

Conséquences du confinement dans le transfert de chaleur sur une sphère dans un fluide non newtonien

Antoine DESPEYROUX¹, Abdelhak AMBARI^{1*}, Abderrahim BEN RICHOUE², Stéphane CHAMPMARTIN¹

¹Arts et Métiers ParisTech, EMT /LAMPA, 2 bd du Ronceray, BP 93525, 49035 Angers cedex 01

²EMET – Faculté des Sciences et Techniques de Beni-Mellal – BP 523 – Maroc

* (auteur correspondant : abdelhak.ambari@angers.ensam.fr)

Résumé – Le phénomène de transfert de chaleur ou de masse sur une particule sphérique en situation d’interactions hydrodynamiques et thermiques ou massiques est d’un intérêt majeur pour de nombreux problèmes rencontrés dans les procédés industriels faisant intervenir des particules en suspension [1]. Nous avons contribué par ce travail à l’étude de l’influence du confinement sur les phénomènes de transfert en présence d’un fluide de type loi de puissance. La comparaison des résultats numériques avec les calculs asymptotiques effectués par nous-mêmes et ceux obtenus par Acrivos confirment la validité des calculs. Dans le cas des fluides non newtoniens, il apparaît que la rhéofluidification est favorable aux phénomènes de transfert contrairement au cas rhéoépaississant.

Nomenclature

a	rayon de la sphère, m	Sc	nombre de Schmidt
b	rayon du tube, m	Sh	nombre de Sherwood
C	concentration en soluté, $kg.m^{-3}$	t	temps, s
C_p	chaleur spécifique du fluide, $J.kg^{-1}.K^{-1}$	U_0	vitesse de translation de la sphère, $m.s^{-1}$
D	coefficient de diffusion moléculaire ou diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>	
\underline{D}	tenseur taux de déformations, s^{-1}	δ	épaisseur de couche limite, m
D_{II}	second invariant du tenseur taux de déformations, s^{-1}	ε	distance réduite à la paroi du cylindre
k	coefficient de confinement	φ	densité de flux thermique, $W.m^{-2}$
m	consistance, $Pa.s^n$	ϕ_m	flux massique autour de la sphère, $kg.s^{-1}$
n	indice de fluidité	ϕ_s	flux total de chaleur autour de la sphère,
Nu	nombre de Nusselt	W	
p	pression, Pa	λ	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$
Pe	nombre de Péclet	ψ	fonction de courant, $kg.s^{-1}$
T	température, K	ω	vorticité, s^{-1}
T_s	température à la surface de la sphère, K	ρ	masse volumique du fluide, $kg.m^{-3}$
T_f	température du fluide, K	$\underline{\sigma}$	tenseur des contraintes, Pa
Re_n	nombre de Reynolds généralisé	<i>Indices</i>	
		c	grandeur caractéristique
		$+$	grandeur adimensionnée

1. Introduction

L’effet du confinement sur la correction de la force hydrodynamique subie par une sphère a été étudié auparavant dans le cas newtonien [2] et dans le cas d’un fluide en loi de puissance [3]. Dans ce travail, nous allons présenter l’effet de ce confinement sur les phénomènes de transfert de chaleur ou de masse. Une comparaison avec des résultats asymptotiques aux forts confinements est effectuée. Cependant, comme la plupart des fluides non newtoniens se

caractérisent par un comportement rhéofluidifiant ou rhéoépaississant (en l'absence de très forts gradients élongationnels), nous avons adopté le modèle d'Ostwald. Dans ces conditions, la longueur d'écran hydrodynamique ($\xi \sim 1/r^{1/n}$) aux faibles nombres de Reynolds généralisés $Re_n = \rho U_0^{2-n} (2a)^n / m$ peut être contrôlée au travers de l'indice de fluidité n . Le transfert de chaleur sur une particule sphérique sera donc sensible d'une part au rapport entre l'épaisseur de couche limite thermique ou massique et la longueur d'écran hydrodynamique, et d'autre part à la distance entre la particule et la paroi du cylindre dans lesquelles elle est confinée. Vu la difficulté de l'obtention d'une solution analytique hors du régime asymptotique, nous avons opté pour une résolution numérique par la méthode des différences finies des équations dynamiques et de l'équation d'énergie en formulation fonction de courant ψ et de vorticité ω , écrites dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales épousant parfaitement le contour de la sphère et les parois cylindriques du tube. L'ensemble des résultats a été validé par l'utilisation d'une autre méthode numérique du type volumes finis et par comparaison avec les résultats obtenus par des calculs asymptotiques.

