

Résolution numérique du transfert radiatif au sein d'un milieu semi-transparent pour une géométrie 3D de forme complexe.

Lionel TROVALET^{1*}, Gérard JEANDEL¹, Pedro COELHO² et Fatmir ASLLANAJ¹

¹Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, Nancy-Université, CNRS, Faculté des Sciences et Technologies, B.P. 70239, 54506 Vandoeuvre les Nancy cedex.

²Instituto Superior Técnico, Mechanical Engineering Department, Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal.

* (auteur correspondant : Lionel.Trovalet@lemta.uhp-nancy.fr)

Résumé - Nous présentons la résolution numérique du transfert radiatif au sein d'un milieu semi-transparent, pour une géométrie 3D de forme complexe. Le milieu étudié est supposé gris, non diffusant et limité par des surfaces opaques diffuses. La méthode de résolution est celle des volumes finis associée à un maillage non structuré constitué de tétraèdres. La formulation adoptée est de type «cell-vertex» (les inconnues sont stockées aux noeuds du maillage) combinée à une relation de fermeture de type exponentielle. Nos premiers résultats sont comparés à ceux de la littérature.

Nomenclature

T	température, K	k	numéro de la direction discrète
L	luminance, $W.m^{-2}.sr^{-1}$	f	panneau
L^o	luminance du corps noir, $W.m^{-2}.sr^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>	
V_P	volume d'une cellule P , m^3	κ	coefficient d'absorption
A_P	surface d'une cellule P , m^2	$\vec{\Delta}$	direction de propagation du rayonnement
s	abscisse curviligne, m	$\Delta\Omega$	angle solide
\vec{n}_f	normale unitaire extérieure		

Indices et exposants

P nœud du maillage (d'une cellule)

1. Introduction

Les verrous technologiques où l'influence de la thermique est essentielle se retrouvent dans de nombreux procédés, en particulier les procédés à haute température (moulage, formage, etc...). Dans ces procédés, le transfert radiatif est important et complexe dès lors que le milieu est semi-transparent. Ce phénomène s'avère d'autant plus important que l'on considère des systèmes de grandes dimensions. Pourtant, différentes approximations sont couramment utilisées, pour modéliser le transfert radiatif (Rosseland par exemple). Le transfert radiatif est parfois même négligé dans les codes de calculs parce qu'il est impossible à appréhender de façon simple et efficace. Les erreurs imputables à ces approximations sont difficiles à quantifier, ce qui aboutit souvent à l'établissement de champs de températures erronés. Une bonne estimation des transferts radiatifs va permettre une meilleure optimisation des procédés d'autant que la viscosité du matériau varie très rapidement avec la température. Il apparaît ainsi un fort besoin d'un code de calcul qui intègre les différents aspects de rayonnement et phénomènes couplés dans les procédés.

Notre recherche s'inscrit dans le cadre du projet de l'ANR MIPIVERRE (Matériaux Innovants et Produits Intelligents : application au VERRE, labellisé par le pôle de

compétitivité Materialia), où l'application visée est celle du thermoformage du verre (matériau non gris semi-transparent considéré comme non diffusant). L'objet de notre travail dans cette communication porte sur le développement d'un code de calcul permettant de simuler finement le transfert radiatif dans un objet de forme complexe en géométrie 3D. C'est un sujet qui fait l'objet de nombreux travaux et il constitue un axe de recherche prioritaire dans le domaine du rayonnement [1,2,3,4,5]. Ces dernières années ont vu en particulier l'émergence de la méthode des volumes finis (MVF) pour la résolution du transfert radiatif. Notre code de calcul résout spatialement l'équation du transfert radiatif (ETR) par une MVF avec une formulation de type «cell-vertex», où les inconnues sont stockées aux noeuds du maillage (ce qui conforte le couplage avec d'autres logiciels). Dans la littérature, on retrouve ce type de formulation uniquement pour des géométries 2D [6,7,8]. Dans ce travail, nous l'avons généralisé aux géométries 3D. Aussi, ce schéma numérique constitue une originalité de part sa formulation qui, notons toutefois, est plus complexe à mettre en œuvre. La particularité de cette formulation est liée à la forme des volumes de contrôle qui devrait nous permettre d'être plus précis que les autres schémas de type «cell-centered» où les inconnues seraient stockées aux centres des volumes de contrôle formant le domaine [1] ; ceci en raison notamment du nombre de faces dans un volume de contrôle qui est plus important dans notre cas. De plus, nous utilisons un ordre de parcours («marching order map») introduit par [6] pour résoudre l'ETR où la difficulté de mise en œuvre est liée ici à l'utilisation de maillage non structuré en géométrie 3D. Afin de simplifier l'écriture du code nous l'avons appliqué, dans un premier temps, à un milieu gris. La suite de l'article comprend la méthode de résolution de l'ETR (dans les conditions précisées préalablement) avec une description succincte du schéma qui a été mis en place, ainsi que des résultats numériques comparés à ceux de la littérature. L'article se termine par une conclusion et des perspectives.

