

# Modélisation tridimensionnelle par les fonctions de GREEN de l'échange convectif fluide-paroi

Ali GRINE\*, Souad HARMAND

Laboratoire de Mécanique et Energétique, Le Mont Houy, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 59313 Valenciennes CEDEX 9

\*(auteur correspondant : [aligrine@yahoo.fr](mailto:aligrine@yahoo.fr))

**Résumé** - Ce travail présente un modèle analytique permettant d'identifier le coefficient d'échange convectif local en régime transitoire  $h(x,t)$ . On se place dans le cas d'un écoulement d'air sur une plaque plane solide d'épaisseur  $e$ , soumise à un régime thermique transitoire obtenu à l'aide d'un chauffage de type créneau du même côté que l'écoulement d'air. Une Caméra Infrarouge permet de déterminer expérimentalement le profil de température à la surface de la plaque  $f(x,t)$ . La méthode des fonctions de Green est utilisée pour déterminer la solution analytique de l'équation de propagation de la chaleur dans la plaque, et d'en déduire le flux de chaleur s'échappant de celle-ci vers le fluide, ainsi d'identifier le coefficient d'échange convectif local et moyen en régime transitoire. Les valeurs obtenues sont en très bon accord avec celles obtenues à partir de corrélations issues de la littérature dans des conditions comparables.

## Nomenclature

$a$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>	
$G_\phi$	fonction de Green	$\Phi$	densité de flux, $W.m^{-2}$
$\lambda$	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$	$\delta_T$	épaisseur de la couche limite thermique, $m$
$T$	température, $^\circ C$	$\delta$	épaisseur de la couche limite dynamique, $m$
$t$	temps, $s$	$E$	fonction de Heaviside
$x, y, z$	variables spatiales, $m$		

## 1. Introduction

Ce travail présente une méthode originale d'identification du coefficient d'échange convectif basée sur l'utilisation des fonctions de Green. Les méthodes les plus connues et les plus couramment utilisées pour identifier ce coefficient  $h$  sont des méthodes numériques ou semi analytiques [1,2,3,4]. La méthode proposée dans cet article est basée sur le développement de modèles théoriques décrivant la répartition spatio-temporelle de la température dans le fluide ainsi que son évolution à l'interface. Le fluide est soumis à un flux de chauffage par l'intermédiaire d'une plaque et une température constante à l'infini.

La méthode permet d'obtenir, en régime permanent, la valeur du coefficient d'échange convectif au voisinage d'une paroi en fonction du point et des caractéristiques de l'écoulement. Elle permet également d'étudier l'évolution de ce coefficient d'échange lorsque les parois sont soumises à des sollicitations thermiques dépendantes du temps.

## 2. Présentation du problème

Une bande chauffante ( $S_p$ ) plane, de grande longueur  $b$ , de largeur  $c$ , située au bord d'un demi-plan isolant au dessus duquel s'écoule un fluide, est chauffée sur sa face inférieure par une densité de flux  $\Phi$  (convection+rayonnement) connue. La face supérieure émet alors dans le fluide une densité de flux  $\Phi(x,y,t)$ . Nous nous proposons d'établir la relation analytique qui existe entre cette densité et le champ de température dans le fluide  $T(\vec{r},t)$ . Cette relation se

présentera sous forme d'une série dont le premier terme apporte près de 50 % de la solution générale [5], les termes suivants améliorant le résultat en tenant compte de la couche limite dynamique.