2. Formulation et résolution du problème

Notre objectif est d'étudier l'influence du confinement sur le transfert de chaleur et de masse au travers d'une particule sphérique de rayon a se déplaçant à la vitesse constante U_0 (maintenue à la température T_s) dans l'axe d'un tube de rayon $b = a/k$ rempli d'un fluide d'Ostwald (à la température T_f) dont la loi de comportement est décrite par : $\underline{\underline{\sigma}} = -p\underline{\underline{\delta}} + 2m(2D_{II})^{(n-1)/2} \underline{\underline{D}}$ où $\underline{\underline{\sigma}}$ est le tenseur des contraintes, $\underline{\underline{D}} = (1/2)(\underline{\underline{\nabla}}\vec{u} + \underline{\underline{\nabla}}^t\vec{u})$ le tenseur taux de déformations où $D_{II} = tr(\underline{\underline{D}}^2)$ est son second invariant et \vec{u} la vitesse de l'écoulement. Cette loi décrit un comportement rhéofluidifiant (*pour* $n < 1$) ou rhéoépaississant (*pour* $n > 1$). La viscosité apparente d'un tel fluide est donnée par : $\mu_a = m(2D_{II})^{(n-1)/2}$. Cet écoulement s'effectue à des nombres de Reynolds généralisés très faibles $Re_n \ll 1$, dans des fluides dont le nombre de Prandtl (ou de Schmidt dans le cas massique) est suffisamment élevé pour conduire à des nombres de Péclet $Pe = 2aU_0/D$ allant du régime purement diffusif au régime convectif où D correspond au coefficient de diffusion massique dans le cas d'un transfert de masse, ou à la diffusivité thermique dans le cas d'un transfert de chaleur ($D_{th} = \lambda/\rho C_p$). Dans ce travail, les coefficients de diffusion sont supposés dans une première approximation indépendants de l'hydrodynamique, mais dépendants uniquement de la concentration dans le cas massique car nous sommes concernés principalement par les solutions semi-diluées de polymères ($D_m \sim C^{3/4}$) [4], et par conséquent seront supposés constants dans cette étude. Le problème traité ici peut se réduire à la résolution, dans le cas thermique, des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement complétées par l'équation de l'énergie suivantes :

$$\begin{cases} \underline{\underline{\nabla}} \cdot \vec{u} = 0 \\ \rho \left(\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \underline{\underline{\nabla}}) \vec{u} \right) = -\underline{\underline{\nabla}} p + \underline{\underline{\nabla}} \cdot (\mu_a \underline{\underline{D}}) \\ \rho C_p \left(\partial_t T + \vec{u} \cdot \underline{\underline{\nabla}} T \right) = \lambda \Delta T \end{cases} \quad (1)$$

Ces équations ont été résolues sous forme adimensionnelle par l'utilisation de la longueur, de la vitesse, de la pression et du temps caractéristiques respectifs suivants : $l_c = a$, $U_c = U_0$, $p_c = m(U_0/a)^n$, $t_c = \rho a^2 / (m(U_0/a)^{n-1})$. La température adimensionnelle a été définie comme suit : $T_+ = (T - T_s) / (T_f - T_s)$. Le nombre de Nusselt calculé est défini par :

$$Nu(k, n, Pe) = \phi_s(k, n, Pe) / 2\pi a \lambda (T_s - T_f) \quad (2)$$

obtenu par le rapport du flux total de chaleur ϕ_s autour de la sphère normalisé par un flux caractéristique égal à $\phi_c = 4\pi a^2 \lambda \Delta T / 2a$. Ce flux normalisé dépend du confinement $k = a/b$ et de la loi de comportement du fluide par le biais de son indice de fluidité n . Rappelons que dans le cas massique, le nombre sans dimension correspondant au nombre de Nusselt est le nombre de Sherwood $Sh = \phi_m / 2\pi a D \Delta C$. Le passage de Nusselt au nombre de Sherwood consiste à remplacer le flux de chaleur $\phi_s(k, n, Pe)$ par $\phi_m(k, n, Pe) \cdot \rho C_p$.

