

# Convection mixte des fluides viscoélastiques en milieu poreux

Sílvia da Costa HIRATA\*, Najib OUARZAZI

Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR CNRS 8107 - Université Lille I, Bld. Paul Langevin 59655

Villeneuve d'Ascq cedex, France

\*(auteur correspondant : silvia.hirata@univ-lille1.fr)

**Résumé** - Le système étudié est constitué d'un massif poreux, chauffé par le bas et soumis à un écoulement horizontal d'un fluide viscoélastique. La loi de comportement adoptée pour décrire le comportement viscoélastique des solutions polymères diluées est du type Oldroyd-B. Lorsque le débit est nul, ce système est le siège d'instabilités stationnaires ou oscillatoires. Nous proposons une analyse temporelle de stabilité pour étudier l'influence combinée des propriétés viscoélastiques du fluide et de l'écoulement principal sur les caractéristiques linéaires de ces deux types d'instabilités. Nous montrons que la présence de l'écoulement moyen a un effet déstabilisant et qu'elle favorise l'émergence de rouleaux transversaux mobiles (R.T), parmi une infinité de modes tridimensionnels instables. La longueur d'onde, les fréquences d'oscillations et le seuil d'apparition de ces R.T. ont été déterminés en fonction des nombres sans dimension du problème.

## Nomenclature

$H$	Hauteur de la couche poreuse, $m$	$\nu$	Viscosité cinématique du fluide, $m^2s^{-1}$
$K$	Perméabilité, $m^2$	$\omega$	Fréquence

### *Symboles grecs*

$\alpha$	Coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$
$\lambda$	Conductivité thermique, $Wm^{-1}K^{-1}$
$\lambda_1^*$	Temps de relaxation, $s$
$\lambda_2^*$	Temps de retardation, $s$

### *Indices et exposants*

$f$	Relatif au fluide
$s$	Relatif à la matrice poreuse
$sf$	Propriété effective
*	Relatif aux grandeurs dimensionnées

## 1. Introduction

On parle de convection naturelle d'origine thermique lorsque le milieu est limité par des plaques imperméables et qu'il est chauffé par le bas. En revanche, on dit qu'il y a convection mixte lorsque l'on considère, en plus du gradient thermique, un débit filtrant en imposant une pression plus forte à l'amont qu'à l'aval du milieu poreux. La convection mixte d'un fluide Newtonien dans un canal non poreux, connue sous le nom du problème de Poiseuille-Rayleigh-Bénard a fait l'objet de très nombreuses investigations, tant théoriques ou numériques qu'expérimentales. A ce sujet, X. Nicolas [1] présente, dans une excellente revue bibliographique, 154 références qui couvrent la période 1920-2001. L'intérêt porté à la convection mixte en milieu poreux a été beaucoup moins important et nous renvoyons le lecteur à la référence [2] qui donne un aperçu sur les différentes études concernant ce problème. Pour le cas d'un fluide viscoélastique en convection naturelle dans un milieu poreux, le travail mené par [3] a mis en évidence l'effet des propriétés viscoélastiques sur le déclenchement des instabilités thermoconvectives et leurs propriétés linéaires. Ils ont montré que l'élasticité du fluide, pourrait induire soit une bifurcation de Hopf, donnant naissance à des structures convectives oscillatoires ou à une bifurcation stationnaire. L'objectif de cette communication est d'examiner, pour la première fois à notre connaissance, l'influence de la présence d'un écoulement horizontal de débit non nul, sur les caractéristiques linéaires de ces deux types d'instabilités.

## 2. Formulation mathématique et équation de dispersion

Soit une couche poreuse horizontale d'extension infinie dans le plan horizontal, de hauteur  $H$ , isotrope et homogène, saturée par un fluide viscoélastique de type Oldroyd B. La paroi inférieure est chauffée à la température  $T_0^*$  alors que la paroi supérieure est maintenue à la température  $T_1^* < T_0^*$ . Le milieu poreux est soumis à un écoulement horizontal de vitesse de filtration  $V^*$ . Dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et de la loi de Darcy étendue au fluide viscoélastique [4], le système physique est gouverné par les équations suivantes :

$$\nabla \cdot V^* = 0 \quad (1)$$

$$(1 + \lambda_2^* \partial_t^*) V^* = -\frac{K}{\mu_f} (1 + \lambda_1^* \partial_t^*) (\nabla P^* - \rho_f \mathbf{g}) \quad (2)$$

$$(\rho c)_{sf} \partial_t^* T^* + (\rho c)_f V^* \cdot \nabla T_f^* = \nabla \cdot (\lambda_{sf}^* \nabla T^*) \quad (3)$$

avec  $(\rho c)_{sf} = \phi(\rho c)_f + (1 - \phi)(\rho c)_s$  et  $\lambda_{sf}^* = \lambda_f^* + \lambda_s^*$  étant respectivement la chaleur spécifique volumique effective et la conductivité thermique effective du milieu.