2. Résolution numérique du transfert radiatif par la MVF

2.1. Les discrétisations angulaire et spatiale

L'ETR présente la particularité d'être dépendante de la direction de propagation du rayonnement. La luminance doit donc être obtenue pour chaque direction considérée, nécessitant de discrétiser l'espace angulaire. Le vecteur directeur caractérisant la direction $\vec{\Delta}$ est défini dans un repère cartésien par les angles polaire φ et azimutal θ . Aussi, l'espace angulaire ($4\pi sr$) est subdivisé en N_d angles solides notés $\Delta\Omega$ définis par le nombre d'angle polaire N_θ et azimutal N_φ (avec un pas constant).

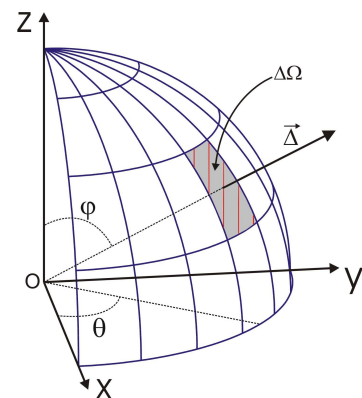


Figure 1 : Discrétisation angulaire

Le domaine d'étude est discrétisé à l'aide d'un maillage non structuré constitué de tétraèdres (à quatre nœuds). Pour appliquer la MVF avec la formulation «cell-vertex», il est nécessaire de construire les volumes de contrôle autour de chaque nœud du maillage (figure 2). Ceux-ci sont des polyèdres à faces quadrilatérales formés de plusieurs volumes partiels. En effet, le volume de contrôle noté V_P associé au nœud P est construit à partir de chaque tétraèdre qui compte parmi leurs sommets le nœud P . Pour chacun de ces tétraèdres qui ont en commun le sommet P , on décrit un volume partiel qui est une partie du volume de contrôle V_P . La frontière Γ_P du volume de contrôle V_P est constituée de N_f faces quadrilatérales

(panneaux notés f). Sur ces panneaux de surface A_f , nous définissons au centre de ceux-ci, les points d'intégrations i_f ainsi que la normale extérieure unitaire associée notée \vec{n}_f .

