

Effet d'un champ magnétique externe sur la convection naturelle avec et sans source de chaleur dans une enceinte carrée

Farid BERRAHIL ^{1*}, Smail BENISSAAD ²

¹Département de Génie Mécanique, Faculté des Sciences et de la Technologie, Université de Jijel

²Laboratoire d'Energétique Appliquée et de Pollution, Département de Génie Mécanique, Université Mentouri – Constantine

* (auteur correspondant : f_berrahil2002@yahoo.fr)

Résumé - Dans ce travail, nous proposons une étude numérique de la convection naturelle dans une cavité carrée latéralement chauffée remplie d'un fluide conducteur d'électricité, en présence d'un champ magnétique et une source de chaleur. La méthode des volumes finis est utilisée pour la résolution du système d'équations qui régissent l'écoulement MHD. L'influence du chauffage volumétrique, sur la structure de l'écoulement et sur le transfert thermique au sein de la cavité, a été examinée. Deux orientations du champ magnétique ont été considérées dans le but d'avoir le meilleur contrôle de l'écoulement.

Nomenclature

A	rapport d'aspect = L/H	U, V	vitesse adimensionnelles horizontale et verticale
B	vecteur du champ magnétique, T	V	vecteur de vitesse, m
B_0	intensité du champ magnétique, T	X, Y	coordonnées adimensionnelles
F	forces électromagnétiques, $N.m^{-3}$	<i>Symboles grecs</i>	
g	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$	ψ	fonction de courant
Gr	nombre de Grashof = $g\beta(T_H - T_C) H^3 / \nu^2$	α	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
H	hauteur de la cavité, m	β	angle d'orientation du champ magnétique
Ha	nombre de Hartmann = $B_0 H \sqrt{\sigma / \rho \nu}$	β	coefficient d'expansion thermique, K^{-1}
L	longueur de la cavité, m	ϕ	potentiel électrique, V
J	vecteur de densité du courant électrique, $A.m^{-2}$	ρ	masse volumique, $kg.m^{-3}$
$\overline{Nu} _{x=0, A}$	nombre de Nusselt moyen = $\int_0^1 (-\partial T / \partial X) dY$	σ	conductivité électrique, $\Omega^{-1}.m^{-1}$
Pr	nombre de Prandtl = ν / α	ν	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
S	rapport des nombres de Rayleigh interne et externe = Ra_I / Ra_E	τ	temps adimensionnel
S_Q	paramètre de la source de chaleur interne = $QH^2 / \nu \rho C_p (T_H - T_C)$	$\Delta\tau$	incrément adimensionnel de temps
T	température adimensionnelle	<i>Indices et exposants</i>	
T^*	température dimensionnelle, K	C	froid
		Cr	critique
		EM	électromagnétique
		H	chaud
		X, Y	références aux directions horizontale et vertical

1. Introduction

Ces dernières années, des études ont été menées sur les écoulements de la convection naturelle des fluides à faibles nombres de Prandtl en présence du champ magnétique. Ces écoulements dans les milieux confinés ont un intérêt immense dans plusieurs applications industrielles. Parmi ces applications, la conception des équipements thermiques pour le refroidissement et la régénération efficaces du lithium liquide ($Pr = 0.0321$) dans les réacteurs de plasma de type Tokamak [1] et la production des cristaux de bonne qualité [2].