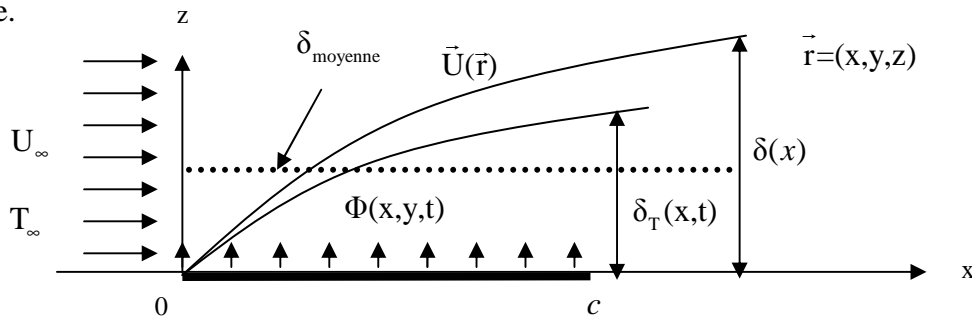


Figure 1 : Schéma et notation du problème de la convection forcée sur la plaque plane

Le fluide (air), de propriétés physiques constantes, s'écoule avec une vitesse  $\vec{U}(\vec{r},t)$ , supposée connue. Ce champ de vitesse dépend en général du point et du temps, est supposé isovolume ( $\text{div}(\vec{U})=0$ ) et s'annule sur la paroi solide avec laquelle le fluide est en contact.

L'équation de transport de chaleur dans le fluide est en général non linéaire mais elle possède une partie linéaire, dominant dans le cas d'un écoulement forcé, qui s'écrit sous la forme :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(\vec{r},t)}{\partial t} - \Delta T(\vec{r},t) + \frac{1}{a} \text{div} U(\vec{r},t) T(\vec{r},t) = 0 \quad \text{avec} \quad a = \frac{\lambda}{\rho c} \quad (1)$$

On peut toujours écrire le champ de vitesse sous la forme :  $\vec{U}(\vec{r},t) = U_\infty \vec{i} + \vec{v}(\vec{r},t)$  où  $U_\infty$  représente le champ de vitesse moyen loin de la paroi et  $\vec{v}(\vec{r},t)$ , l'écart du champ de vitesse réel par rapport au champ uniforme  $U_\infty \vec{i}$ .  $\vec{v}(\vec{r},t)$  est à divergence nulle et est égal à  $-U_\infty \vec{i}$  sur la plaque plane.

Soit P un point quelconque sur la paroi de la plaque plane soumise à l'écoulement ; appelons  $\Phi(\vec{\rho},t)$  ; ( $\Phi(\vec{\rho},t < 0) = 0$   $\vec{\rho} = \overline{OP}$ ), la densité de flux de chaleur entrant dans le fluide par conduction au point P. Nous avons alors :

$$K \vec{\nabla} T(\vec{r},t) \cdot \vec{n} \Big|_{\vec{r}=\vec{\rho}} = \Phi(\vec{\rho},t) \quad (2)$$

Nous allons maintenant établir une relation mathématique exacte entre le champ  $T(\vec{r},t)$  et le champ pariétal,  $\Phi(\vec{\rho},t)$ .

### 3. Solution analytique par la méthode des fonctions de Green

Le changement de variable suivant :  $T(\vec{r},t) = e^{\frac{U_\infty}{2a} \left( x - \frac{U_\infty}{2} t \right)} T_1(\vec{r},t)$ , permet de mettre l'équation de l'énergie (1) sous la forme d'une équation de conduction pure avec un terme de source dépendant linéairement du champ inconnu  $T_1$  :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T_1(\vec{r},t)}{\partial t} - \Delta T_1(\vec{r},t) + \underbrace{\frac{1}{a} \vec{v}(\vec{r},t) \cdot e^{-\frac{x}{\ell}} \vec{\nabla} e^{\frac{x}{\ell}}}_{\text{terme de source}} T_1(\vec{r},t) = 0 \quad \left( \frac{U_\infty}{2a} = \frac{1}{\ell} \right) \quad (3)$$