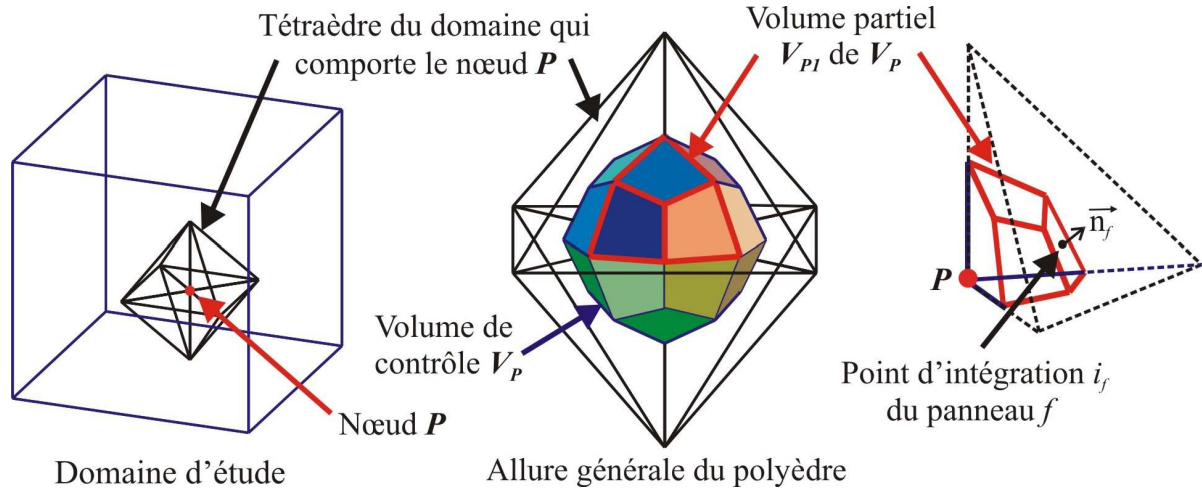


Figure 2 : Volume de contrôle avec la formulation «cell vertex» en géométrie 3D

2.2. Application de la MVF

Rappelons que l'ETR stationnaire considérée dans sa formulation multidimensionnelle pour un milieu gris, semi-transparent (non diffusant et pour un indice de réfraction égale à un) à une position s donnée et pour la direction $\vec{\Delta}$ [9], s'écrit :

$$\vec{\Delta} \cdot \vec{\nabla} L(s, \vec{\Delta}) = \kappa [L^o(T(s)) - L(s, \vec{\Delta})] \quad (1)$$

On suppose que le coefficient d'absorption κ et les luminances L et $L^o(T)$ sont constants dans le volume de contrôle V_P (suffisamment petit relativement au volume du domaine) prenant une seule valeur au noeud principal P . On suppose également qu'ils sont constants dans l'angle solide $\Delta\Omega^k$. On obtient alors l'expression discrétisée classique de l'ETR dans un volume de contrôle [7] :

$$\sum_{f=1}^{N_f} L_{if}^k A_f \int_{\Delta\Omega^k} (\vec{\Delta} \cdot \vec{n}_f) d\Omega = \kappa [L^o(T_P) - L_P^k] \Delta\Omega^k V_P \quad (2)$$

où L_{if}^k représente la valeur approchée de la luminance au point d'intégration i_f et dans l'angle solide $\Delta\Omega^k$. On cherche à déterminer une valeur approchée de la luminance notée L_P^k , en chaque noeud P (dit principal) du maillage et pour une direction discrète k donnée. Notre problème n'est alors pas complètement résolu. En effet, si le membre de droite de (2) est bien exprimé uniquement en fonction de la valeur au noeud P , le membre de gauche lui dépend des valeurs aux points d'intégration i_f .

2.3. Les relations de fermeture

A partir de la forme intégrale de l'ETR, nous exprimons la luminance L_{if}^k en fonction des valeurs des luminances connues aux noeuds du maillage. Pour une température et un coefficient d'absorption constants dans le milieu, nous avons la relation de fermeture de type exponentielle [4], donnée par :

$$L_{if}^k = L_{uf}^k e^{-\kappa\Delta s_{if}} + L^o(T_P)(1 - e^{-\kappa\Delta s_{if}}) \quad (3)$$

où u_f et i_f sont sur le même chemin optique de direction discrète $\vec{\Delta}^k$ (u_f étant situé en amont de i_f et Δ_{sf} représente la distance entre les points i_f et u_f). Pour un volume de contrôle V_P donné associé à un nœud principal P , la construction du point u_f dépend de la forme du tétraèdre (de sommets P_1, P_2, P_3, P_4) et de la position du point i_f par rapport au nœud P (comme illustré sur la figure 3). Ainsi, on distingue 2 cas :

