

Application d'une méthode de type 'Meshless' à la résolution de problèmes de transferts radiatifs en géométrie complexe

Chengan WANG, Hamou SADAT, Vital LE DEZ, Denis LEMONNIER

Laboratoire d'Etudes Thermiques, Université de Poitiers
40 Avenue du Recteur Pineau – 86022 Poitiers Cedex
chengan.wang@etu.univ-poitiers.fr

Résumé - On présente une méthode de type « Meshless » pour la résolution de problèmes de transfert radiatif définis dans des géométries de forme complexe. La méthode des ordonnées discrètes dans sa formulation en variables paires est utilisée pour la discrétisation angulaire, tandis qu'une méthode de collocation basée sur l'approximation glissante à moindres carrés permet la discrétisation spatiale des équations sur des nuages de points générés dans le domaine. Des exemples bidimensionnel et tridimensionnel sont présentés et permettent de valider la méthode.

Nomenclature

A^M matrice d'approximation diffuse au point M

$\langle p(M_i, M) \rangle$ vecteur ligne des monômes

M point courant

J nombre de directions discrètes Ω

$W(\Omega)$ poids associé à une direction discrète

$I(\Omega)$ luminance directionnelle pour une direction de propagation Ω , $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$

I_b luminance de corps noir du milieu, $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$

I_{bw} luminance surfacique de corps noir, $W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$

\hat{n} normale extérieure à la surface

q flux pariétal, $W \cdot m^{-2}$

Symboles grecs

ω fonction de pondération

α vecteur de l'estimée des dérivées partielles successives

φ champ scalaire

λ ouverture des fenêtres de pondération

κ coefficient d'absorption, m^{-1}

σ coefficient de diffusion, m^{-1}

β coefficient d'extinction, m^{-1}

Ω direction de propagation

Φ fonction de phase de diffusion

ε émissivité d'une surface

Indices et exposants

b corps noir (matière)

bw corps noir (paroi)

1. Introduction

Au cours de la dernière décennie, de nombreuses méthodes ont été proposées pour résoudre des équations aux dérivées partielles définies dans des géométries complexes sans utilisation de maillages en éléments finis. Dans le présent article, on développe une méthode de collocation utilisant l'approximation glissante à moindres carrés [1]. Cette méthode a été utilisée pour résoudre des problèmes de conduction [2], de convection naturelle 2D [3] et 3D [4], étudier l'effet du champ magnétique sur la convection naturelle [5] et l'écoulement autour d'obstacles [6].

Il existe de nombreuses situations d'ingénierie (fours, hauts-fourneaux, chambres de combustion ...), pour lesquelles le fonctionnement est étroitement dépendant des transferts thermiques au sein des systèmes considérés, et où le rayonnement peut être le mode dominant

d'échange de chaleur. En raison de l'absorption du rayonnement et des possibles phénomènes de diffusion dans les milieux semi-transparents, la luminance, quantité fondamentale à partir de laquelle peut être obtenu le champ de flux radiatif, obéit à une équation intégral-différentielle (ETR) dont la principale difficulté de résolution est liée à sa nature directionnelle. Dans la méthode des ordonnées discrètes (DOM), primitivement développée par Lathrop [7], l'ETR est transformée en un système d'équations aux dérivées partielles résolues à l'aide de méthodes numériques apparentées aux volumes finis [8-9] ou éléments finis [10-11]. La formulation en variables paires de l'ETR [12-13] a l'avantage de n'utiliser qu'une seule équation pour une direction discrète donnée, contrairement aux variables primitives qui nécessitent deux équations (directions + et -). Par ailleurs, les équations obtenues en variables paires ont une structure similaire à celle que l'on obtient dans des problèmes de diffusion.

On présente ici l'application de la méthode « Meshless » à la résolution de problèmes de transferts radiatifs définis dans des géométries de forme complexe bidimensionnelle et tridimensionnelle. La mise en œuvre de la méthode par minimisation d'un écart quadratique, la discrétisation spatiale des équations à laquelle elle conduit et la construction des systèmes d'équations sont d'abord développées. Les résultats obtenus sur quelques exemples, relatifs aux flux pariétaux, sont ensuite présentés et commentés.

