

Prise en compte du biais de modèle dans le calcul des écarts-types des paramètres identifiés par méthode inverse

Fermin URIZ^{1*}, Benjamin REMY¹, Alain DEGIOVANNI¹ et Olivier VERSEUX²

¹Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée (LEMTA-ENSEM)
LEMTA, Nancy-Université, CNRS, 02 avenue de la Forêt de Haye, BP 160
54 504 Vandoeuvre-Lès-Nancy Cedex

²AIRBUS, Powerplant Center of Competence / EDET30
316 route de Bayonne – B.P M0112/5 31060 TOULOUSE Cedex 09

* (auteur correspondant : fermin.uriz@ensem.inpl-nancy.fr)

Résumé - L'objet de ce travail est de présenter une méthode permettant de prendre en compte le biais de modèle dans le calcul des écarts-types des paramètres identifiés par méthode inverse. L'intérêt de la méthode proposée est qu'elle permet d'intégrer le biais de modèle dans le calcul des écarts-types sans en connaître explicitement l'origine. On montre en particulier que l'erreur commise peut s'exprimer uniquement en fonction de grandeurs connues : les sensibilités des paramètres identifiés, la courbe des résidus et les paramètres estimés. A titre d'illustration, cette méthode sera appliquée au cas de la méthode Flash.

Nomenclature

b	vecteur paramètres estimés		(<i>exposants et indices</i>)
F	modèle non biaisé		
e_b	erreur sur les paramètres	<i>r</i>	paramètres recherchés (estimés)
U	solution du système linéaire	*	grandeur biaisée
X	matrice de sensibilité	<i>c</i>	paramètres non recherchés (fixés)
Y	courbe expérimentale	<i>nom</i>	valeurs nominales des paramètres
β	vecteur paramètres réels	<i>p</i>	projection
ε	vecteur bruit (supposé blanc)	0	noyau
λ	valeur propre	<i>n</i>	nombre d'observations depuis l'origine
∇	gradient	<i>N</i>	nombre total de points

1. Introduction

Dans le cadre de l'intégration des systèmes propulsifs des avions, la société AIRBUS est amenée à extrapoler les températures des équipements aux cas extrêmes de l'enveloppe de vol, qui représente toutes les conditions de température susceptibles d'être rencontrées au cours d'un vol. Pour pouvoir valider la température de chaque équipement dans cette enveloppe, il faudrait disposer d'essais réalisés aux frontières. Or, tous les essais en vol sont confrontés aux contraintes climatiques et opérationnelles qui ne permettent pas d'explorer tout le domaine. C'est pourquoi AIRBUS a besoin d'élaborer des méthodes d'extrapolation de température, de manière à prédire le comportement thermique des matériaux et des équipements dans les conditions les pires [1].

Les nouvelles voies investiguées sont basées sur des méthodes inverses, précisément sur l'estimation de paramètres [2]. Les valeurs des paramètres obtenus dépendent de plusieurs facteurs, dont certains aléatoires comme le bruit de mesure sur les capteurs par exemple.

A chaque paramètre est associée une variance (incertitude sur le paramètre identifié) qu'il est important de connaître car l'intervalle de confiance sur la température recalculée est

directement fonction de cette grandeur. Les variances dépendent non seulement du bruit de mesure mais aussi des sensibilités et des corrélations entre paramètres. Pour améliorer l'estimation des paramètres les plus sensibles et limiter les corrélations entre paramètres, une idée consiste à réduire le nombre de paramètres du modèle, en fixant certains d'entre eux à des valeurs nominales ou en fixant leurs valeurs à zéro (suppressions des paramètres). On introduit alors un biais sur le modèle qui se traduit par un erreur systématique ou biais sur les paramètres du modèle laissés libres et qui font l'objet de l'identification. Dans notre application, il est particulièrement important de maîtriser les variances sur les paramètres car on cherche ensuite à partir de ces paramètres identifiés à extrapoler les températures calculées dans des conditions différentes de celles utilisées pour l'estimation.

Si l'erreur stochastique liée au bruit de mesure peut être évaluée facilement de façon analytique à partir de grandeurs connues (bruits de mesures, courbes de sensibilités [2]), ce n'est pas le cas du biais de modèle qui est fonction de paramètres a priori inconnus comme les sensibilités des paramètres du modèle non biaisé. Le but de cette étude est de montrer qu'il est possible de remonter à cette information à partir de grandeurs connues, la courbe des résidus qui dans le cas d'un modèle biaisé est « signée ».