- cas 1 (figure 3a) : lorsque i_f est situé en aval du nœud P (coïncidant avec le nœud P_1), i_f est projeté en un point u_f sur le plan ΔP_1 ;
- cas 2 (figure 3b) lorsque i_f est situé en amont du nœud P (coïncidant avec le nœud P_3), i_f est projeté en un point u_f sur le plan ΔP_2 .

où ΔP_1 et ΔP_2 sont les plans orthogonaux à la direction discrète $\vec{\Delta}^k$ et passant respectivement par les sommets P_1 et P_2 . A présent, il reste à déterminer L_{uf}^k . Dans le schéma présenté ici (et les résultats numériques présentés plus loin ont été obtenu avec ce schéma), L_{uf}^k est approchée (en utilisant un seul nœud d'interpolation) par les luminances $L_{P_1}^k$ (cas 1) ou $L_{P_2}^k$ (cas 2). Ce schéma est plus simple à mettre en place. Aussi, nous envisageons de l'améliorer par la suite en projetant les points d'intégrations i_f sur une des faces du tétraèdre afin de pouvoir interpoler L_{uf}^k à partir de plus d'un nœud qui appartient aux sommets du tétraèdre.

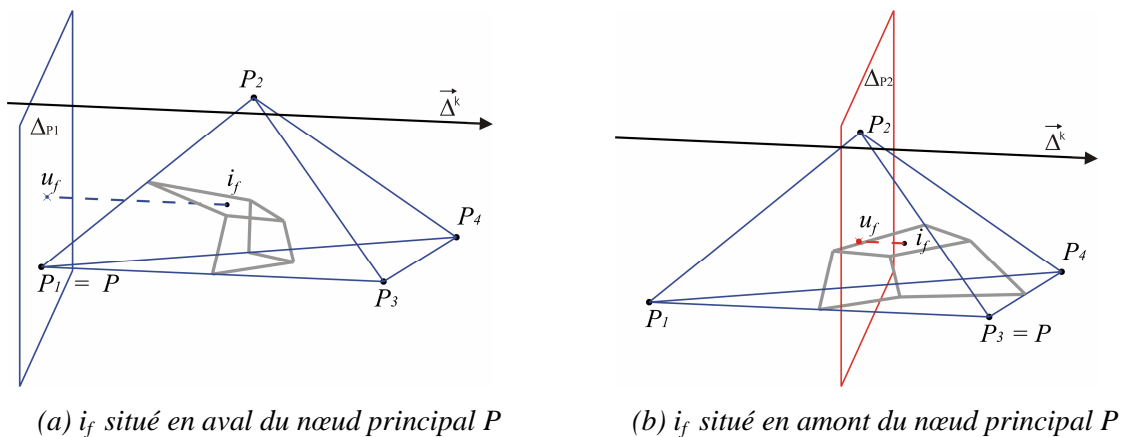


Figure 3 : Volume partiel associé au nœud principal P dans un tétraèdre

2.4 Ordre de parcours et résolution

Actuellement, nous utilisons le mailleur 3D du logiciel commercial FEMLAB. Celui-ci génère 3 fichiers standards donnant : 1) les coordonnées et la numérotation de tous les nœuds du maillage ; 2) la numérotation des tétraèdres ; 3) la numérotation des éléments triangulaires de la frontière avec le numéro de frontière. Afin de respecter le sens de propagation du rayonnement à travers le domaine spatial, nous établissons pour chaque direction discrète un ordre de résolution de l'ETR en chaque nœud du maillage. Il s'agit ici de représenter numériquement le sens de propagation du rayonnement (table de connectivité "radiative" que nous générons nous même). Une illustration est donnée dans la figure 4 (dans le cas 2D par souci de simplification).