Les équations mathématiques régissant le problème sont adimensionnées avec les grandeurs de référence :  $H$  pour la longueur,  $H^2 (\rho c)_{sf} / \lambda_{sf}$  pour le temps,  $T_0^* - T_1^*$  pour la température,  $\lambda_{sf} / (H(\rho c)_f)$  pour la vitesse et  $\lambda_{sf} \mu_f / (K(\rho c)_f)$  pour la pression. Ainsi, le système d'équations adimensionnées devient :

$$\nabla \cdot V = 0 \quad (4)$$

$$(1 + \lambda_2 \partial_t) V + (1 + \lambda_1 \partial_t) (\nabla P - Ra T \mathbf{e}_z) = 0 \quad (5)$$

$$\partial_t T + V \cdot \nabla T - \nabla^2 T = 0 \quad (6)$$

Les parois horizontales sont considérées isothermes et imperméables

$$T(x, y, z = 0) = 1, \quad T(x, y, z = 1) = 0 \quad \text{et} \quad V \cdot \mathbf{e}_z = 0 \quad \text{en} \quad z = 0, 1 \quad (7)$$

et un écoulement uniforme est imposé à l'entrée

$$V \cdot \mathbf{e}_x = Pe \quad (8)$$

Les quatre nombres sans dimension qui gouvernent ce problème sont le nombre de Rayleigh de filtration  $Ra = K \alpha_f g H (T_0^* - T_1^*) (\rho c)_f / (\lambda_{sf} \nu)$ , le nombre de Péclet  $Pe = V^* (\rho c)_f / \lambda_{sf}$ , le temps de relaxation  $\lambda_1 = \lambda_1^* \lambda_{sf} / H^2 (\rho c)_{sf}$  et le temps de retardation  $\lambda_2 = \lambda_2^* \lambda_{sf} / H^2 (\rho c)_{sf}$ .

Le système (4)-(8) admet une solution de conduction stationnaire, que nous appelons état de base :

$$V = Pe \cdot \mathbf{e}_x, \quad T = 1 - z \quad \text{et} \quad P = Ra(z - z^2/2) - Pe x + cste \quad (9)$$

La suite est consacrée à l'étude de stabilité linéaire de la solution (9) en fonction des paramètres adimensionnés du problème.

Le système (4)-(8) linéarisé autour de la solution de conduction (9) conduit à un système d'équations aux dérivées partielles vérifié par les fluctuations de température, de pression et du champ de vitesse. Une analyse en modes normaux (i.e en  $e^{i(k_x x + k_y y - \omega t)}$ ) vérifiant les conditions aux limites du problème conduit à l'équation de dispersion :

$$D(\omega, k, \lambda_1, \lambda_2, Ra, Pe) = \omega^2 \lambda_2 (k^2 + \pi^2) + (k^2 + \pi^2) (-ik_x Pe - k^2 - \pi^2) + k^2 Ra + i\omega (k^2 + \pi^2 + \lambda_2 (k^2 + \pi^2)) (ik_x Pe) + \lambda_2 (k^2 + \pi^2)^2 - Ra k^2 \lambda_1 = 0 \quad (10)$$

où  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$  ( $k_x$  est le nombre d'onde dans la direction de l'écoulement moyen et  $k_y$  est le nombre d'onde dans la direction transverse). L'approche temporelle de stabilité suppose  $k \in \mathbb{R}$  et  $\omega \in \mathbb{C}$ , où la partie réelle  $\omega_r$  représente la fréquence de l'onde et la partie imaginaire  $\omega_i$  désigne le taux de croissance temporelle.

### 3. Résultats de stabilité en l'absence de l'écoulement ( $Pe = 0$ )

En posant  $Pe = 0$ , la séparation de la partie réelle et de la partie imaginaire de l'équation (10), conduit à deux types d'instabilités :

1. Instabilité stationnaire :

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad Ra^{(s)} = \frac{(k^2 + \pi^2)^2}{k^2}$$

En minimisant  $Ra^{(s)}$  par rapport à  $k$ , on retrouve le résultat bien connu pour la convection naturelle d'un fluide Newtonien en milieu poreux :  $Ra_c^{(s)} = 4\pi^2$  et  $k_c^{(s)} = \pi$ .