2. La méthode de l'approximation diffuse

Considérons un champ scalaire $\varphi(x, y)$ défini dans un domaine bidimensionnel discrétisé en n nœuds. A partir d'un point de calcul $M(x, y)$ on cherche une estimée φ_i^* du champ φ_i , sous la forme d'un développement de Taylor tronqué à un ordre choisi (ici à l'ordre 2), de sorte que

$$\varphi_i^*(x_i, y_i) = \langle p(M_i, M) \rangle \cdot \langle \alpha_M \rangle^T \quad (1)$$

$$\text{avec} \quad \langle p(M_i, M) \rangle = \langle 1, (x_i - x), (y_i - y), (x_i - x)^2, (x_i - x)(y_i - y), (y_i - y)^2 \rangle \quad (2)$$

$$\text{et} \quad \langle \alpha_M \rangle^T = \langle \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5 \rangle^T \quad (3)$$

Les différents coefficients α_i correspondent, à une constante près, aux dérivées successives du champ scalaire au point M_i . On connecte ensuite les variables généralisées aux valeurs connues par minimisation de l'erreur quadratique qui s'exprime par :

$$I(\alpha_M) = \sum_{j=1}^n \left\{ \omega(M_j, M) \cdot \left[\varphi_j - \langle p(M_j, M) \rangle \cdot \langle \alpha_M \rangle^T \right]^2 \right\} \quad (4)$$

$$\text{où} \quad \omega(X, X_i - X) = \exp \left[-3 \ln(10) \cdot \left(\frac{|X_i - X|}{\lambda} \right)^2 \right] \quad (5)$$

$$\omega(X, X_i - X) = 0 \quad \text{si} \quad (X_i - X)^2 > \lambda^2$$

$\omega(M_j, M)$ est une fonction de pondération continue, positive, maximale en M_i et décroissant rapidement quand on s'en éloigne : ainsi $\omega(M_j, M)$ définira le nombre de nœuds

voisins connectés au nœud de calcul. La minimisation de $I(\alpha_M)$ par rapport à $\langle \alpha_M \rangle^T$, c'est-à-dire $\frac{\partial I(\alpha_M)}{\partial \alpha_i} = 0$, conduit au système matriciel :

$$[A^M] \cdot \langle \alpha_M \rangle^T = \langle B^M \rangle^T \quad (6)$$

Où
$$[A^M] = \sum_{j=1}^n \omega(M_j, M) \cdot \langle p(M_j, M) \rangle^T \langle p(M_j, M) \rangle \quad (7)$$

et
$$\langle B^M \rangle^T = \sum_{j=1}^n \omega(M_j, M) \cdot \langle p(M_j, M) \rangle^T \cdot \varphi_j \quad (8)$$

dont on déduit :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \varphi(x, y)^* & \alpha_1 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^* & \alpha_2 &= \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^* \\ \alpha_3 &= \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)^* & \alpha_4 &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)^* & \alpha_5 &= \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)^* \end{aligned} \quad (9)$$

3. Formulation en variables paires

Dans un milieu semi-transparent émettant, absorbant et diffusant, l'ETR s'écrit, après avoir remplacé le terme intégral de diffusion par son approximation discrète, sous la forme classique, le long d'une trajectoire caractérisée par sa direction Ω_i et son abscisse curviligne s :

$$\frac{dI(\Omega_i)}{ds} = -\beta I(\Omega_i) + \kappa I_b + \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{j=1}^J I(\Omega'_j) \Phi(\Omega'_j, \Omega_i) W(\Omega'_j) \quad (10)$$

$i = 1 \dots J$ est l'ordre de la direction discrète Ω_i , κ , σ et β sont les coefficients d'absorption, de diffusion et d'extinction du milieu supposé gris. I_b est la luminance de corps noir du milieu, et $\Phi(\Omega'_j, \Omega_i)$ est la fonction de phase de diffusion entre les directions Ω'_j et Ω_i , $W(\Omega'_j)$ étant le poids associé à la direction discrète j pour la quadrature angulaire choisie.