L'étude de l'écoulement MHD a fait l'objet de plusieurs travaux. Le seuil de l'instabilité oscillatoire de l'écoulement de la convection naturelle dans une cavité rectangulaire ($A = 4$) d'un fluide à faible nombre de Prandtl ($Pr = 0.015$) sous l'action d'un champ magnétique uniforme externe a fait l'objet d'une étude réalisée par Gelfgat *et al.* [3]. Ils ont constaté qu'un champ magnétique vertical fournit l'effet le plus fort de stabilisation. Dans d'autres investigations, Sarris *et al.* [4] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité carrée latéralement chauffée remplie du lithium liquide, en présence d'un champ magnétique horizontale et une source de chaleur. Deux principaux paramètres pour ce problème sont le nombre de Rayleigh externe, Ra_E , qui représente l'effet dû au gradient température des parois latérales, et le nombre de Rayleigh interne, Ra_I , qui représente la force de génération de la source. Ils ont trouvé que lorsque le rapport S augmente, l'écoulement devient oscillatoire. Cette augmentation de S donne une transition de l'état stable à un état instable, mais, ils ont trouvé que l'écoulement instable devient stable pour quelques cas. Le même problème a été repris par Nikos *et al.* [5] afin d'examiner la stabilité de l'écoulement. Les diagrammes de stabilité sont donnés pour différentes valeurs de Ha , Gr et S_Q . Ils ont conclu que lorsque le paramètre source S_Q croît l'écoulement devient instable, tandis que, l'augmentation de l'intensité du champ magnétique stabilise le système. Le but de ce travail, est d'étudier numériquement la convection naturelle MHD avec la génération d'une source de chaleur volumétrique dans une enceinte carrée.

2. Géométrie et modèle mathématique

La géométrie étudiée est une cavité carrée ($A=1$) remplie complètement du lithium liquide avec la présence d'une source de chaleur volumétrique. Les parois verticales sont chauffées différentiellement ($T_H > T_C$) par contre les parois horizontales sont adiabatiques. L'écoulement de la convection naturelle, qui se développe dans l'enceinte est exposé à un champ magnétique extérieur et uniforme d'intensité B_0 orienté d'un angle α par rapport à l'axe x (Fig. 1).

A fin de simplifier la formulation mathématique de notre problème, nous adapterons les hypothèses simplificatrices suivantes : l'écoulement est laminaire et bidimensionnel, les propriétés physiques du fluide sont supposées constantes, la dissipation de chaleur visqueuse est négligeable, l'approximation de Boussinesq est valable, l'effet Joule [3] et le champ magnétique induit sont négligeables et le métal liquide est non magnétisé.

Dans le cas de l'application du champ magnétique sur l'écoulement et en supposant que les frontières sont isolées électriquement, les composantes de la force de Lorentz \vec{F} sont déduites de l'équation suivante [3] :

$$\vec{F} = \sigma [\vec{V} \times \vec{B}] \times \vec{B} \quad (1)$$

Les équations de continuité, de quantité de mouvement et d'énergie adimensionnelles, qui gouvernent notre problème sont obtenues en utilisant les grandeurs de référence H^2/ν , H , ν/H , $\rho(\nu/H)^2$ pour le temps, la longueur, la vitesse, la pression, respectivement, $T = (T^* - T_C)/(T_H - T_C)$ pour la température adimensionnelle et $B = B_0$ pour le champ magnétique. Donc notre système d'équations adimensionnelles s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = - \frac{\partial P}{\partial X} + \left[\frac{\partial U^2}{\partial X^2} + \frac{\partial U^2}{\partial Y^2} \right] + F_{EMX} \quad (3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial P}{\partial Y} + \left[\frac{\partial V^2}{\partial X^2} + \frac{\partial V^2}{\partial Y^2} \right] + Gr T + F_{EMX} \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + U \frac{\partial T}{\partial X} + V \frac{\partial T}{\partial Y} = \frac{1}{Pr} \left[\frac{\partial T^2}{\partial X^2} + \frac{\partial T^2}{\partial Y^2} \right] + S_Q \quad (5)$$

Où : F_{EMX} , F_{EMY} représentent, respectivement, les forces de Lorenz adimensionnelles suivant les directions x et y . Leurs expressions s'écrivent comme suit :

$$\begin{aligned} F_{EMX} &= Ha^2 \left[V \sin \alpha \cos \alpha - U \sin \alpha^2 \right] \\ F_{EMY} &= Ha^2 \left[U \sin \alpha \cos \alpha - V \cos \alpha^2 \right] \end{aligned} \quad (6)$$