2. Méthode des moindres carrés appliquée à un modèle biaisé

La méthode des moindres carrés consiste à minimiser une fonctionnelle (norme), généralement la somme des moindres carrés ordinaires entre une courbe expérimentale et un modèle théorique décrivant l'expérience :

$$S_{LS} = (\mathbf{Y} - \mathbf{F}^*)^T (\mathbf{Y} - \mathbf{F}^*) \quad (1)$$

Il existe de nombreux algorithmes de minimisation de cette norme : méthode de Gauss, méthode de la plus forte pente ou de la plus grande descente ou encore la méthode de Levenberg-Marquardt [3] qui est une méthode de gradient avec régularisation.

On peut décomposer le vecteur paramètre $\boldsymbol{\beta}$ en une composante inconnue $\boldsymbol{\beta}_r$ qui fait l'objet de l'identification et en une composante supposée connue $\boldsymbol{\beta}_c$, soit : $\boldsymbol{\beta} = (\boldsymbol{\beta}_r | \boldsymbol{\beta}_c)$.

On définit $\mathbf{F}(t, \boldsymbol{\beta}_r, \boldsymbol{\beta}_c)$ le modèle théorique supposé exact (i.e sans biais) et $\mathbf{F}^*(t, \boldsymbol{\beta}_r^*, \mathbf{b}_{cnom})$ le modèle théorique biaisé, qui dépend du vecteur paramètres $\boldsymbol{\beta}_r^*$ (paramètres recherchés réels du modèle biaisé) et \mathbf{b}_{cnom} (valeurs nominales des paramètres). Minimiser S_{LS} par rapport aux paramètres recherchés $\boldsymbol{\beta}_r^*$ revient à annuler ses dérivées. Soit :

$$\nabla_{\boldsymbol{\beta}_r^*} S_{LS} = 2(\nabla_{\boldsymbol{\beta}_r^*} (\mathbf{Y} - \mathbf{F}^*)^T)(\mathbf{Y} - \mathbf{F}^*) = -2(\nabla_{\boldsymbol{\beta}_r^*} \mathbf{F}^{*T})(\mathbf{Y} - \mathbf{F}^*) = \mathbf{0} \rightarrow \mathbf{X}_r^{*T} (\mathbf{Y} - \mathbf{F}^*) = \mathbf{0} \quad (2)$$

\mathbf{X}_r^* représente la matrice de sensibilités du modèle par rapport aux paramètres recherchés $\boldsymbol{\beta}_r^*$. On voit alors que la solution au sens des moindres carrés consiste à minimiser le produit scalaire entre les sensibilités \mathbf{X}_r^* et les résidus $(\mathbf{Y} - \mathbf{F}^*)$ (vecteur des résidus orthogonal à la matrice des sensibilités). Quel que soit l'algorithme choisi, avec ou sans régularisation, toutes les méthodes de gradient consistent dans le cas non-linéaire à mettre en place un processus itératif (une suite convergente dont la limite tend vers la solution de notre problème), obtenu après linéarisation du modèle au voisinage de la solution (Voir [2-3]). Dans le cas d'un modèle biaisé, le modèle linéarisé au premier ordre s'écrit au voisinage de la solution :

$$\mathbf{F}^*(\mathbf{t}, \mathbf{b}_r^*, \mathbf{b}_{cnom}) = \mathbf{F}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\beta}_r, \boldsymbol{\beta}_c) + \mathbf{X}_r (\mathbf{b}_r^* - \boldsymbol{\beta}_r) + \mathbf{X}_c (\mathbf{b}_{cnom} - \boldsymbol{\beta}_c) \quad (3)$$

On définit l'erreur commise sur les paramètres connus par : $\mathbf{e}_{b_c} = \mathbf{b}_{cnom} - \boldsymbol{\beta}_c$. La courbe expérimentale est quant à elle fonction des paramètres réels, on a :

$$\mathbf{Y}(\mathbf{t}) = \mathbf{F}(\mathbf{t}, \boldsymbol{\beta}_r, \boldsymbol{\beta}_c) + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{t}) \quad (4)$$

