Rayleigh allant de  $10^4$  à  $10^6$ , pour différentes positions ( $0.2H \leq s_p \leq 0.8H$ ) et différentes hauteurs des partitions ( $0.2H \leq l_p \leq 0.8H$ ). Par ailleurs, le code numérique a été validé dans nos précédents travaux [7, 10, 11, 12]. En tenant compte du temps de calcul et de la précision des résultats, nous avons choisi un maillage uniforme de  $161 \times 161$  points.

#### 3.1 Effet de la position des partitions

La figure 3 montre l'allure des lignes de courant et des isothermes pour un nombre de Rayleigh fixé à  $Ra = 10^5$ , une hauteur des partitions à  $l_p = 0,6H$  et pour différentes positions des partitions comprises entre  $0,2H$  et  $0,8H$ . La valeur de la fonction de courant maximale absolue pour chaque cas est également présentée dans cette figure. Il faut noter que, quelle que soit la position et la hauteur de la partition, les champs de température et de l'écoulement sont considérablement modifiés et différent donc de ceux observés dans le cas de la cavité sans obstacle pour la même valeur du nombre de Rayleigh.

Sur cette figure, l'écoulement peut être divisé en deux catégories: un écoulement monocellulaire ( $s_p = 0,2H$  et  $0,8H$ ) montrant une zone tourbillonnaire importante dans le sens horaire étranglée par les partitions, et un écoulement bicellulaire ( $s_p = 0,4H$  et  $0,6H$ ) exhibant deux structures tourbillonnaires. Les deux partitions créent des phénomènes de piégeage du fluide dans la cavité. Il faut noter que l'augmentation de la position des partitions entraîne une augmentation de la fonction de courant maximale et notamment pour les grandes valeurs du paramètre  $s_p$  ( $s_p = 0,6H$  et  $0,8H$ ).

Il est clair que l'allure des isothermes est très influencée par la variation de la position des partitions (cf. figure 3(a)). En effet, les isothermes sont presque parallèles aux parois verticales de la cavité au niveau des coins hauts à droite et bas à gauche alors qu'elles sont presque horizontales entre les deux partitions. L'augmentation de la position  $s_p$  provoque une inclinaison des isothermes entre les partitions pour devenir quasiment verticales pour le cas où  $s_p = 0,6H$ . Lorsque  $s_p = 0,8H$ , les deux partitions s'éloignent en provoquant le resserrement des isothermes sur les cotés haut à droite et bas à gauche au voisinage des parois de la cavité.