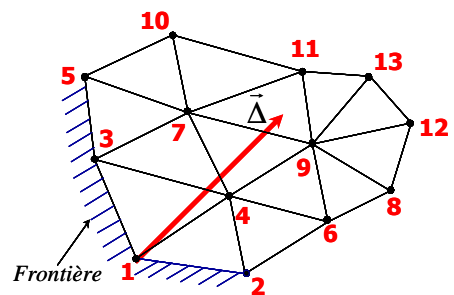


Figure 4 : Renumérotation du maillage en géométrie 2D en fonction de la direction discrète considérée

3. Résultats

Pour les deux cas d'études que nous présentons (cas de validation issus de la littérature), le milieu est gris semi-transparent (non diffusant) et les parois sont supposées noires. La discrétisation angulaire est composée de (8×4) angles solides.

3.1. Enceinte cubique

Le premier cas d'étude est celui d'une enceinte cubique (figure 5) repris de [3,4] dont les dimensions sont $(1\text{m} \times 1\text{m} \times 1\text{m})$. La température du milieu est constante à 100K et la température des faces est à 0K . Nos simulations ont été effectuées avec une discrétisation spatiale composée de 1332 nœuds (maillage 1) et 2457 nœuds (maillage 2). La figure 6 montre le flux radiatif incident adimensionné le long de la ligne médiane de la face du dessus (figure 5) pour trois valeurs du coefficient d'absorption. Nos résultats montrent un bon accord avec la solution exacte de [3] et la solution numérique de [3,4]. Nous observons une stratification des résultats pour les différentes valeurs de κ . Lorsque le milieu est plus absorbant ($\kappa = 10$), le flux est plus important et tend vers la luminance du corps noir à la température du milieu. Lorsque κ diminue, le flux tend vers zéro compte tenu des températures froides des faces.

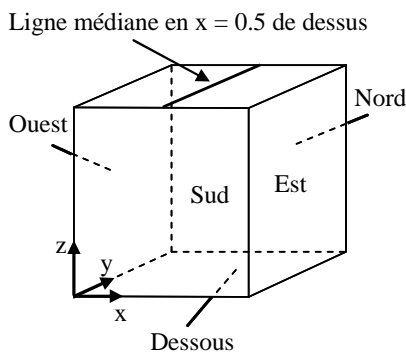


Figure 5 : Enceinte cubique

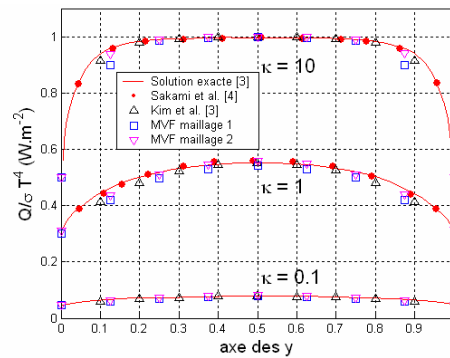


Figure 6 : Flux radiatif incident adimensionné le long de la ligne médiane, face de dessus en $x = 0.5$

3.2. Enceinte en forme de «L»

Le second cas d'étude repris de [2,4], porte sur une géométrie en forme de «L» (figure 7). La température du milieu est constante à 1000K et la température des faces est à 500K . Nos résultats sont obtenus pour une discrétisation spatiale composée de 2292 nœuds (maillage 1) et 6860 nœuds (maillage 2). La figure 8 indique le flux radiatif incident le long de l'axe A-B, pour trois valeurs du coefficient d'absorption.

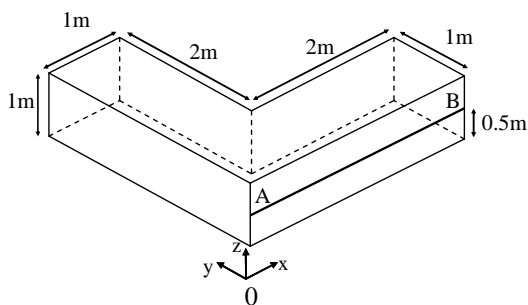


Figure 7 : Géométrie en forme de «L»