En injectant l'expression de la réponse expérimentale et celle du modèle développé au premier ordre, on obtient la relation suivante donnant l'erreur entre le paramètre identifié à partir du modèle biaisé \mathbf{b}_r^* et le paramètre réel $\boldsymbol{\beta}_r$:

$$\mathbf{b}_r^* - \boldsymbol{\beta}_r = -(\mathbf{X}_r^{*T} \mathbf{X}_r)^{-1} \mathbf{X}_r^{*T} \mathbf{X}_c \mathbf{e}_{\beta c} + (\mathbf{X}_r^{*T} \mathbf{X}_r)^{-1} \mathbf{X}_r^{*T} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (5)$$

Les valeurs estimées des paramètres qui ont fait l'objet de l'identification sont affectées de deux types d'erreurs: une erreur aléatoire liée au bruit du signal expérimental $\boldsymbol{\varepsilon}$ dont l'étude est classique [2] et une erreur systématique liée au fait que les valeurs nominales introduites sont différentes des valeurs réelles ($\mathbf{e}_{\beta c} \neq 0$).

3. Expression du biais et estimation de ce biais à partir d'un intervalle constant et d'un intervalle variable

En calculant, pour l'intervalle d'estimation complet, l'espérance de l'estimateur et celle des résidus générés à partir de l'estimation biaisée, on obtient les expressions suivantes :

$$E(\mathbf{b}_r^*) = \boldsymbol{\beta}_r - (\mathbf{X}_r^{*T} \mathbf{X}_r)^{-1} \mathbf{X}_r^{*T} \mathbf{X}_c \mathbf{e}_{\beta c} \quad - E(\mathbf{r}) = (\mathbf{I} - \mathbf{X}_r (\mathbf{X}_r^{*T} \mathbf{X}_r)^{-1} \mathbf{X}_r^{*T}) \mathbf{X}_c \mathbf{e}_{\beta c} \quad (6)$$

Ces relations permettent de relier le biais à l'espérance des résidus, et par suite de remonter théoriquement au biais à partir de grandeurs connues \mathbf{X}_r et $E(\mathbf{r})$.

$$\mathbf{biais} = E(\mathbf{b}_r^*) - \boldsymbol{\beta}_r = (\mathbf{X}_r^{*T} \mathbf{X}_r)^{-1} \mathbf{X}_r^{*T} (\mathbf{I} - \mathbf{X}_r (\mathbf{X}_r^{*T} \mathbf{X}_r)^{-1} \mathbf{X}_r^{*T})^{-1} E(\mathbf{r}) = (\mathbf{X}_r^{*T} \mathbf{X}_r)^{-1} \mathbf{X}_r^{*T} \mathbf{A}^{-1} E(\mathbf{r}) \quad (7)$$

En pratique, nous nous sommes heurtés à une difficulté liée à l'inversion de la matrice \mathbf{A} de la relation (7) qui est singulière (voir Section 4 pour plus de détails). Ceci signifie en particulier qu'il n'est pas possible de remonter à l'origine du biais à partir des résidus (voir (6)) et que différentes sources de biais peuvent conduire à une même courbe de résidus. La relation (7) montre aussi qu'il n'est pas possible d'estimer le biais sur les paramètres qui cependant est unique sans apporter d'informations complémentaires. Partant du principe que dans le cas d'un modèle biaisé, les valeurs des paramètres identifiés varient en fonction de l'intervalle d'estimation, nous nous sommes alors intéressés à la possibilité d'identifier le biais, à partir d'estimation réalisées sur un intervalle de temps variable.

Afin de mieux comprendre cette démarche, on va simplifier notre estimation en négligeant le bruit de mesure $\boldsymbol{\varepsilon}$, ce qui n'est pas un problème en soi car les deux erreurs sont

indépendantes (voir relation 5). On a alors en posant $\mathbf{X}_{rk}^{*T} \mathbf{X}_{rk} = \sum_{i=1}^k \mathbf{X}_r^{*T}(i) \mathbf{X}_r(i)$:

$$\mathbf{biais} = \mathbf{b}_r^* - \boldsymbol{\beta}_r = -(\mathbf{X}_r^{*T} \mathbf{X}_r)^{-1} \mathbf{X}_r^{*T} \mathbf{X}_c \mathbf{e}_{\beta c} \quad \mathbf{r} = -\mathbf{X}_c \mathbf{e}_{\beta c} - \mathbf{X}_r \mathbf{biais} \quad (8)$$