2. Instabilité oscillatoire :

$$\omega^\pm = \pm \sqrt{\frac{(k^2 + \pi^2)^2 - k^2 Ra}{\lambda_2(k^2 + \pi^2)}} \quad \text{et} \quad Ra^{(osc)} = \frac{(k^2 + \pi^2)(1 + \lambda_2(k^2 + \pi^2))}{k^2 \lambda_1}$$

avec les valeurs critiques :

$$Ra_c^{(osc)} = (1/\lambda_1)(1 + 2\lambda_2\pi(\pi + \sqrt{\pi^2 + 1/\lambda_2})) \quad \text{et} \quad k_c^{(osc)} = \pi^{1/2}(\pi^2 + 1/\lambda_2)^{1/4}.$$

Le mode avec une fréquence  $\omega^+$  ( $\omega^-$ ) correspond à une onde progressive descendante (montante). Remarquons que tous les modes dont le vecteur d'onde décrit un cercle de rayon  $k_c^{(s)}$  pour l'instabilité stationnaire ou  $k_c^{(osc)}$  pour l'instabilité oscillatoire peuvent émerger simultanément indiquant qu'il y'a absence d'une direction privilégiée du vecteur d'onde.

Nous avons représenté sur la figure 1, les deux seuils  $Ra_c^{(s)}$  et  $Ra_c^{(osc)}$ , en fonction de  $\lambda_2$ , pour différentes valeurs de  $\lambda_1$ . Cette figure met en évidence l'effet déstabilisant du temps de relaxation  $\lambda_1$  et l'effet stabilisant du temps de retardation  $\lambda_2$ . La condition nécessaire pour qu'une bifurcation de Hopf se produit dans le milieu, donnant naissance à des structures oscillatoires, est  $Ra_c^{(osc)} < Ra_c^{(s)}$ . Au regard des expressions de  $Ra_c^{(s)}$  et  $Ra_c^{(osc)}$ , cette condition s'écrit :

$$\lambda_1 > \lambda_{1c} = \frac{1}{4\pi^2} \left( 1 + 2\lambda_2\pi \left( \pi + \sqrt{\pi^2 + \frac{1}{\lambda_2}} \right) \right) \quad (11)$$

La courbe de la figure 2 représente, dans le plan  $(\lambda_2, \lambda_1)$ , la frontière qui sépare la zone des paramètres où l'instabilité est stationnaire (en dessous de la courbe) de celle où l'instabilité est oscillatoire (au dessus de la courbe). Cette figure montre que l'étendue de la région où se produit une bifurcation de Hopf est plus large que celle où le système observe une transition vers une instabilité stationnaire.

Dans la suite, nous allons analyser les effets de la présence de l'écoulement horizontal sur les caractéristiques linéaires de ces deux types d'instabilités.

### 4. Influence de l'écoulement horizontal sur les propriétés linéaires des instabilités

Notons d'abord que si on s'intéresse aux rouleaux longitudinaux (R.L.) caractérisés par  $k_x = 0$ , on remarque que l'équation de dispersion (10) devient indépendante du nombre de Péclet . Cela signifie que les conditions d'émergence des R.L. et leurs propriétés sont identiques à celles trouvées au paragraphe précédent avec un débit nul ( $Pe = 0$ ).

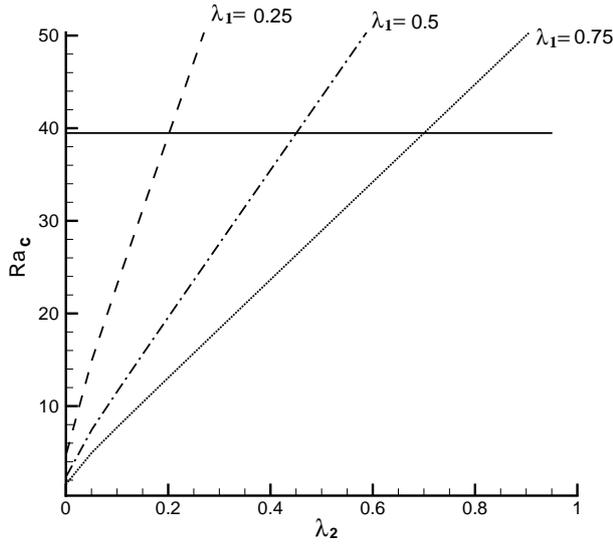


Figure 1 : Nombre de Rayleigh critique en fonction du temps de retardation, pour  $Pe = 0$ . La courbe solide représente le seuil  $Ra_c^{(s)} = 4\pi^2$ , tandis que les courbes pointillées représentent  $Ra_c^{(osc)}$  obtenus pour différentes valeurs du temps de relaxation  $\lambda_1$ .