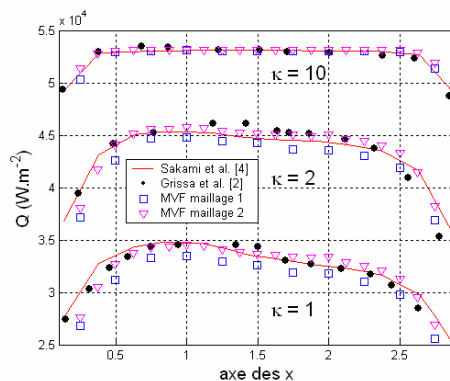


Figure 8 : Flux radiatif incident le long de l'axe A-B

Nos résultats sont proches des solutions de références lorsqu'on utilise un maillage spatial très fin. Nous pensons que l'écart observé avec le maillage plus grossier est dû à notre schéma qui utilise actuellement qu'un seul nœud d'interpolation. Lorsque $\kappa = 10$, le flux tend vers $\sigma(T_{milieu}^4 - T_{face}^4)$. Pour les faibles valeurs de κ , le flux présente une dissymétrie qui est attribuée à l'effet d'ombrage.

4. Conclusion et perspectives

Nous avons mis en place un schéma numérique de type volumes finis avec une formulation «cell-vertex» permettant de simuler le transfert radiatif dans un milieu gris (non diffusant) pour une géométrie 3D de forme complexe. Nos premiers résultats ont été comparés à ceux de la littérature sur deux cas tests (enceinte cubique et forme en L). Nous envisageons de poursuivre l'étude et de mettre en place un schéma qui utilisera jusqu'à trois nœuds d'interpolation (coïncidant avec trois sommets d'un tétraèdre) en projetant au préalable les points u_f sur les faces des tétraèdres. Ceci devrait conduire à une meilleure précision des résultats. Nous chercherons de plus à mettre en place des méthodes d'analyses comparatives pertinentes entre les diverses méthodologies, notamment entre les schémas de type «cell-vertex» et «cell-centered». La généralisation du code à un milieu non-gris (verre) est également envisagée.

Références

- [1] D. Joseph, M. El Hafi, R. Fournier, B. Cuenot, Comparison of three spatial differencing schemes in discrete ordinates method using three-dimensional unstructured meshes, *Int. J. Therm. Sci.*, 44-9 (2005), 851-864.
- [2] H. Grissa, F. Askri, M. Ben Salah, S. Ben Nasrallah, Prediction of radiative heat transfer in 3D complex geometries using the unstructured control volume finite element method, *JQSRT*, 111-1 (2010), 144-154.
- [3] K. Kim, E. Lee, T. H. Song, Discrete ordinates interpolation method for radiative heat transfer problems in three-dimensional enclosures filled with non-gray or scattering medium, *JQSRT*, 109-15 (2008), 2579-2589.
- [4] M. Sakami, A. Charette, V. Le Dez, Radiative heat transfer in three-dimensional enclosures of complex geometry by using the discrete-ordinates method, *JQSRT*, 59-1-2 (1998), 117-136.
- [5] R. Capdevila, C. D. Pérez-Segarra, A. Oliva, Development and comparison of different spatial numerical schemes for the radiative transfer equation resolution using three-dimensional unstructured meshes Computation, *JQSRT*, 111-2 (2010), 264-273.
- [6] E. H. Chui, G. D. Raithby, Computation of radiant heat transfer on a nonorthogonal mesh using the finite-volume method, *Num. Heat Trans. B*, 23-3 (1993), 269-288.
- [7] F. Asllanaj, V. Feldheim, P. Lybaert, Solution of radiative heat transfer in 2-d geometries by a modified finite volume method based on a cell vertex scheme using unstructured triangular meshes, *Num. Heat Trans. B*, 51-2 (2007), 97-119.
- [8] D. R. Rousse, Numerical predictions of two-dimensional conduction, convection and radiation heat transfer. i. formulation, *Int. J. Therm. Sci.*, 39 (2000), 315-331.
- [9] M. Modest, *Radiative Heat Transfer*, second edition, Academic Press, San Diego (2003).

Remerciements

Les auteurs remercient l'ANR pour son soutien et la région Lorraine pour le co-financement de la thèse du premier auteur.