Il apparaît à travers (8) que si on ne fixe pas de paramètres dans le modèle exact ou si les paramètres sont fixés à des valeurs nominales qui correspondent aux valeurs exactes de ces paramètres ($\mathbf{e}_{\beta c} = 0$), alors il n'y a pas de biais et les résidus sont non signés quel que soit l'intervalle de temps considéré. Par contre, si les paramètres sont fixés à des valeurs nominales différentes ($\mathbf{e}_{\beta c} \neq 0$), les résidus sont alors signés. Le biais est nul uniquement dans le cas où les paramètres fixés et les paramètres libres sont parfaitement indépendants ($\mathbf{X}_r^{*T} \mathbf{X}_c = 0$). Dans le cas inverse, le biais est non nul ($\mathbf{X}_r^{*T} \mathbf{X}_c \neq 0$) et varie en fonction de l'intervalle d'estimation. Partant de ce principe, nous allons chercher en faisant varier l'intervalle d'estimation, à identifier le biais à partir des valeurs des paramètres identifiés.

On notera d'un indice 1 ou 2 les vecteurs pour indiquer qu'il s'agit de vecteurs tronqués sur les intervalles de temps $[0-t_1 = n_1 \Delta t]$ et $[0-t_2 = n_2 \Delta t]$. Ainsi \mathbf{b}_{r1}^* et \mathbf{b}_{r2}^* représentent respectivement les valeurs de $\boldsymbol{\beta}_r$ identifiées par moindres carrés sur ces deux intervalles. On peut ensuite calculer la variation de biais $\Delta \mathbf{biais} = \mathbf{b}_{r2}^* - \mathbf{b}_{r1}^*$ entre ces deux intervalles :

$$\Delta \mathbf{biais} = \mathbf{b}_{r_2}^* - \mathbf{b}_{r_1}^* = -(\mathbf{X}_{r_2}^{*T} \mathbf{X}_{r_2})^{-1} \mathbf{X}_{r_2}^{*T} \mathbf{X}_{c_2} \mathbf{e}_{\beta_c} + (\mathbf{X}_{r_1}^{*T} \mathbf{X}_{r_1})^{-1} \mathbf{X}_{r_1}^{*T} \mathbf{X}_{c_1} \mathbf{e}_{\beta_c} \quad (9)$$

On a donc une indication sur la variation du biais $\mathbf{b}_{r_2}^* - \mathbf{b}_{r_1}^*$ mais pas encore sur le biais.

Afin d'isoler $\mathbf{X}_c \mathbf{e}_{\beta_c}$, on pose l'hypothèse : $\mathbf{X}_{r_2}^{*T} \mathbf{X}_{r_2} = \mathbf{X}_{r_1}^{*T} \mathbf{X}_{r_1} + \sum_{i=n_1}^{n_2} \mathbf{X}_r^*(i) \mathbf{X}_r(i) \simeq \mathbf{X}_{r_1}^{*T} \mathbf{X}_{r_1}$.

Cette hypothèse est vraie si les deux points sont proches $n_1 \rightarrow n_2$ et situés à la fin de l'intervalle $n_2 \rightarrow N$. Soit m un point intermédiaire tel que $m = (n_1 + n_2)/2$, on a alors :

$$\Delta \mathbf{biais} = \mathbf{b}_{r_2}^* - \mathbf{b}_{r_1}^* = -(\mathbf{X}_{r_1}^{*T} \mathbf{X}_{r_1})^{-1} [\mathbf{X}_r^*(t_m) \mathbf{X}_c(t_m) \mathbf{e}_{\beta_c} (n_2 - n_1)] \quad (10)$$

Finalement pour chacun des paramètres libres (p paramètres), on en déduit :

$$X_c(t_m) e_{b_c} = -\frac{(\mathbf{b}_{i_2}^* - \mathbf{b}_{i_1}^*)(\mathbf{X}_{i_1}^{*T} \mathbf{X}_{i_1})}{\mathbf{X}_{i_1}^{*T}(t_m)(n_2 - n_1)}; \quad \text{biais} = \frac{(-\mathbf{r}(t_m) - X_c(t_m) \cdot e_{b_c})}{X_i(t_m)}; \quad \forall i | i=1 \dots p \quad (11)$$

4. Application et validation sur des simulations

4.1. Application sur un modèle linéaire dans le cas d'un intervalle complet.

Afin de mieux comprendre pourquoi il n'est pas possible de remonter au biais en utilisant un intervalle constant, on va appliquer notre méthode à un modèle linéaire : une fonction affine $at + c$. Pour les estimations, on utilise un modèle biaisé en fixant $c=0$ (voir Figure 1).