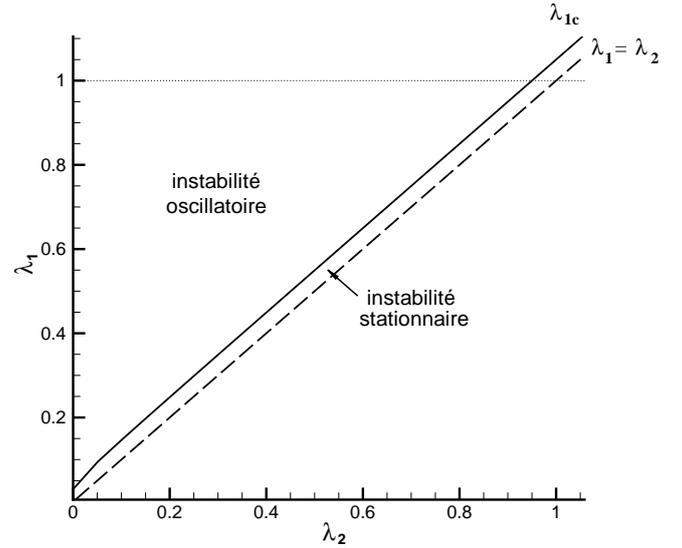


Figure 2 : Régions dans le plan  $(\lambda_1, \lambda_2)$  où le déclenchement de l'instabilité se produit en mode stationnaire ou oscillatoire.

#### 4.1. Transformation de Squire

Puisque le nombre d'onde  $k$  et le nombre de Péclet  $Pe$  apparaissent dans l'équation de dispersion (10) seulement comme  $k^2$  et  $k_x Pe$ , la dépendance de  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  vis-à-vis de  $k$  et  $Pe$  peut s'écrire :  $\omega = f(k^2, k_x Pe)$ . Cette propriété suggère d'opérer la transformation de Squire :

$$\omega(k_x^2 + k_y^2, k_x Pe) = \omega(k^2, k Pe^*) \quad (12)$$

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad \text{et} \quad Pe^* = (k_x/k) Pe \quad (13)$$

Cette transformation permet de déduire la fréquence complexe  $\omega_{3D}$  pour un vecteur d'onde avec une orientation arbitraire de composantes  $k_x, k_y$  de  $\omega_{2D}$  déterminée pour un vecteur d'onde orienté dans la direction de l'écoulement  $\vec{k} = k \vec{e}_x$  et un nombre de Péclet modifié  $Pe^*$ . Autrement dit, cette transformation permet de déduire les fréquences complexes associées au problème tridimensionnel de celles obtenues en résolvant le problème bidimensionnel. L'application concrète de cette transformation sera discutée au paragraphe suivant.

#### 4.2. Discussions des résultats et conclusion

Dans un premier temps, nous allons présenter des résultats relatifs au problème bidimensionnel avant de les relier au cas d'une instabilité tridimensionnelle. La figure 3 illustre la dépendance du nombre de Rayleigh critique (3a) et de la fréquence au seuil (3b) vis-à-vis du nombre de Péclet pour des valeurs fixées de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$ . Cette figure montre qu'il existe trois solutions pour des valeurs faibles de  $Pe$ , alors qu'il n'y en a qu'une seule pour des valeurs modérées de  $Pe$ . La courbe en carrés pleins montre que l'instabilité qui, en l'absence de l'écoulement principal était stationnaire (i.e  $\omega = 0$  pour  $Pe = 0$ ) se transforme en une instabilité oscillatoire avec une fréquence négative dont la valeur absolue croît avec  $Pe$ . Les deux courbes représentées par des points et des triangles pleins décrivent l'influence de l'écoulement principal sur le seuil d'apparition et sur la fréquence respectifs des rouleaux

transversaux mobiles dans le sens contraire de l'écoulement ( le mode  $\omega^-$ ) et dans le même sens que celui-ci ( le mode  $\omega^+$ ). Comme le seuil critique du mode  $\omega^+$  est le plus petit indépendamment de  $Pe$ , cela signifie que le débit imposé à l'entrée du massif poreux favorise l'apparition et le développement de rouleaux mobiles qui se propagent dans le sens de l'écoulement. Leurs fréquences d'oscillations varient en fonction de  $Pe$  presque linéairement comme cela est illustré par la figure 3b. Le rôle stabilisant du temps de retardation  $\lambda_2$  est illustré sur la figure 4 qui montre que le seuil d'apparition des structures convectives sélectionnées par un débit non nul augmente lorsque  $\lambda_2$  augmente.