Les conditions aux limites pour une paroi réfléchissant le rayonnement de façon purement diffuse, s'écrivent après avoir transformé l'intégrale de réflexion en une somme discrète :

$$I(\Omega_i) = \varepsilon I_{bw} + \frac{1-\varepsilon}{\pi} \sum_{\hat{n} \cdot \Omega'_j < 0} I(\Omega'_j) |\hat{n} \cdot \Omega'_j| W(\Omega'_j) \quad (11)$$

Où ε est l'émissivité de la surface et I_{bw} la luminance de corps noir à la paroi de normale intérieure \hat{n} .

En appelant $I^+(\Omega)$ et $I^-(\Omega)$ les intensités relatives aux directions positive + et négative -, il vient pour les variables paires et impaires :

$$F(\Omega) = I^+(\Omega) + I^-(\Omega), G(\Omega) = I^+(\Omega) - I^-(\Omega) \quad (12)$$

En injectant alors les luminances + et – dans l'ETR (10) il vient [12-13]:

$$\frac{1}{\beta} \frac{d^2 F_i}{ds^2} - \beta F_i + 2\kappa_b + \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{j=1}^{J/2} (A_{ij} F_j + B_{ij} G_j) = 0 \quad (13)$$

$$\frac{dF(\Omega)}{ds} = -\beta G(\Omega) \quad (14)$$

Les matrices A_{ij} et B_{ij} s'expriment respectivement par $[\Phi(\Omega'_j, \Omega_i) + \Phi(\Omega'_j, -\Omega_i)]W(\Omega'_j)$ et $[\Phi(\Omega'_j, \Omega_i) - \Phi(\Omega'_j, -\Omega_i)]W(\Omega'_j)$. Quant aux conditions aux limites, elles s'écrivent dans le cadre de ce formalisme:

$$\frac{1}{2} \left(F_i - \text{sign}(\hat{n} \cdot \Omega'_i) \frac{1}{\beta} \frac{dF_i}{ds} \right) = \epsilon I_{bw} + \frac{1-\epsilon}{\pi} \sum_j^{J/2} \frac{1}{2} (F_i - \text{sign}(\hat{n} \cdot \Omega_j) G_i) |\hat{n} \cdot \Omega'_j| W(\Omega'_j) \quad (15)$$

Les flux pariétaux sont donnés simplement par:

$$q = \sum_{i=1}^{J/2} (\hat{n} \cdot \Omega_i) G_i W(\Omega'_i) \quad (16)$$

Pour résoudre ces équations, on remplace d'abord le domaine continu par un ensemble de points discrets. La fonction de pondération choisie est alors utilisée pour sélectionner un certain nombre de points autour de chaque point isolé où l'approximation diffuse de l'équation est enfin écrite. Cela conduit à un système linéaire dont les inconnues sont les valeurs nodales $F_i(x, y)$.

4. Résultats

Dans les deux cas étudiés, le milieu est émettant-absorbant et supposé isotherme, confiné dans une enceinte dont les parois sont noires et froides (0 K). Le coefficient d'absorption varie de 0.1, à 10.0 m⁻¹. Les géométries considérées sont données sur les figures 1 et 2. Les calculs ont été effectués à l'aide d'une quadrature S6.