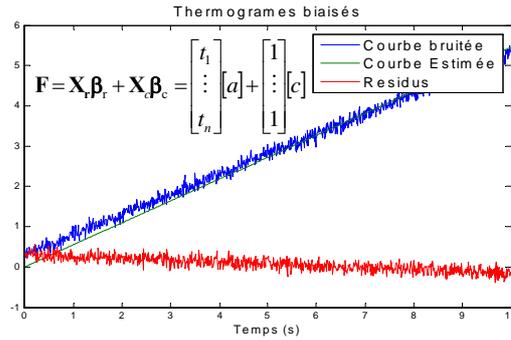


Figure 1 : Estimation $F(t) = at + c$ en utilisant un modèle biaisé $F^*(t) = a^* t$ ($c=0$)

Dans le cas d'un modèle linéaire, les sensibilités ne dépendent pas des valeurs des paramètres $\mathbf{X}_r^* = \mathbf{X}_r$, La relation (6) qui relie $E(\mathbf{r})$ et $\mathbf{X}_c \mathbf{e}_{\beta_c}$ devient :

$$E(\mathbf{r}) = - \begin{bmatrix} 1 - \frac{t_1^2}{\sum t_i^2} & -\frac{t_1 t_2}{\sum t_i^2} & \dots & -\frac{t_1 t_n}{\sum t_i^2} \\ -\frac{t_1 t_2}{\sum t_i^2} & 1 - \frac{t_2^2}{\sum t_i^2} & \dots & -\frac{t_2 t_n}{\sum t_i^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{t_1 t_n}{\sum t_i^2} & -\frac{t_2 t_n}{\sum t_i^2} & \dots & 1 - \frac{t_n^2}{\sum t_i^2} \end{bmatrix} \mathbf{X}_c \mathbf{e}_{\beta_c} = -\mathbf{A} \mathbf{X}_c \mathbf{e}_{\beta_c} \quad (12)$$

Le calcul du biais par (7) passe par le calcul de $\mathbf{U} = \mathbf{X}_c \mathbf{e}_{\beta_c} = -\mathbf{A}^{-1} E(\mathbf{r})$ et donc par l'inversion de la matrice \mathbf{A} définie par (12). Le déterminant est calculé par la règle du pivot en diminuant en chaque étape la dimension de la matrice (Voir (13)). Il est possible ensuite de trouver une relation de récurrence (n : nombre d'observations).

$$\frac{1}{(\sum t_i^2)^n} \begin{vmatrix} \sum t_i^2 (\lambda-1) + t_1^2 & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{12} & \sum t_i^2 (\lambda-1) + t_2^2 & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{1n} & t_{2n} & \dots & \sum t_i^2 (\lambda-1) + t_n^2 \end{vmatrix}_{n \times n} = \frac{1}{(\sum t_i^2)^n} \frac{(\sum t_i^2 (\lambda-1))^{n-1}}{(\sum t_i^2 (\lambda-1) + t_1^2)^{n-2}} \begin{vmatrix} \sum t_i^2 (\lambda-1) + t_1^2 + t_2^2 & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{2n} & \dots & \sum t_i^2 (\lambda-1) + t_1^2 + t_n^2 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \quad (13)$$

En regardant le terme ($j=k-1$) et le terme ($j=k$) de la trace \prod , on observe que la plupart des termes s'annulent et on obtient finalement :

$$\left| \lambda \mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{X}_r (\mathbf{X}_r^T \mathbf{X}_r)^{-1} \mathbf{X}_r^T) \right| = \frac{1}{(\sum f_i^2)^n} \left(\prod_{j=1}^n \frac{(\sum f_i^2 (\lambda-1) + \sum f_i^2)^{n-j}}{(\sum f_i^2)^{n-j-1}} \right) = (\lambda)(\lambda-1)^{n-1} = 0 \quad (14)$$

