

# Résolution analytique des équations du panache turbulent.

Ghislain MICHAUX<sup>1\*</sup>, Olivier VAUQUELIN<sup>2</sup>

<sup>1</sup>LEPTIAB, Université de La Rochelle

Pôle Sciences et Technologie, Avenue Michel Crépeau – 17042 La Rochelle

<sup>2</sup>IUSTI, Université d’Aix-Marseille, Technopôle de Château-Gombert, Unimeca, 60 rue Joliot Curie – 13453 Marseille

\* (auteur correspondant : ghislain.michaux@univ-lr.fr)

**Résumé** - Cet article présente un développement théorique permettant de résoudre analytiquement les équations du panache massique (ou thermique) rond turbulent se développant en champ libre dans un fluide ambiant au repos et non stratifié. Le modèle développé ici, de type intégral, met en évidence qu’à toute altitude au-dessus de la source de flottabilité, les variables principales du panache (rayon, vitesse verticale et masse volumique (ou température)) peuvent être exprimées en fonction d’un seul paramètre sans dimension  $\Gamma$ , appelé « fonction panache ».

## Nomenclature

$b$	rayon du panache, $m$	$\rho$	masse volumique, $kg.m^{-3}$
$g$	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$	$\Gamma$	fonction panache
$w$	vitesse verticale, $m.s^{-1}$	$\Delta\rho$	écart de masse volumique, $kg.m^{-3}$
$z$	altitude, $m$	$A$	échelle de longueur du panache, $m$
<i>Symboles grecs</i>		<i>Indices et exposants</i>	
$\alpha$	coefficient d’entraînement	$0$	conditions de source
$\beta$	rayon modifié du panache, $m$	$\infty$	conditions ambiantes
$\eta$	déficit de densité adimensionnel		

## 1. Introduction

Le travail théorique présenté ici s’inscrit dans la continuité des travaux initiés par Morton *et al.* [1] portant sur la modélisation intégrale du panache rond turbulent dans le cadre de l’approximation de Boussinesq (variations de masse volumique négligées excepté dans le terme de flottabilité). En intégrant le concept de « vitesse d’entraînement » en périphérie du panache, les auteurs ont établi les solutions affines (ou lois de similitude) qui permettent d’obtenir une description approchée du panache turbulent en champ lointain, dans la région affine du panache. A titre d’exemple, Heskestad [2] a démontré que l’utilisation de telles solutions permet de prédire de façon satisfaisante la dynamique d’un panache d’incendie au-delà de la hauteur de flamme.

Comme illustré schématiquement par la Figure 1, nous considérons le cas d’un panache rond massique (ou thermique) formé par le rejet vertical en champ libre d’un fluide plus léger (moins dense ou plus chaud) que le fluide ambiant au repos. Le régime d’écoulement est considéré comme étant turbulent, permanent et non vrillé. Pour ce type d’écoulement omniprésent dans l’environnement (par exemple issu d’une cheminée d’usine d’incinération ou formé par la rupture d’une canalisation sous-marine), les solutions affines établies par Morton *et al.* [1] ne permettent pas de décrire le comportement de l’écoulement juste au-dessus de la source de flottabilité. En particulier, comme l’indiquent Fannelöp et Webber [3], ces solutions approchées ne permettent pas de prédire l’apparition, à une certaine altitude et

sous certaines conditions, de phénomènes fluides particuliers tels que la formation d'un col (contraction du panache) et l'existence d'un pic de vitesse verticale (vitesse maximale).

L'objectif de ce travail est de résoudre analytiquement le problème de panache initialement défini par Morton *et al.* [1]. Celui-ci a plus récemment été étendu au cas des panaches à fortes variations de masse volumique (panache non-Boussinesq) par Rooney et Linden [4]. Il s'agit alors de déterminer les lois de variations théoriques des variables principales du panache (rayon  $b$ , vitesse verticale  $w$  et déficit de masse volumique  $\Delta\rho = \rho_\infty - \rho$ ) en fonction de l'altitude  $z$  et des conditions de source ( $\rho_0$ ,  $b_0$  et  $w_0$ ).