Le système d'équations est résolu avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\text{À } \tau = 0, \quad U = V = T = 0 ;$$

$$\begin{aligned} \text{Pour } \tau > 0, \text{ on a :} \quad & \text{à } X = 0 : \quad U = V = 0, \quad T = 1 \\ & \text{à } X = A : \quad U = V = 0, \quad T = 0 \\ & \text{à } Y = 0 : \quad U = V = 0, \quad \partial T / \partial y = 0 \\ & \text{à } Y = 1 : \quad U = V = 0, \quad \partial T / \partial y = 0 \end{aligned}$$

3. Méthode numérique

Les équations avec les conditions aux limites et les conditions initiales de notre problème sont résolues avec la méthode des volumes finis [6]. Le couplage vitesse-pression est assuré par l'algorithme SIMPLER [6]. Ces équations sont discrétisées par des schémas spatio-temporels d'ordre 2. Les dérivées temporelles seront discrétisées en utilisant le schéma d'Euler retardé. Tous les termes convectifs, le terme de poussée thermique et les termes non linéaires seront approchés par la discrétisation d'Adams-Bashforth. La discrétisation temporelle des gradients de pression et des termes diffusifs est implicite. Le schéma des différences centrées a été utilisé pour la discrétisation spatiale. La convergence à l'état stationnaire est atteinte lorsque le bilan de conservation de masse et d'énergie est satisfait après chaque itération en vérifiant que la différence des vitesses de deux itérations consécutives soit négligeable. Pour la présente étude, le bilan thermique est vérifié lorsque :

$$\overline{Nu}_{x=0} + S_Q Pr A - \overline{Nu}_{x=A} \leq 10^{-4}$$

Dans le but de confirmer l'exactitude de la méthode numérique utilisée pour étudier notre problème, le code développé a été comparé avec succès aux études numériques investiguées par Gelfgat *et al.* [3] et Sarris *et al.* [4]. Les tests préliminaires concernant l'influence du maillage nous ont permis de retenir un maillage uniforme de 72×72 comme un meilleur compromis entre l'exactitude des résultats et le temps d'exécution du programme.

4. Résultats et discussions

4.1. Effet de la génération de la source de chaleur

Pour examiner l'effet de l'augmentation du paramètre source sur la structure de l'écoulement, nous avons varié ce paramètre dans la gamme de 0 à 500. Cet effet peut être examiné en premier lieu à travers le tableau 1, des valeurs des paramètres caractérisant l'écoulement. Ainsi, l'augmentation de S_Q engendre une intensification de circulation de l'écoulement dans l'enceinte. D'après la fig. 2, qui présente les trajectoires de la fonction de courant pour $Gr = 10^6$, nous remarquons pour $S_Q = 0$ que l'écoulement est monocellulaire dans le sens horaire avec la présence de deux petites cellules secondaires qui se situent dans les

côtés opposés de la cavité en haut de la paroi chaude et en bas de la paroi froide. Lorsqu'on augmente le paramètre $S_Q=500$, l'écoulement devient bicellulaire. La deuxième cellule est localisée près de la paroi chauffée, où elle prend naissance à partir des deux cellules secondaires qui se trouvent en haut et en bas de cette paroi dans les coins de la cavité. Ces cellules secondaires prennent place d'une façon progressive lorsqu'on augmente S_Q jusqu'à la collision entre eux en formant une seule cellule qui comporte deux cellules contrarotatives.

Concernant le champ de température, il acquiert sa valeur maximale à la paroi verticale chaude dans le cas d'absence du chauffage volumétrique. On constate que la présence d'une source de chaleur interne augmente le taux de transfert de chaleur dans l'enceinte. La chaleur interne supplémentaire dans le fluide a tendance d'augmenter la température des couches liquides supérieures dans l'enceinte. Cet effet détermine également la forme des lignes profilées des isothermes et le champ thermique acquiert un maximum dans la région centrale haute de l'enceinte. La température du liquide dans la cavité devient plus grande que celle des parois latérales lorsqu'on augmente la génération de la source. L'augmentation de celle-ci entraîne une diminution du nombre de Nusselt près de la paroi chaude contrairement à la paroi froide (tableau 1). On constate que le nombre de Nusselt augmente avec l'augmentation de la source. Ce résultat est vérifié à partir de l'équilibre thermique dans l'enceinte ou le flux de chaleur généré par la source de chaleur reste constant, tandis que les flux de chaleur à travers les parois verticales varient selon la relation suivante :