La matrice \mathbf{A} possède donc deux valeurs distinctes $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$. Il s'agit donc d'un projecteur dont la direction de projection est donnée par le vecteur propre \mathbf{X}_0 associé à $\lambda = 0$ et le sous espace de projection est donné par la base de dimension $n-1$, défini par les vecteurs propres associés à la valeur propre $\lambda = 1$. En calculant une solution à partir de la matrice pseudo-inverse, obtenue par SVD en supprimant la valeur propre $\lambda = 0$, on obtient une solution approchée \mathbf{U}_p telle que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{U}_p = \mathbf{B}$. Cette solution qui correspond aux résidus représente la projection dans le sous espace de la solution réelle \mathbf{U} recherchée. Pour obtenir \mathbf{U} , il faudrait rajouter une composante dans la direction perpendiculaire au sous espace et colinéaire au vecteur de projection \mathbf{U}_0 (Figure 2a), soit : $\mathbf{U} = \mathbf{U}_p + \alpha \mathbf{U}_0$. \mathbf{U}_0 étant dans le noyau de \mathbf{A} , on a une infinité de valeurs de α possibles qui conduisent au même vecteur projeté \mathbf{U}_p .

$$(\mathbf{I} - \mathbf{X}_r (\mathbf{X}_r^T \mathbf{X}_r)^{-1} \mathbf{X}_r^T) \mathbf{X}_c \mathbf{e}_{\beta_c} = -E(\mathbf{r}) \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A}(\mathbf{U}_p + \alpha \mathbf{U}_0) = \mathbf{B} \Leftrightarrow \mathbf{A} \mathbf{U}_p = \mathbf{B} \quad \forall \alpha \quad (15)$$

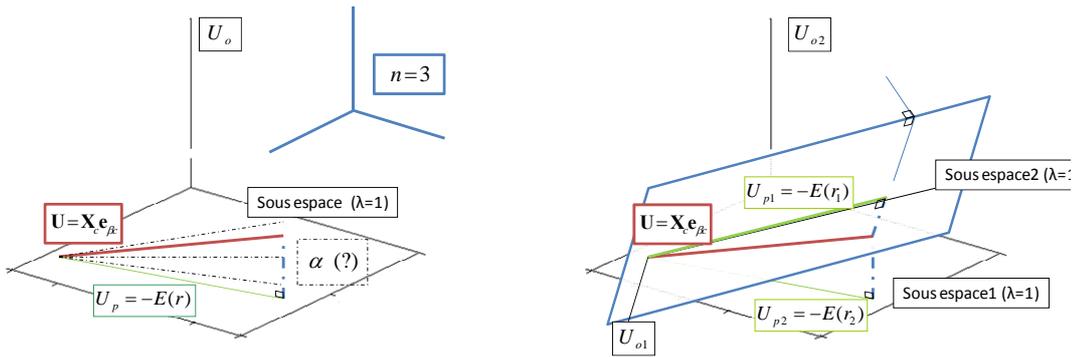


Figure 2 : Obtention de $\mathbf{X}_c \mathbf{e}_{\beta_c}$ à partir des résidus dans le cas d'une estimation à un ($n=3$) (a) et deux intervalles ($n=2$) (b)

\mathbf{U}_p étant la seule information connue, il manque donc une information pour déterminer la valeur de α et il n'est donc pas possible de remonter à \mathbf{U} et par conséquent au biais. Lorsque l'on fait varier l'intervalle d'estimation, les résidus et le biais varient car on modifie le sous-espace de projection ($\mathbf{U}_{p2} \rightarrow \mathbf{U}_{p1}$ et $n=3 \rightarrow n=2$). Il est donc possible de remonter à \mathbf{U} en exploitant simultanément ces deux informations (Voir Figure 2b). Nous allons voir s'il est possible d'identifier ce biais par cette méthode en utilisant cette fois un modèle non linéaire (cas du Flash).

4.2. Application sur modèle non linéaire dans le cas d'un intervalle variable.

Le modèle non-linéaire choisi est celui de la méthode Flash avec pertes. Cette méthode consiste à mesurer la diffusivité thermique à partir de l'évolution de la température réduite en face arrière d'un échantillon, suite à une excitation Flash sur sa face-avant. Le biais de modèle est ici généré en fixant la valeur des pertes ou Biot (paramètre $\beta_c = 0.05$ supposé connu) à une valeur nominale $\mathbf{b}_{Cnom} = 0.03$. On cherche à identifier la composante inconnue β_r qui représente la diffusivité thermique à travers l'inverse du nombre de Fourier $Fo = 1/t_c = a/e^2$.