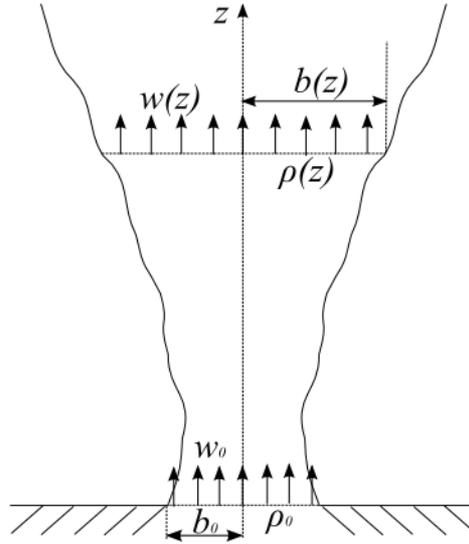


Figure 1 : Représentation schématique du panache rond turbulent en champ libre

## 2. Equations du panache turbulent

En adoptant les hypothèses de vitesse d'entraînement définies par Morton *et al.* [1] dans le cadre de l'approximation de Boussinesq et par Rooney et Linden [4] dans le cas général (panache non-Boussinesq), les équations de conservation des flux de masse, de quantité de mouvement et de déficit de masse volumique peuvent être écrites sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^j w b^2 \right] &= 2\alpha \left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\frac{j}{2}} w b, \\ \frac{d}{dz} \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^j w^2 b^2 \right] &= \frac{\Delta\rho}{\rho_\infty} g b^2, \\ \frac{d}{dz} (\Delta\rho w b^2) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Avec l'introduction de l'exposant « j », ce système d'équations permet de traiter le cas général du panache non-Boussinesq (en posant  $j = 1$ ) ainsi que le cas particulier du panache Boussinesq (en posant  $j = 0$ ) [5].

En introduisant le rayon modifié et le déficit de masse volumique adimensionnel respectivement définis par :

$$\beta = \left( \frac{\rho}{\rho_\infty} \right)^{\frac{j}{2}} b, \quad (2)$$

$$\eta = \frac{\Delta\rho}{\rho_\infty} \left( \frac{\rho_\infty}{\rho} \right)^j,$$

le système d'équations (1) peut être réécrit sous la forme généralisée suivante, qui est valable que l'on adopte ou non l'approximation de Boussinesq :

$$\frac{d}{dz} (w\beta^2) = 2\alpha\beta w,$$

$$\frac{d}{dz} (w^2\beta^2) = \eta g\beta^2, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dz} (\eta w\beta^2) = 0.$$

### 3. Fonction panache et paramètre de source

#### 3.1. Fonction panache $\Gamma$

Nous proposons de définir la « fonction panache », notée  $\Gamma$ , comme le nombre sans dimension suivant :

$$\Gamma = \frac{5g}{8\alpha} \frac{\eta\beta}{w^2}. \quad (4)$$

Cette fonction traduit l'importance relative des effets d'inertie et de flottabilité dans l'écoulement et on peut montrer [5] qu'elle a la propriété de tendre vers l'unité avec l'altitude quelque soient les caractéristiques de la source de flottabilité.

#### 3.2. Paramètre de source $\Gamma_0$

Définie à la source ( $z = 0$ ), la fonction panache correspond au paramètre de source  $\Gamma_0$  initialement défini par Morton [6] dans le cadre de l'approximation de Boussinesq, et plus récemment défini dans le cas général par Carlotti et Hunt [7]. Morton et Middleton [8] proposent de classer les panaches selon la valeur de ce paramètre de source comme suit :

- $\Gamma_0 < 1$  – le panache est dit « forcé » (dominé par sa quantité de mouvement au voisinage de la source) ;
- $\Gamma_0 > 1$  – à l'inverse, le panache est dit « paresseux » (dominé par sa flottabilité au voisinage de la source) ;
- $\Gamma_0 = 1$  – dans ce cas particulier, le panache est dit « pur » (effets de flottabilité et d'inertie équilibrés dès la source).

### 4. Solutions analytiques du panache turbulent

A partir du système d'équation (3) et en utilisant la définition de la fonction panache (4), nous établissons les expressions des dérivées premières, par rapport à l'altitude  $z$  au-dessus de la source de flottabilité, de chaque variable du panache :

$$\begin{aligned}
\frac{d\beta}{dz} &= \frac{4\alpha}{5} \left( \frac{5}{2} - \Gamma \right), \\
\frac{dw}{dz} &= -\frac{8\alpha}{5} \frac{w}{\beta} \left( \frac{5}{4} - \Gamma \right), \\
\frac{d\eta}{dz} &= -\frac{16\alpha^2}{5g} \left( \frac{w}{\beta} \right)^2 \Gamma.
\end{aligned} \tag{5}$$

Ces équations mettent notamment en évidence que le panache présente un col pour  $\Gamma = 5/2$  et un pic de vitesse verticale pour  $\Gamma = 5/4$ . De plus, en combinant ces équations à la définition de la fonction panache (4), nous obtenons l'équation différentielle relative à cette dernière :

$$\frac{d\Gamma}{dz} = 4\alpha \frac{\Gamma}{\beta} (1 - \Gamma). \tag{6}$$

Il apparait que, dans le cas particulier du panache pur ( $\Gamma_0 = \Gamma(z = 0) = 1$ ), la fonction panache reste constante et égale à l'unité avec l'altitude.