La résolution numérique a été effectuée par l'application de la méthode des différences finies aux équations dynamiques et à l'équation d'énergie en formulation fonction de courant ψ et de vorticité ω , écrites dans un système de coordonnées curvilignes orthogonales, épousant parfaitement le contour de la sphère et les parois cylindriques du tube. Le maillage est généré par l'emploi de la méthode des singularités [5-8]. Celle-ci consiste en la détermination des équipotentielles et des lignes de courant par la résolution du problème associé à l'écoulement d'un fluide parfait incompressible et irrotationnel. Le maillage fourni par ces équipotentielles et ces lignes de courant est utilisé en tant que transformation conforme numérique pour la génération d'un maillage orthogonal de notre géométrie. Sur ce maillage, les techniques (A.D.I.) et (S.O.R.) [9] sont appliquées pour calculer les fonctions de ψ et ω de l'écoulement du fluide en loi de puissance suivant un schéma du deuxième ordre en temps et en espace. Le critère de convergence est défini à partir de : $\left| (Nu^{i+1}(k, n, Pe) - Nu^i(k, n, Pe)) / Nu^{i+1}(k, n, Pe) \right| < 10^{-6}$. Pour plus de détails, cette technique est bien décrite dans Ben Richou *et al.* [2]. Les résultats ainsi obtenus ont été comparés avec succès à ceux obtenus à l'aide du code de type volumes finis « FLUENT », pour lequel l'algorithme SIMPLE a été utilisé avec le schéma QUICK sur un maillage structuré en adoptant le même critère de convergence utilisé précédemment, confirmant ainsi la validité des deux méthodes. La résolution du problème dynamique nous a permis avec cette technique, d'une part d'améliorer les résultats précédemment obtenus par différents auteurs pour les facteurs de correction de la force de traînée pour $k \leq 0.5$ et d'autre part d'étendre ces calculs au régime de fort confinement ($0.1 \leq k \leq 0.99$) jusqu'au régime de lubrification. Après la validation des solutions du problème dynamique, nous avons tenu à appliquer cette méthode au problème des transferts de chaleur ou de masse.

3. Résultats et discussion

3.1. Cas du fluide newtonien ($10^{-6} \leq k \leq 0.99$, $10^{-6} \leq Pe \leq 10^5$)

Les résultats de la figure 1 montrent l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du confinement pour $10^{-6} \leq k \leq 0.99$ et $10^{-6} \leq Pe \leq 10^5$. Pour valider nos calculs, sur la figure 2, les résultats numériques obtenus dans le cas d'un milieu illimité $k = 10^{-6} \approx 0$ sont comparés

avec succès à ceux obtenus analytiquement pour $Pe < 1$ [10,11] et pour $Pe > 5$ [12] donnés respectivement par les formules (3) et (4).

$$Nu(Pe < 1) = 2 + \frac{Pe}{2} + \frac{1}{4} Pe^2 \ln \frac{Pe}{2} + 0.2073 Pe^2 + \frac{1}{16} Pe^3 \ln \frac{Pe}{2} \quad (3)$$