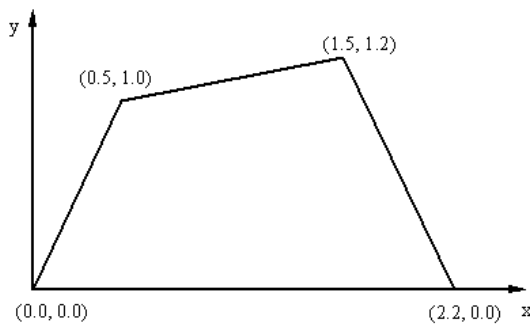


Figure 1 : Description du quadrilatère étudié

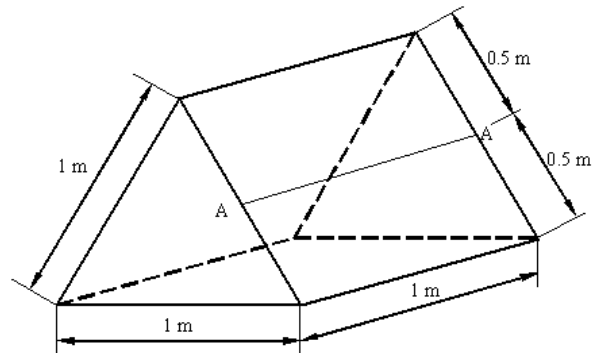


Figure 2 : Représentation du pentaèdre

4.1. Cas d'un quadrilatère irrégulier

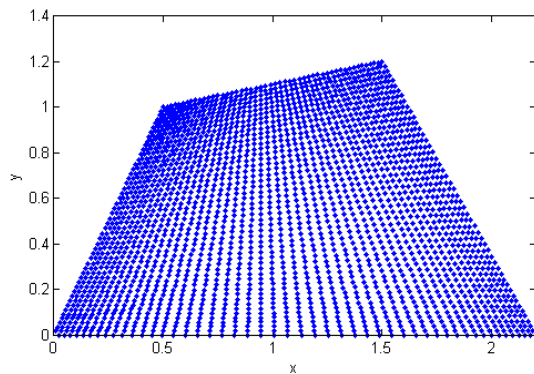


Figure 3 : Maillage

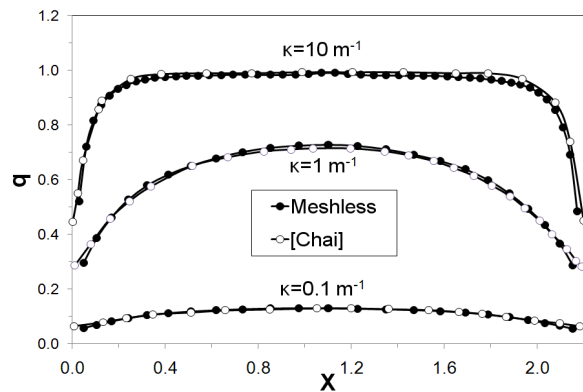


Figure 4 : Comparaison des flux pariétaux adimensionnés sur la paroi inférieure pour plusieurs absorptions ($\kappa = 10 \text{ m}^{-1}$, 50×50 ; $\kappa = 0.1$, 1 m^{-1} , 25×25)

Le problème d'un milieu isotherme absorbant et émettant considéré par Chai [14] dans la géométrie de la figure 1 a été traité avec deux maillages 25×25 (pour $\kappa = 0.1 \text{ m}^{-1}$ et 1 m^{-1}) et 50×50 (pour $\kappa = 10 \text{ m}^{-1}$). La figure 3 montre un exemple de nuage de points utilisé tandis que la figure 4 présente les flux pariétaux adimensionnés sur la paroi inférieure ainsi que les résultats obtenus par Chai [14].

4.2. Cas d'un pentaèdre à base rectangulaire

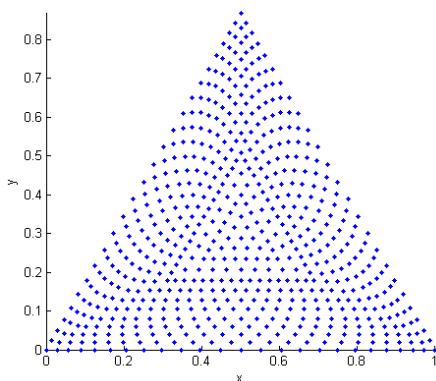


Figure 5 : Maillage utilisé

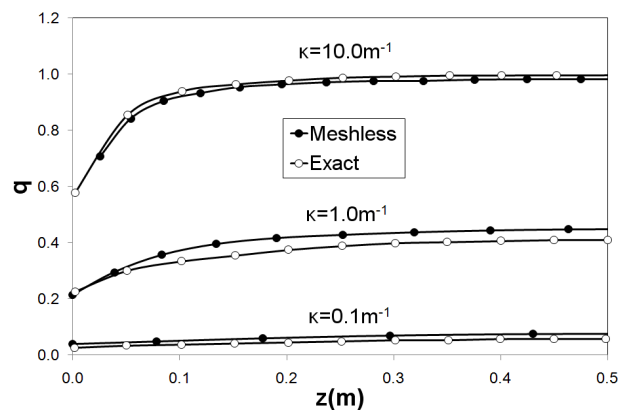


Figure 6 : Flux pariétaux adimensionnés sur l'axe A-A pour différentes absorptions