#### 4.1. Solutions analytiques du panache pur

Avec la condition supplémentaire  $\Gamma = \Gamma_0 = 1$ , les équations du système (5) peuvent être directement intégrées pour donner les solutions du panache pur :

$$\begin{aligned}
\frac{\beta(z)}{\beta_0} &= \frac{6\alpha}{5\beta_0} \left( z + \frac{5\beta_0}{6\alpha} \right), \\
\frac{w(z)}{w_0} &= \left( \frac{6\alpha}{5\beta_0} \right)^{\frac{1}{3}} \left( z + \frac{5\beta_0}{6\alpha} \right)^{-\frac{1}{3}}, \\
\frac{\eta(z)}{\eta_0} &= \left( \frac{6\alpha}{5\beta_0} \right)^{\frac{5}{3}} \left( z + \frac{5\beta_0}{6\alpha} \right)^{-\frac{5}{3}}.
\end{aligned} \tag{7}$$

#### 4.2. Solutions analytiques des panaches forcé et paresseux

A partir du système d'équations (5), on peut tout d'abord montrer [5] que chaque variable du panache dépend uniquement de la fonction panache  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\beta}{\beta_0} &= \left( \frac{\Gamma}{\Gamma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1 - \Gamma_0}{1 - \Gamma} \right)^{\frac{3}{10}}, \\
\frac{w}{w_0} &= \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1 - \Gamma}{1 - \Gamma_0} \right)^{\frac{1}{10}}, \\
\frac{\eta}{\eta_0} &= \left( \frac{\Gamma_0}{\Gamma} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1 - \Gamma}{1 - \Gamma_0} \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned} \tag{8}$$

En substituant ensuite dans l'équation (6)  $\beta$  par sa solution (8), nous obtenons les relations suivantes pour les panaches forcé et paresseux :

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{dz} &= \frac{1}{\Lambda} \Gamma^{\frac{1}{2}} (1-\Gamma)^{\frac{13}{10}} \quad \text{pour } \Gamma_0 < 1, \\ \frac{d\Gamma}{dz} &= -\frac{1}{\Lambda} \Gamma^{\frac{1}{2}} (\Gamma-1)^{\frac{13}{10}} \quad \text{pour } \Gamma_0 > 1,\end{aligned}\tag{9}$$

où  $\Lambda$  est une échelle de longueur qui est définie à partir des conditions de source :

$$\Lambda = \frac{\beta_0}{4\alpha} \frac{|1-\Gamma_0|^{\frac{3}{10}}}{\Gamma_0^{\frac{1}{2}}}.\tag{10}$$

Après intégration des équations (9), nous obtenons les relations suivantes entre l'altitude et la fonction panache :

$$\begin{aligned}\frac{z}{\Lambda} &= \mathfrak{S}(\Gamma) - \mathfrak{S}(\Gamma_0) \quad \text{pour } \Gamma_0 < 1, \\ \frac{z}{\Lambda} &= \mathfrak{K}(\Gamma) - \mathfrak{K}(\Gamma_0) \quad \text{pour } \Gamma_0 > 1,\end{aligned}\tag{11}$$

où  $\mathfrak{S}$  et  $\mathfrak{K}$  sont deux fonctions intégrales respectivement définies par :

$$\mathfrak{S}(X) = \int_0^X \gamma^{-\frac{1}{2}} (1-\gamma)^{-\frac{13}{10}} d\gamma \quad \text{et} \quad \mathfrak{K}(X) = \int_X^\infty \gamma^{-\frac{1}{2}} (1-\gamma)^{-\frac{13}{10}} d\gamma.\tag{12}$$

Pour des applications pratiques du modèle, des valeurs tabulées de ces fonctions intégrales peuvent être utilisées. En complément, nous proposons aussi des expressions approchées de  $\mathfrak{S}(X)$  et  $\mathfrak{K}(X)$  pour des valeurs limites de  $X$  :

$$\begin{aligned}\mathfrak{S}(X) &\cong 2X^{\frac{1}{2}} \quad \text{pour } X \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}(X) \cong \frac{10}{3} \left[ (1-X)^{-\frac{3}{10}} - 1 \right] \quad \text{pour } X \rightarrow 1^-, \\ \mathfrak{K}(X) &\cong \frac{10}{3} (X-1)^{-\frac{3}{10}} \quad \text{pour } X \rightarrow 1^+ \quad \text{et} \quad \mathfrak{K}(X) \cong \frac{5}{4} X^{-\frac{4}{5}} \quad \text{pour } X \rightarrow \infty.\end{aligned}\tag{13}$$