A partir des résultats établis pour une instabilité bidimensionnelle, nous allons déterminer, dans un second temps, les seuils  $Ra_c^{3D}$  d'apparition de structures convectives tridimensionnelles. En annulant le taux de croissance temporelle  $\omega_i$ , la transformation de Squire (12, 13) indique que la valeur critique  $Ra_c$  vérifie la propriété :

$$Ra_c^{3D}(k_x^2 + k_y^2, k_x Pe) = Ra_c^{2D}(k^2, k Pe^*) \quad (14)$$

$$Pe = (k/k_x) Pe^* > Pe^* \quad \text{vu que } k^2 = k_x^2 + k_y^2 \quad (15)$$

Pour que le seuil d'apparition des structures tridimensionnelles soit identique à celui des structures bidimensionnelles, ces propriétés exigent une valeur de  $Pe$  plus élevée que celle trouvée dans le cas bidimensionnel. Or comme le montre la figure 3a pertinente pour le cas bidimensionnel, la valeur  $Ra_c^{2D}$  est une fonction décroissante vis-à-vis de  $Pe$ . Par conséquent pour la même valeur de  $Pe$ , les seuils  $Ra_c^{3D}$  s'avèrent supérieurs aux seuils  $Ra_c^{2D}$ . Ce comportement est illustré sur la figure 5, où nous avons représenté en fonction de  $Pe$ , les seuils d'apparition de rouleaux longitudinaux, de rouleaux purement transversaux et de structures obliques inclinés d'un angle  $\theta = \pi/3$  (i.e  $k_x/k = \cos \theta$ ) par rapport à la direction de l'écoulement principal.

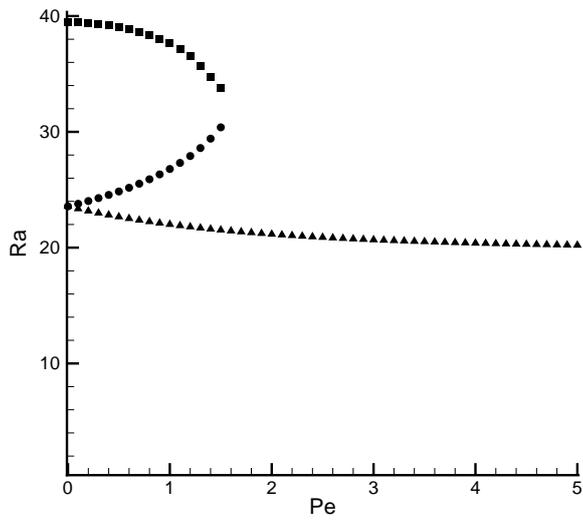
Nous pouvons conclure que le principal effet de la présence de l'écoulement principal sur les instabilités thermoconvectives de fluides viscoélastiques confinés en milieu poreux est la sélection d'une configuration convective organisée en rouleaux purement transversaux qui oscillent dans le temps tout en se propageant dans le sens de l'écoulement principal. L'écoulement principal diminue aussi les seuils de déclenchement de la convection thermoconvective et joue par conséquent un rôle déstabilisant.

L'étude de la croissance spatiale et temporelle de ces rouleaux transversaux permettrait la distinction entre la nature convective ou absolue de cette instabilité et constitue une des perspectives de ce travail.

## Références

- [1] X. Nicolas, Revue bibliographique sur les écoulements de Poiseuille-Rayleigh-Bénard : écoulements de convection mixte en conduites rectangulaires horizontales chauffées par le bas, *Int. J. Thermal Sc.*, 41 (2002), p. 961.
- [2] A. Delache, M. N. Ouarzazi and M. Combarous, Spatio-temporal stability analysis of mixed convection flows in porous media heated from below : Comparison with experiments, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 50 (2007), p. 1485.
- [3] M. C. Kim, S. B. Lee and S. Kim, Thermal instability of viscoelastic fluids in porous media, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 46 (2003), p. 5065.
- [4] B. Khuzhayorov, J. L. Auriault and P. Royer, Derivation of macroscopic filtration law for transient linear viscoelastic fluid flow in porous media, *Int. J. Eng. Sc.*, 38 (2000), p. 487.