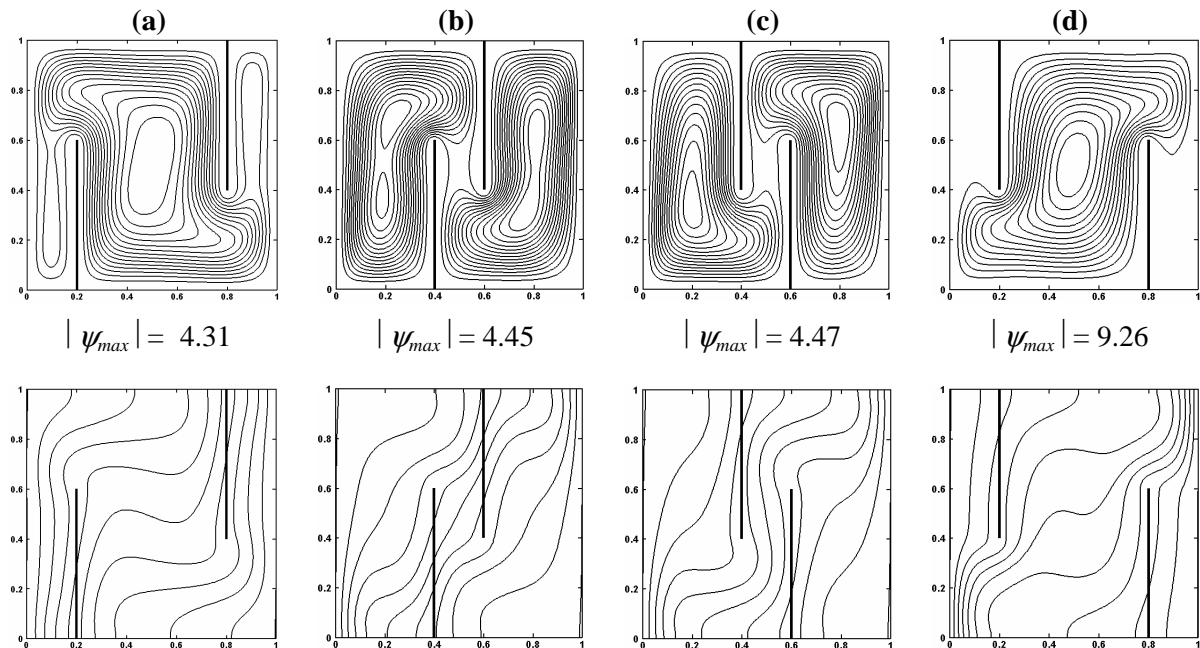


Figure 3 : Lignes de courant et isothermes pour  $Ra = 10^5$  et  $l_p = 0,6H$ ;  
a)  $s_p = 0,2H$ , b)  $s_p = 0,4H$ , c)  $s_p = 0,6H$ , d)  $s_p = 0,8H$

### 3.2 Effet de la hauteur des partitions

L'effet de la hauteur des partitions,  $l_p$ , sur la structure de l'écoulement et sur la distribution de la température est présenté sur la figure 4 pour  $Ra = 10^5$  et  $s_p = 0,4H$ . Pour  $l_p = 0,2H$ , la présence des partitions n'affecte aucunement la structure de l'écoulement unicellulaire typique pour une cavité non partitionnée. Ainsi, son effet est limité à la réduction du débit du fluide le long des parois adiabatiques. L'augmentation de la hauteur des partitions induit une brisure de

la structure unicellulaire pour former deux cellules de part et d'autre des partitions avec diminution de la fonction de courant maximale au fur et à mesure que la hauteur des partitions augmente. Concernant les isothermes, elles sont denses au voisinage de la partie supérieure de la paroi froide et celle inférieure de la paroi chaude. Au milieu de la cavité, une stratification de la température est observée. Cette dernière se brise avec l'augmentation de la hauteur des partitions et les isothermes deviennent obliques.