### 4.3. Exemple d'application du modèle

Nous proposons ici de déterminer la position et la valeur du pic de vitesse verticale. Celui-ci est atteint, d'après (5), pour  $\Gamma = 5/4$  ( $dw/dz = 0$ ) et ne concerne donc que les panaches paresseux ( $\Gamma_0 > 1$  et  $\Gamma(z) > 1$  à toute altitude). La valeur du maximum de vitesse, noté  $w_{\max}$ , est immédiatement déduite de (8) :

$$\frac{w_{\max}}{w_0} = \frac{w(\Gamma = 5/4)}{w_0} = \left( \frac{\Gamma_0}{5/4} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1/4}{\Gamma_0 - 1} \right)^{\frac{1}{10}}.\tag{14}$$

Pour des conditions de source données ( $w_0$  et  $\Gamma_0$  connus), la valeur de  $w_{\max}$  peut donc être directement calculée. De plus, l'altitude à laquelle apparaît le pic de vitesse, notée  $z_{\text{pic}}$ , peut aussi être déterminée. A partir de (11) et des valeurs tabulées de la fonction  $\mathfrak{K}$ , on obtient :

$$\frac{z_{\text{pic}}}{\Lambda} = \mathfrak{K}(5/4) - \mathfrak{K}(\Gamma_0) \cong 2.4624 - \mathfrak{K}(\Gamma_0),\tag{15}$$

où, d'après (10), l'échelle de longueur  $\Lambda$  est fixée par les conditions de source.

## 5. Conclusion

Le développement théorique présenté ici permet de résoudre analytiquement les équations du panache massique (ou thermique) rond turbulent se développant en champ libre dans un fluide ambiant au repos et non stratifié. Il constitue une contribution significative à la modélisation intégrale du problème de panache rond turbulent initialement défini par Morton *et al.* [1]. En effet, en définissant un jeu de variables approprié, les équations du panache ont été réécrites sous une forme valable que l'on adopte ou non l'approximation de Boussinesq. En introduisant ensuite un paramètre sans dimension  $\Gamma$ , appelé « fonction panache », nous obtenons qu'à toute altitude les variables du panache dépendent uniquement de  $\Gamma$  (et des conditions de sources, supposées connues). A la source, la fonction panache correspond au paramètre de source,  $\Gamma_0$ , connu pour caractériser la nature du panache : forcé, pur ou paresseux. Dans le cas particulier du panache pur, nous obtenons les expressions analytiques exactes et explicites des variations avec l'altitude au-dessus de la source des variables principales du panache : son rayon, la vitesse verticale et la masse volumique (ou, de façon équivalente, la température). Dans le cas général des panaches paresseux et forcé, nous mettons en évidence que, pour des conditions de source données, la fonction panache  $\Gamma$  (et, par conséquent, toutes les variables du panache) peut être évaluée à n'importe quelle altitude via deux fonctions intégrales définies pour les panaches forcé et paresseux, respectivement. Pour une utilisation pratique du modèle théorique développé, ces fonctions peuvent être tabulées. A titre d'exemple, les expressions exactes du pic de vitesse et de l'altitude à laquelle apparaît ce pic de vitesse sont déterminées à partir des expressions analytiques établies.

## Références

- [1] B. Morton, G. Taylor, J. Turner, Turbulent gravitational convection from maintained and instantaneous sources, *Proc. Royal Soc.* (London, 1956).
- [2] G. Heskestad, Dynamics of the fire plume, *The Royal Society*, 356 (1998), 2815-2833.
- [3] T. Fannelöp, D. Webber, on buoyant plumes rising from area sources in a calm environment, *J. Fluid Mech.*, 497 (2003), 319-334.
- [4] G. Rooney, P. Linden, Similarity considerations for non-Boussinesq plumes in an unstratified environment, *J. Fluid Mech.*, 318 (1996), 237-250.
- [5] G. Michaux, Etudes sur la dynamique d'un panache massique en champ libre et en milieu confiné ventilé. Application à la simulation sur maquette des feux en tunnels, *Thèse de doctorat de l'Université de la Méditerranée* (2007).
- [6] B. Morton, Forced plumes, *J. Fluid Mech.*, 5 (1959), 151-163.
- [7] P. Carlotti, G. Hunt, Analytical solutions for turbulent non-Boussinesq plumes, *J. Fluid Mech.*, 538 (2005), 343-359.
- [8] B. Morton, J. Middleton, Scale diagrams for forced plumes, *J. Fluid Mech.*, 58 (1973), 165-176.