(a)



(b)

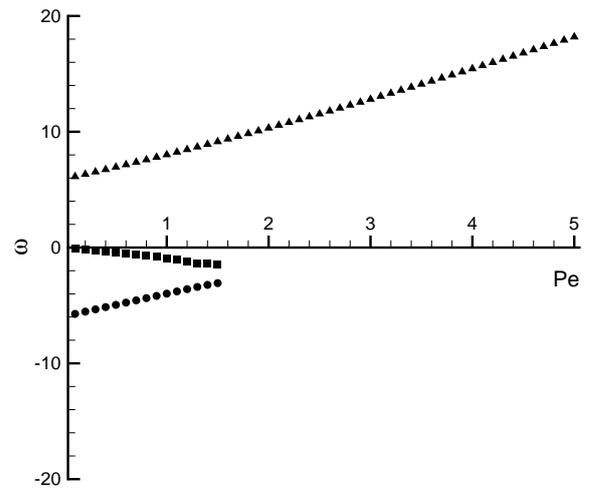


Figure 3 : (a) Nombres de Rayleigh et (b) fréquences correspondantes en fonction du nombre de Péclet, obtenus pour  $\lambda_1 = 0.5$  et  $\lambda_2 = 0.25$ .

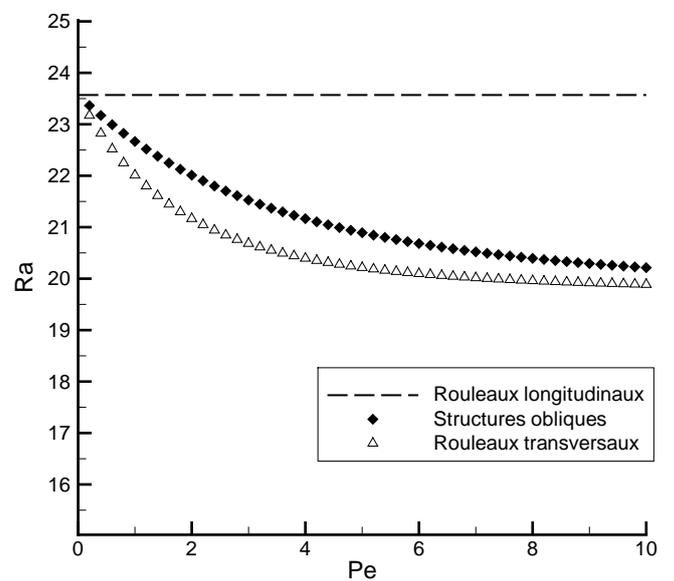
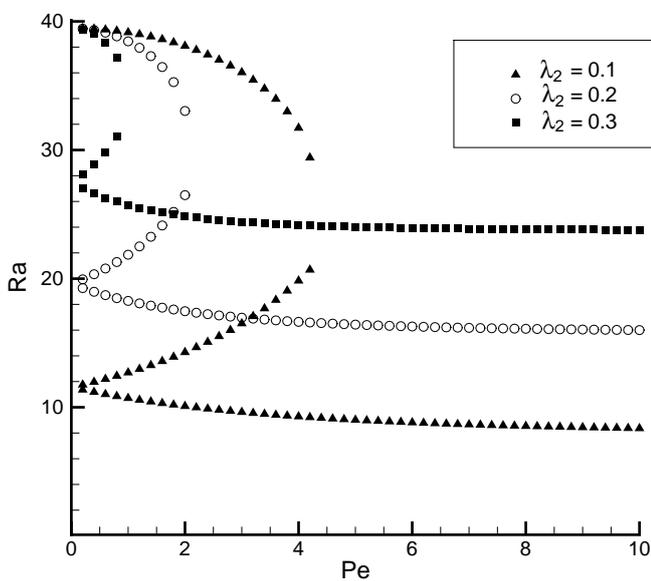


Figure 4 : Nombre de Rayleigh en fonction du nombre de Péclet, obtenus pour  $\lambda_1 = 0.5$  et différentes valeurs de  $\lambda_2$ .

Figure 5 : Seuils d'apparition de rouleaux longitudinaux, transversaux et obliques (inclinés d'un angle  $\theta = \pi/3$  par rapport à la direction de l'écoulement principal), obtenus pour  $\lambda_1 = 0.5$  et  $\lambda_2 = 0.25$ .