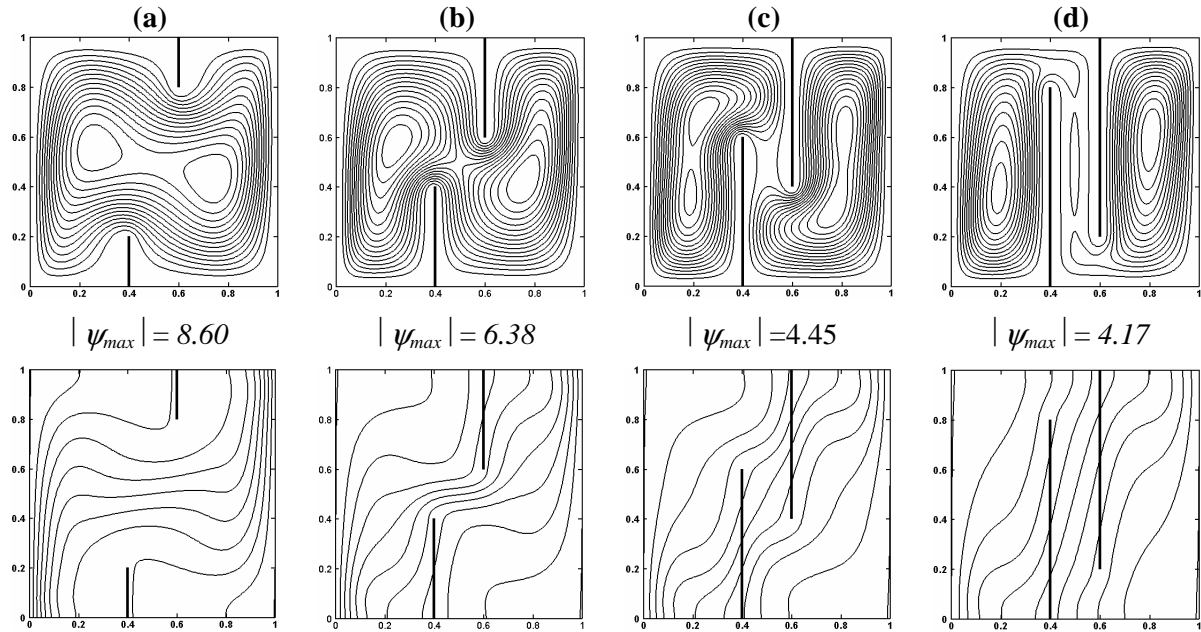


Figure 4: Lignes de courant et isothermes pour  $Ra = 10^5$  et  $s_p = 0,6H$ ;  
a)  $l_p = 0,2H$ , b)  $l_p = 0,4H$ , c)  $l_p = 0,6H$ , d)  $l_p = 0,8H$

### 3.3 Nombre de Nusselt moyen

La figure 5 montre l'évolution du nombre de Nusselt moyen pour  $s_p = 0,2 H$  et pour différentes hauteurs des partitions et des nombres de Rayleigh variant de  $10^4$  à  $10^6$ . On constate que ce nombre augmente rapidement avec le nombre de Rayleigh  $Ra$ , à cause des effets de la convection naturelle qui deviennent de plus en plus significatifs à grandes valeurs de  $Ra$ . L'examen de cette figure montre que la valeur  $l_p = 0,8H$  est associée aux valeurs minimales de Nusselt pour chaque nombre de Rayleigh. Il faut bien noter que cette hauteur présente une réduction maximale du nombre de Nusselt pour  $Ra = 10^6$  de l'ordre de 66,5 %. Ceci est confirmé sur la figure 6 où nous présentons l'évolution du nombre de Nusselt moyen en fonction de la position des partitions pour  $Ra = 10^6$  et pour différentes hauteurs des partitions. Le nombre de Nusselt minimal correspond toujours à  $l_p = 0,8H$  et ceci pour toute position  $s_p$ . Aussi, on constate que les valeurs  $l_p = 0,8H$  et  $s_p = 0,2 H$  produisent une réduction maximale du nombre de Nusselt.

## 4. Conclusion

L'effet de la présence de deux partitions attachées aux parois adiabatiques d'une cavité carrée différentiellement chauffée sur l'écoulement et sur le transfert thermique a été examiné par voie numérique. Pour cela, un schéma hybride basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau et sur la méthode des différences finies pour déterminer les champs de vitesses et de température est utilisé. Les résultats obtenus montrent que les isothermes et les lignes de courant sont fortement affectées par la variation du nombre de Rayleigh, des hauteurs et des

positions des partitions. Ils montrent également que le nombre de Nusselt moyen augmente avec le nombre de Rayleigh et diminue avec l'augmentation de la hauteur des partitions.

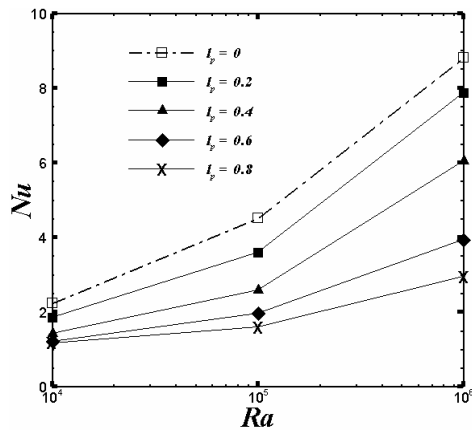


Figure 5 : Nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Rayleigh Pour  $s_p = 0,2 H$