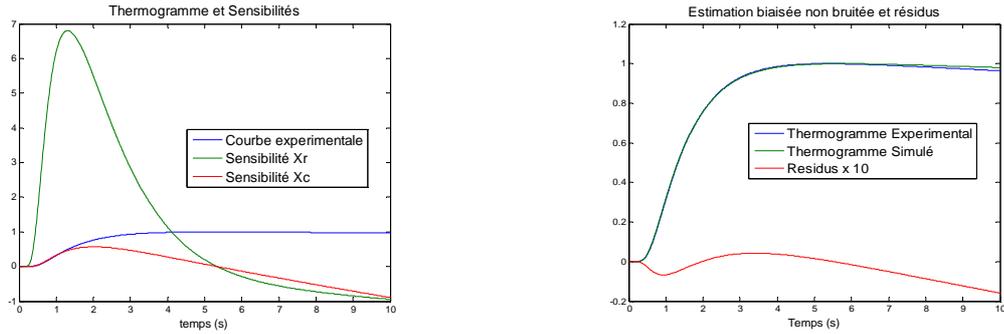


Figure 3 : Méthode Flash (Valeur Paramètres nominaux, Fourier=0.1, Biot=0.05)

La Figure 4 donne l'évolution de la valeur identifiée β_r^* de β_r obtenue par le modèle biaisé pour un intervalle d'estimation variable. On observe des variations liées au biais de modèle. A l'aide de (11), on trouve par exemple pour le point $m = 950$ ($t_m = 9.5$) un biais estimé de 0.0020225 très proche du biais théorique qui permet ensuite de remonter à la valeur du paramètre non biaisé $\beta_r = 0.1$ à partir de $\beta_r^* = 0.1021$ identifié. En recalculant $X_c e_{\beta_c}$ à partir des résidus et du biais, on retrouve bien la courbe $X_c e_{\beta_c}$ théorique (voir Figure 5).

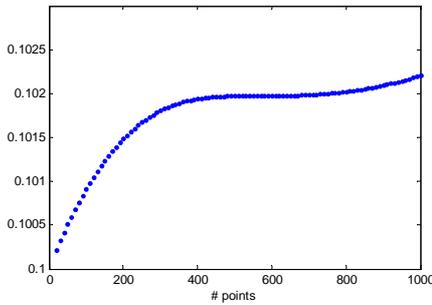


Figure 4 : Evolution de la valeur identifiée β_r^* en fonction de l'intervalle d'estimation

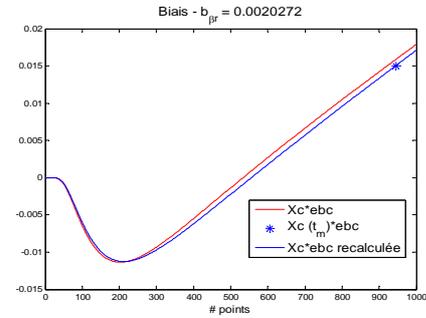


Figure 5 : Comparaison de la solution théorique et recalculée – Biais estimé

5. Conclusions et perspectives.

Nous avons pu montrer à travers cette étude qu'il est possible à partir de grandeurs connues (courbe des résidus et sensibilités des paramètres recherchés) de remonter à une estimation des erreurs systématiques commises sur les paramètres identifiés lors d'une estimation faite à partir d'un modèle biaisé ou réduit. Les deux principales limitations de la méthode viennent des hypothèses faites pour obtenir ces résultats, c'est à dire de la linéarisation du modèle (à noter que cette hypothèse est également généralement posée pour le calcul de l'erreur stochastique) et de l'approximation sur la norme cumulative (Voir (9-10)). Dans le cas non-linéaire, les relations obtenues ne peuvent être valables que si l'erreur systématique n'est pas trop grande. Dans le cas Airbus, cette limitation n'est pas drastique car les modèles sont pour la plupart linéaires. Reste alors l'hypothèse sur la troncature de la norme cumulative qui dans le cas de courbes de sensibilités non bornées (cas peu nombreux cependant) peut conduire à une mauvaise évaluation du biais. Une généralisation de la méthode basée sur un formalisme matriciel est en cours pour améliorer ce dernier aspect.

Références

- [1] B.Remy, A.Degiovanni, O.Verseux, *Mise en place de modèles d'extrapolation de température pour divers équipements de la nacelle d'un ensemble propulsive*, Toulouse, Congrès SFT 2008.
- [2] J.V. Beck et K.J. Arnold, *Parameter Estimation in Engineering and Science*, John Wiley & Sons, New-York (1977).
- [3] Marquardt, D.W. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, vol. 11,(1963)