$$Nu(Pe > 5) = 1.249 \left(\frac{Pe}{2} \right)^{1/3} + 0.922 \quad (4)$$

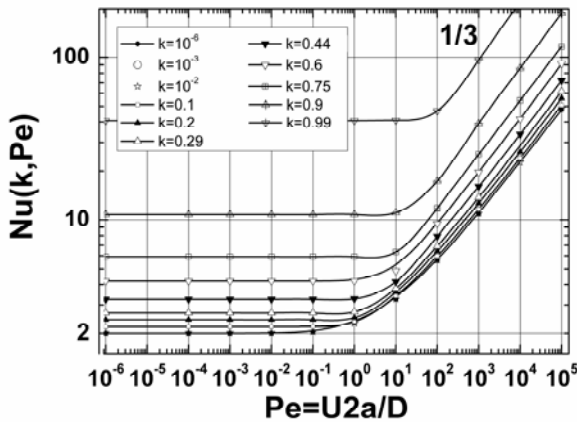


Figure 1 : Nusselt en fonction du nombre de Péclet pour différents confinements

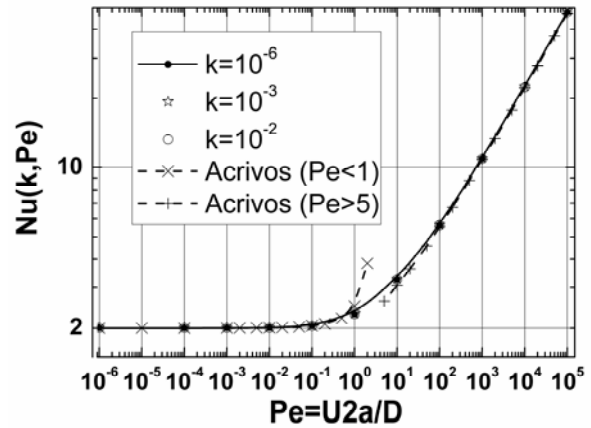


Figure 2 : Evolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Péclet en milieu illimité

Il faut noter cependant que l'obtention des grands nombres de Péclet pour de faibles nombres de Reynolds n'est possible que pour de grands nombres de Prandtl ou de Schmidt, ce qui est possible dans le cas des fluides très visqueux. Sur la figure 1, le confinement n'affecte pas l'évolution en $Nu \sim Pe^{1/3}$ comme le prévoient nos calculs asymptotiques analytiques. Cependant, la figure 3 montre en régime de diffusion pure une évolution du nombre de Nusselt en $\varepsilon^{-1/2}$, ce qui est en très bon accord avec notre calcul asymptotique qui conduit à la relation suivante en régime de lubrification : $Nu(k, Pe = 0) \approx \pi\sqrt{2}\varepsilon^{-1/2}$.

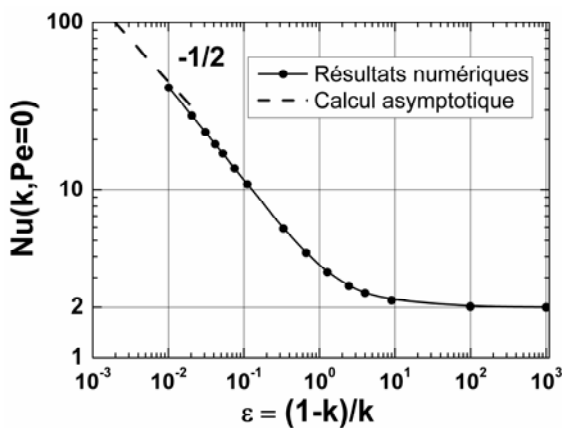


Figure 3 : Nombre de Nusselt en fonction du confinement aux faibles nombres de Péclet

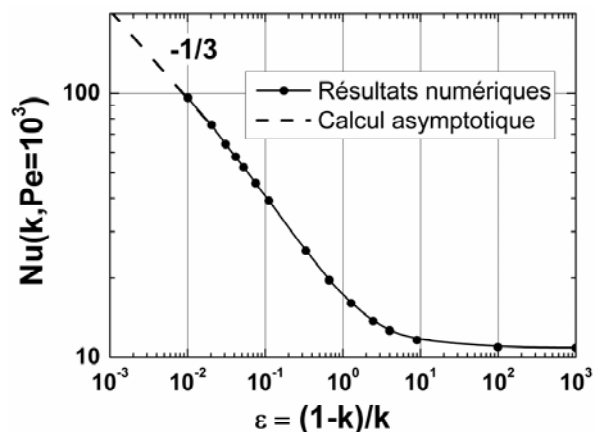


Figure 4 : Nusselt en fonction du confinement aux grands Péclet

Cependant, en régime convectif, pour $Pe = 10^3$, la figure 4 montre que le nombre de Nusselt varie en $\varepsilon^{-1/3}$ pour les forts confinements. Ce comportement est confirmé par nos développements asymptotiques effectués en régime de lubrification qui aboutissent au résultat

suivant pour l'évolution du nombre de Nusselt en fonction de Pe et de la distance à la paroi

$$\text{du cylindre } \varepsilon : Nu(k, Pe) \approx \frac{3^{2/3}}{2} \frac{\Gamma(1/3)}{\Gamma(2/3)} \left(\frac{Pe}{\varepsilon} \right)^{1/3}.$$