$$\overline{Nu}_{x=0} + S_Q \Pr A = \overline{Nu}_{x=A}$$

4.2. Effet du champ magnétique

Pour déterminer l'effet de l'intensité et l'orientation du champ magnétique, sur la convection naturelle avec la présence d'une source de chaleur volumétrique uniforme, dans une cavité carrée, nous avons appliqué un champ magnétique externe uniforme et constant à l'enceinte considérée selon deux directions x et y . L'effet sur l'écoulement est illustré sur la fig. 3 qui représente les trajectoires de la fonction de courant et les isothermes pour $Gr = 10^5$, $Pr=0.0321$, $S_Q = 2000$ et pour des différentes valeurs du nombre de Hartmann $Ha = 0, 50$ et 100 . Sans champ magnétique ($Ha=0$), le régime de l'écoulement au sein de la cavité est multicellulaire. L'application du champ magnétique horizontale entraîne des changements notables sur la structure hydrodynamique et thermique de l'écoulement. Lorsqu'on augmente le nombre de Hartmann Ha , l'écoulement s'organise au fur et à mesure en formant deux cellules presque symétriques par rapport à $X=0.5$ et les lignes de courant se concentrent près des parois horizontales. Ce résultat est relié à l'effet de la force de Lorentz résultante $F_{EMY} = -Ha^2 V$ qui agit dans la direction vertical et dans le sens contraire de la force de flottabilité. Le même résultat est trouvé dans le cas quand le champ magnétique est vertical. Seulement, les lignes de courant à ce moment se concentrent près des parois verticales. Ceci est dû au fait que le champ magnétique vertical engendre une force de Lorentz horizontale $F_{EMX} = -Ha^2 U$. Cette force agit suivant la direction x dans le sens inverse de l'écoulement. On remarque pour le champ thermique, le redressement et l'alignement des isothermes près des parois verticales avec l'augmentation de Ha , mais dans le cœur de l'enceinte on trouve que ces isothermes sont distorsés à cause du chauffage volumétrique et le champ thermique devient symétrique par rapport à $X=0.5$. L'influence de champ magnétique sur le transfert thermique se manifeste par une décélération du taux de transfert de chaleur. La fig. 4 représente la variation du nombre de Nusselt moyen près des parois verticales en fonction de Ha pour $Gr = 10^5$, $S_Q=2000$ pour les deux cas où le champ magnétique est

horizontal ($\alpha=0$) et vertical ($\alpha=90^\circ$). En examinant cette figure, on constate l'efficacité du champ magnétique horizontal par rapport au champ vertical sur le taux du transfert thermique.

5. Conclusion

L'étude de la convection naturelle MHD avec la présence d'une source de chaleur volumétrique uniforme dans une cavité carrée différentiellement chauffée a permis de dégager les conclusions suivantes :

- La source de chaleur interne augmente l'intensité de la circulation de l'écoulement, favorise l'apparition du régime multicellulaire et augmente la température en haut du centre de la cavité.
- L'augmentation de la génération de la source interne conduit à une diminution du nombre de Nusselt près de la paroi chaude et son augmentation près de la paroi froide.
- Le champ magnétique a un effet plus important dans la direction horizontale que celle verticale, contrairement, à ce qui a été observé dans la convection naturelle sans l'existence de la source de chaleur interne.