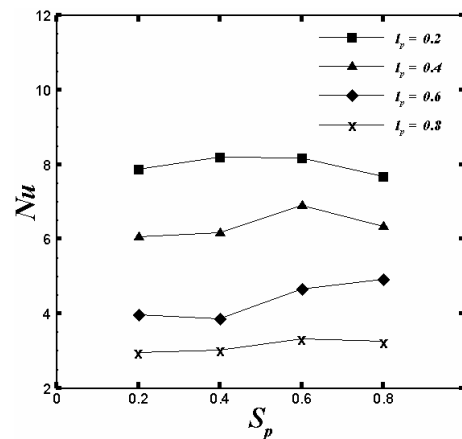


Figure 6 : Nombre de Nusselt moyen en fonction de la distance  $s_p$  pour  $Ra=10^6$

## Références

- [1] A. Mezrhab, M. Jami, C. Abid, M. Bouzidi, P. Lallemand, Lattice-Boltzmann modelling of natural convection in an inclined square enclosure with partitions attached to its cold wall, *International Journal of Heat and Fluid flow* (2005).
- [2] K. Hanjalic, S. Kenjeres, F. Durst, Natural convection in partitioned two-dimensional enclosures at higher Rayleigh numbers, *International journal of heat and mass transfer*, 39-7 (1996) 1407-1427.
- [3] Y. Yamaguchi, Y. Asako, Effect of partition wall on natural convection heat transfer in a vertical air layer, *Journal of heat transfer*, 123-3 (2001) 441-449.
- [4] R. Jetli, S. Acharya, E. Zimmerman, Influence of baffle location on natural convection in a partially divided enclosure, 10-5 (1987) 521-536.
- [5] E. Bilgen, Natural convection in enclosures with partial partitions, *Renewable energy*, 26-2 (2002) 257-270.
- [6] P. Lallemand, L.-S. Luo, Hybrid finite-difference thermal lattice Boltzmann equation, *Int. J. Modern Physics B*, 17-1/2 (2003), 41-47.
- [7] A. Mezrhab, M. Bouzidi, P. Lallemand, Hybrid lattice Boltzmann finite-difference simulation of convective flows, *Computer and Fluids* 33 (2004) 623-641.
- [8] P.V. Leemput, C. Vandekerckhove, W. Vanroose, D. Roose, Accuracy of hybrid lattice Boltzmann/finite difference schemes for reaction-diffusion systems, *Multiscale Model. Simul.*, 6-3 (2007) 838-857.
- [9] C. V. Treack, E. Rank, M. Krafczyk, J. Tolke, B. Nachtwey, Extension of a hybrid thermal LBE scheme for large-eddy simulations of turbulent convective flows, *Computers & Fluids*, 35 (2006) 863-871.
- [10] M. Jami, A. Mezrhab, M. Bouzidi, P. Lallemand, Lattice-Boltzmann computation of natural convection in a partitioned enclosure with inclined partitions attached to its hot wall. *Physica A*, 368-2 (2006) 481-494.
- [11] M.A. Moussaoui, M. Jami, A. Mezrhab, H. Naji, Numerical Investigation of Forced Convection and Fluid Flow Past an Inclined Square Cylinder Placed in a Horizontal Channel Using Lattice Boltzmann Method, *International Journal of Thermal Sciences*, 49-1 (2010) 131-142.
- [12] M.A. Moussaoui, M. Jami, A. Mezrhab, H. Naji, M. Bouzidi, Multi-relaxation-time lattice Boltzmann computation of channel flow past a square cylinder with an upstream control bi-partition, *International Journal for Numerical Methods in Fluids* (2009), doi:10.1002/flid.2159.
- [13] M. Bouzidi, M. Firdaouss, P. Lallemand, Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries, *Phys. Fluids*, 13 (2001) 3452-9.