A ce stade, nos résultats numériques obtenus dans le cas du fluide newtonien et confirmés par nos calculs asymptotiques en régime de lubrification d'une part, et par les développements asymptotiques aux faibles et grands nombres de Péclet en milieu illimité par Acrivos *et al.* d'autre part, prouvent la validité de notre approche. Partant, nous avons appliqué cette technique aux fluides non newtoniens.

3.2. Cas d'un fluide en loi de puissance ($10^{-6} \leq k \leq 0.99$, $10^{-6} \leq Pe \leq 10^5$)

Les résultats de la figure 5 montrent l'évolution du nombre de Nusselt en fonction du nombre de Péclet en milieu illimité. On remarque évidemment que le régime de diffusion pure est insensible à la loi de comportement du fluide et que $Nu = 2$ jusqu'à $Pe \approx 0.1$. Au-delà, le régime convectif montre une évolution en $Nu \sim Pe^{\alpha(n)}$ où l'exposant $\alpha(n)$ dépend de l'indice de fluidité n . Cette figure montre clairement qu'en milieu infini, les fluides rhéofluidifiants sont plus favorables à un rehaussement des phénomènes de transfert, contrairement aux fluides rhéoépaississants. En effet, ce résultat peut s'interpréter aisément par le fait que dans le cas des fluides rhéofluidifiants, la longueur d'écran du champ hydrodynamique réduit fortement l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique et par conséquent celle massique ou thermique. Ceci a pour conséquence une augmentation du flux $\varphi \sim \lambda \Delta T / \delta$. Le contraire ayant lieu dans le cas des fluides rhéoépaississants. La figure 6 montre l'influence du confinement sur l'évolution du nombre de Nusselt pour $Pe = 10^3$, pour différentes valeurs de n . Quand la distance aux parois est supérieure à la longueur d'écran hydrodynamique, il n'est pas surprenant que le flux ne dépende plus du confinement pour les fluides rhéofluidifiants ; dans le cas des fluides rhéoépaississants dont la longueur d'écran est grande lorsque $n \rightarrow 2$ le régime plateau n'est atteint qu'à de grandes distances. Cependant, en régime de lubrification, correspondant à un régime concentré d'une suspension de particules sphériques, le flux est principalement contrôlé par la distance interparticules et de ce fait on retrouve le régime en $\varepsilon^{-1/3}$.

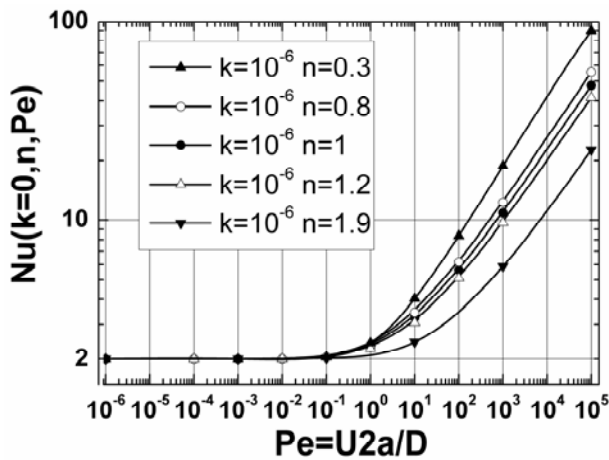


Figure 5 : Nusselt en fonction du nombre de Péclet en milieu illimité, en fluide d'Ostwald

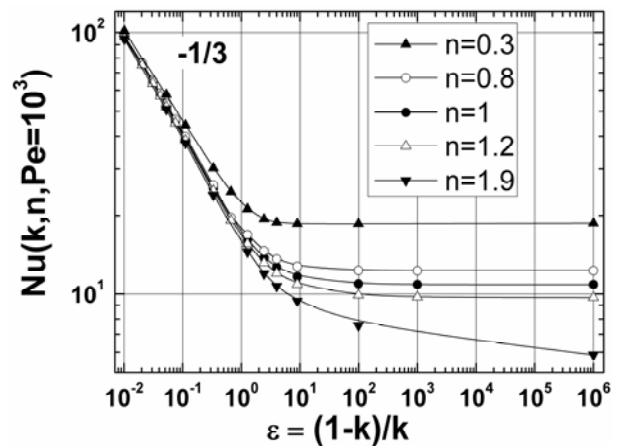


Figure 6 : Nusselt en fonction du confinement aux grands Péclet, en fluide d'Ostwald