Références

- [1] A. Kharicha, S. Molokov, S. Aleksandrova, & L. Bühler, Buoyant convection in the helium-cooled lithium lead blanket, in a strong uniform magnetic field, *FZKA 6959* (2004), Forschungszentrum Karlsruhe.
- [2] D. T. J. Hurle, *Crystal Growing from the Melt*, Springer (1993).
- [3] A.Y. Gelfgat, & P.Z. Bar-Yoseph, The effect of an external magnetic field on oscillatory instability of convective flows in a rectangular cavity, *Phys. Fluids*, 13 (8) (2001), 2269–2278.
- [4] I. E. Sarris, S. C. Kakarantzas, A. P. Grecos, & N. S. Vlachos, MHD natural convection in a laterally and volumetrically heated square cavity, *Inter. J. Heat and Mass Transfer*, 48 (2005), 3443–3453.
- [5] Nikos A. Pelekasis, Linear stability analysis and dynamic simulations of free convection in a differentially heated cavity in the presence of a horizontal magnetic field and a uniform heat source, *Physics of Fluids*, 18 (2006), 034101.
- [6] S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere, New York (1980).

Remerciements

Les auteurs tiennent également à remercier Abid Chérifa et Marc Medale pour les moyens et les ressources informatiques qu'ils ont mis à leur disposition au Laboratoire IUSTI, Marseille.

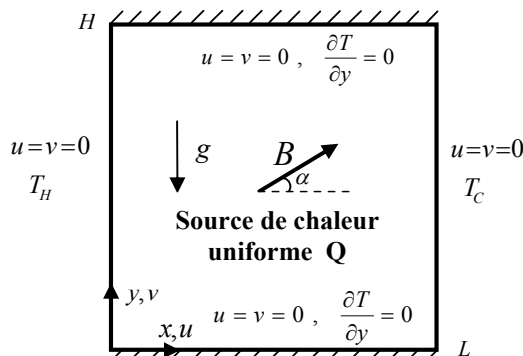


Figure 1 : Géométrie et conditions aux limites du problème

S_Q	U_{max}	V_{max}	$\overline{Nu}_{x=0}$	$\overline{Nu}_{x=L}$
0	852.048	852.872	2.717	2.717
50	883.459	869.719	1.925	3.530
100	914.781	889.901	1.153	4.363
500	1210.218	1311.581	-4.426	11.623

Tableau 1 : Effet de l'augmentation du paramètre source S_Q sur les caractéristiques de l'écoulement pour $Gr=10^6$

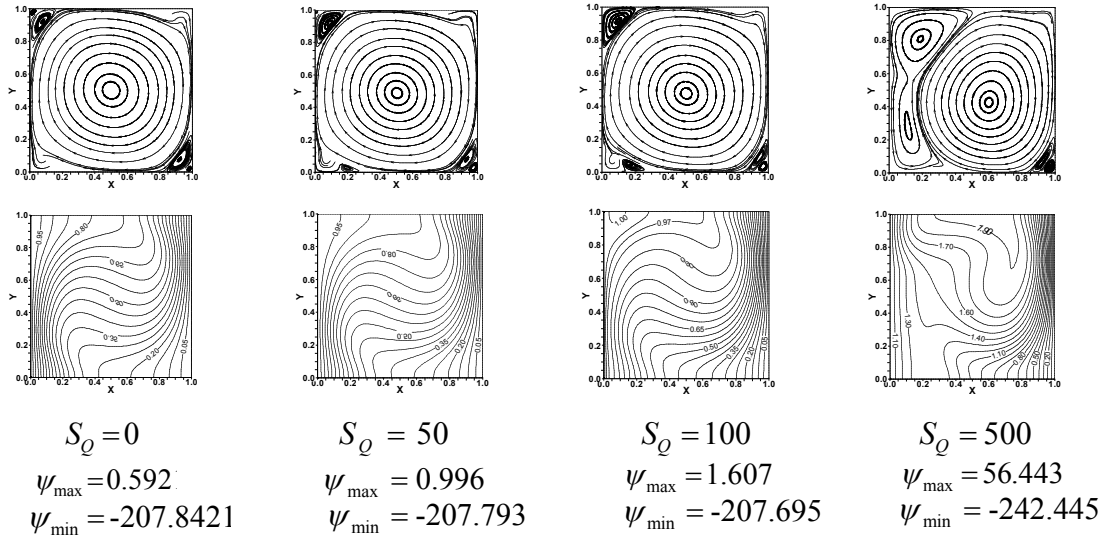


Figure 2 : Trajectoires des fonctions de courant et isothermes : $Gr = 10^6$; $Pr = 0.0321$ et $S_Q = 0, 50, 100$ et 500