La figure 5 montre un nuage de points utilisé pour la discrétisation du pentaèdre. Les Flux pariétaux obtenus sur le segment A-A de la figure 2 ont été regroupés sur la figure 6 pour 3 valeurs distinctes du coefficient d'absorption. On constate à nouveau la bonne concordance des résultats avec ceux de Chai et al.[15].

5. Conclusion

Une méthode de type « Meshless » est utilisée pour résoudre le transfert radiatif dans des géométries de forme complexe, bidimensionnelle et tridimensionnelle. Les résultats montrent que la méthode permet d'obtenir des résultats d'assez bonne précision. Nous envisageons d'étendre cette approche à l'étude des transferts couplés.

Références

- [1] B. Nayroles, G. Touzot and P. Villon, L'approximation diffuse, C. R. Acad. Sci. Paris 313 pp.293–296,1991
- [2] H. Sadat, N Dubus, L Gbahoué, T Sophy. On the Solution Of Heterogeneous Heat Conduction Problems by a Diffuse Approximation Meshless Method.Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals. Vol.50, no.6,pp.491–498 december,2006
- [3] H Sadat, S Couturier. Performance and accuracy of a meshless method for laminar natural convection. Numerical Heat Transfer, Part B, Vol.37, no.4, pp.455–467,2000
- [4] T.Sophy, H.Sadat and C.Prax, A meshless formulation for three dimensional laminar natural convection. Numerical Heat Transfer, Part B, Vol.41, pp.433–445, 2002
- [5] Tonino Sophy, Hamou Sadat, Laurent Gbahoue .Convection thermomagnétique dans une cavité différentiellement chauffée, International Communications in Heat and Mass Transfer Vol.32, no.7, pp.923–930,2005
- [6] T SOPHY, H SADAT, R BOUARD. Calcul de l'écoulement autour d'un cylindre semi-circulaire par une méthode de collocation, C. R. Mécanique Vol.330, pp.193–198,2002
- [7] K.D. Lathrop.Use of discrete ordinates method for solution of photon transport, problems. Nucl. Sci. Eng, vol.4, pp.381–388,1966
- [8] Raithby GD, Chui EH. A finite-volume method for predicting a radiant heat transfer in enclosures with participating media. J HeatTransf, Vol.112, pp. 415–23, 1990
- [9] Chai JC, Lee HS, Patankar SV. Finite volume method for radiation heat transfer. J Thermophys Heat Transf, Vol.8, pp.419–25, 1994
- [10] An W, Ruan LM, Qi H, Liu LH. Finite element method for radiative heat transfer in absorbing and anisotropic scattering media. JQSRT, Vol.96, pp.409–22, 2005
- [11] Seok Hun Kang, Tae-Ho Song, Finite element formulation of the first- and second-order discrete ordinates equations for radiative heat transfer calculation in three-dimensional participating media, Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, Vol.109, pp.2094–2107,2008
- [12] Cheong KB, Song TH. Examination of solution methods for the second-order discrete ordinate formulation. Numer Heat Transf B, Vol.27, pp.155–73, 1995
- [13] Fiveland W.A. and Jessee J.P., Comparaison of discrete ordinates formulations for radiative heat transfert in multidirectional geometries. Journal of themophysics and heat transfer, Vol.9, no.1,1995.
- [14] Chai, J. C. Parthasarathy, G., Lee, H. S. and Patankar, S. V., AIAA J. Thermophys. Heat transfer, 1995, 9,410.
- [15] Chai, J. C., Moder, J. P. and Parthasarathy, G., AIAA Paper 96-1889, 1996.