4. Conclusion

Par l'utilisation d'une technique numérique du type $\psi - \omega$, et d'un maillage effectué par une transformation conforme numérique, nous avons pu obtenir des résultats nouveaux concernant l'influence du confinement sur le transfert de chaleur ou de masse sur une particule solide en présence d'interactions hydrodynamiques. Ces résultats sont confrontés avec succès à ceux obtenus à partir d'un développement asymptotique en régime de lubrification. La comparaison avec les développements asymptotiques aux faibles et grands nombres de Péclet obtenus par Acrivos *et al.* en milieu infini a été effectuée avec succès. Ces deux comparaisons confirment la validité de la méthodologie utilisée. Par conséquent, l'utilisation de cette technique a été étendue au cas non newtonien. Les résultats des calculs montrent clairement que les fluides rhéofluidifiants sont favorables au transfert de chaleur car leur longueur d'écran hydrodynamique décroît lorsque n décroît. L'effet contraire est observé dans le cas rhéoépaississant. Aux forts confinements, la faible distance entre particule et paroi vient réduire la couche limite de diffusion et par conséquent contrôle totalement le transfert de façon indépendante de la loi de comportement du fluide en régime convectif.

Références

- [1] R. Clift, J. J. Grace and M. E. Weber, *Bubbles, Drops and Particles*, Ed. Academic press (1978).
- [2] A. Ben Richou, A. Ambari and J.K. Naciri, Correction factor of the Stokes force undergone by a sphere in the axis of a cylinder in uniform and Poiseuille flows, *Eur. Phys. J. Appl.*, 24 (2003), 153-165.
- [3] A. Despeyroux, A. Ambari, A. Ben Richou, The Stokes type force undergone by a sphere in unbounded power-law fluids and hydrodynamic interactions effects, article soumis pour publication au *Journal of Fluid Mechanics*.
- [4] T. Pollak and W. Köhler, Critical assessment of diffusion coefficients in semidilute to concentrated solutions of polystyrene in toluene, *J. Chem. Phys.*, 130 (2009), 124905.
- [5] T. S. Luu et T. A. Phuoc Loc, Développement d'une méthode numérique pour la détermination d'écoulement visqueux incompressible autour d'une grille d'aubes, *Journal de Mécanique des Fluides appliqués*, 5-4 (1981), 483-507.
- [6] T. S. Luu et G. Coulmy, Principe et application de la méthode des singularités à répartition discrétisée en hydro et aérodynamique, *Notes et Documents LIMSI*, 11 Novembre 1990.
- [7] T. S. Luu et G. Coulmy, Design problem of the profile or the cascade of profiles and construction of orthogonal networks using the Riemann surfaces for the multiform singularities, IUTAM symposium on advanced Boundary element methods : application in solid and fluid mechanics, San (13-16 April 1987), *Computational mechanics*, 4-4 (1989), 309-317.
- [8] J. Katz and A. Plotkin, *Low speed aerodynamics*, McGraw-Hill Book Co., New York, N.Y., series in Aeronautical and Aerospace Engineering (1991).
- [9] R. Peyret and T. D. Taylor, *Computational methods for fluid flows*, Springer-Verlag, N.Y. (1985).
- [10] A. Acrivos, A note on the rate of heat or mass transfer from a small particle freely suspended in linear shear field, *J. Fluid Mech.*, 98 (1980), 299-304.
- [11] L.G. Leal, *Laminar flow and convective transport processes*, Butterworth-Heinemann, Boston (1992).
- [12] A. Acrivos and J.D. Goddard, Asymptotic expansions for laminar forced convection heat and mass transfer. Part I. Low speed flows, *J. Fluid Mech.*, 23 (1965), 273.