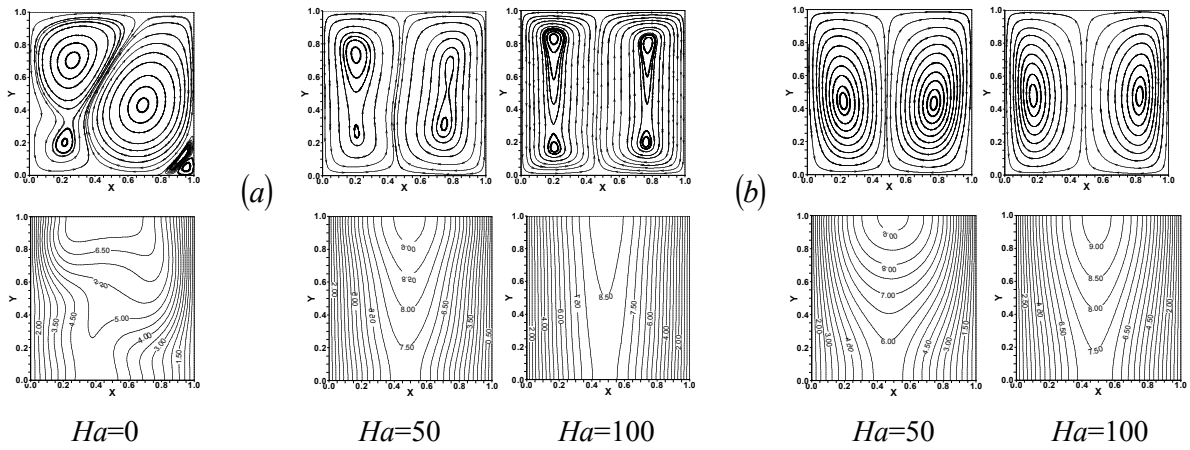
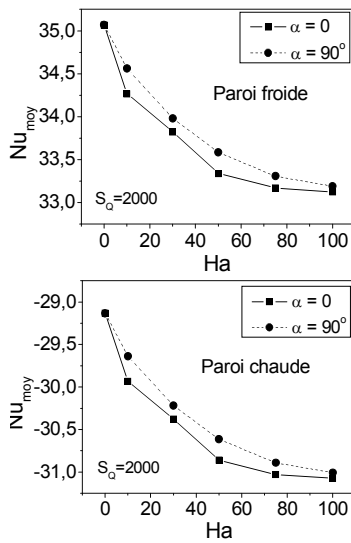


Figure 3 : Trajectoires des fonctions de courant et isothermes : $Gr = 10^5$; $Pr = 0.0321$; $S_Q = 2000$ et $Ha = 0, 50$ et 100 , (a) $\alpha = 0$; (b) $\alpha = 90^\circ$



Ha	U_{\max}	V_{\max}	ψ_{\max}	ψ_{\min}
0	657.651	871.946	94.886	-162.801
10 ($\alpha=0^\circ$)	506.886	730.610	86.339	-122.581
10 ($\alpha=90^\circ$)	570.605	805.367	90.777	-139.145
100 ($\alpha=0^\circ$)	60.810	49.062	4.443	-5.898
100 ($\alpha=90^\circ$)	94.709	235.224	22.081	-24.256

Tableau 2 : Effet du champ magnétique sur les caractéristiques de l'écoulement pour $Gr=10^5$ et $S_Q=2000$

Figure 4 : Variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Hartmann
 Ha : $Gr = 10^5$; $S_Q = 2000$