On peut dès lors utiliser la méthode des fonctions de Green de la même façon que dans un solide et choisir une fonction de Green  $G_\phi(\vec{r},\vec{r}',t)$  [5,6,7] permettant d'obtenir le champ de température dans le fluide sous la forme :

$$T(\vec{r},t) = \underbrace{\frac{1}{\lambda_f} \int_0^t d\tau \frac{U_\infty(t-\tau)}{2\ell} \iint_{S_p} e^{\frac{(x-x')}{\ell}} G_\phi(\vec{r},\vec{r}',t-\tau) \Phi(\vec{r},\tau) dS_p}_{|T_0\rangle} + \frac{1}{a} \int_0^t d\tau \frac{U_\infty(t-\tau)}{2\ell} \iiint_{(D)} d^3r e^{\frac{(x-x')}{\ell}} T(\vec{r},\tau) \vec{v}(\vec{r},t) \cdot \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_{\vec{r}} G_\phi(\vec{r},\vec{r}',t-\tau) \\ -\frac{1}{\ell} G_\phi(\vec{r},\vec{r}',t-\tau) \vec{i} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Cette expression est une relation linéaire intégrale exacte (mais implicite puisque  $T(\vec{r},\tau)$  figure dans le second membre) entre le champ de température régnant dans tout le fluide, et le flux entrant par conduction dans celui-ci par la paroi. Cette relation intégrale peut s'écrire formellement sous la forme :  $|T\rangle = |T_0\rangle + V|T\rangle \Rightarrow |T\rangle = (1-V)^{-1}|T_0\rangle$  (5)

Où  $V$  représente l'opérateur linéaire intégral du second membre agissant sur le champ de température réel  $|T\rangle$ . Ce type d'équation peut être, en principe, résolu par itération, méthode qui consiste à développer l'opérateur  $(1-V)^{-1}$  sous la forme :

$$(1-V)^{-1} = 1 + V + V^2 + V^3 + \dots \text{ soit : } |T\rangle = |T_0\rangle + \underbrace{V|T_0\rangle}_{T_1} + \underbrace{V^2|T_0\rangle}_{T_2} + V^3|T_0\rangle + \dots$$

Le premier terme  $|T_0\rangle$  représente la solution du problème en convection avec écoulement à vitesse uniforme. Nous avons vu qu'il représente à lui seul 50 % de la solution générale. Les termes suivants corrigent progressivement le premier en fonction de la forme de la couche limite dynamique.

Nous n'analyserons dans cet article que l'influence des termes  $T_1$  et  $T_2$  pour un champ de vitesse indépendant du temps.

Dans notre configuration géométrique (en supposant, pour simplifier, que le flux de chauffage est uniforme dans la direction  $y$ ), le premier terme de l'équation (4) est développé dans un de nos anciens articles [5].

La fonction de Green se factorise en trois parties :  $G_\phi(\vec{r},\vec{r}',t) = \frac{1}{a^2} G_\phi^1(x,x',t) G_\phi^2(y,y',t) G_\phi^3(z,z',t)$

(suivant  $x$ ,  $y$  et  $z$ ), avec :

$$G_\phi^1(x,x',t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4at}} ; \quad G_\phi^2(y,y',t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\frac{(y-y')^2}{4at}} ; \quad G_\phi^3(z,z',t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \left( e^{-\frac{(z-z')^2}{4at}} + e^{-\frac{(z+z')^2}{4at}} \right)$$

#### 4. Calcul des termes correctifs

Appelons  $T_{\delta\vec{r}_1}(\vec{r},\tau)$ , le champ de température dans le fluide solution des équations précédentes pour une impulsion de flux localisée en un point quelconque  $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$  donné sur la paroi solide :  $\Phi(\vec{r},t) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_1) \delta(t)$ . L'intérêt de l'introduction de ce champs est que, pour un flux quelconque  $\Phi(\vec{r}_1,t)$  (avec :  $\vec{r}_1 \in S_\ell$ ), le champ de température dans le fluide s'écrira :

$$T(\vec{r},t) = \int_0^t d\tau \iint_{S_\ell} dS_{\vec{r}_1} T_{\delta\vec{r}_1}(\vec{r},t-\tau) \Phi(\vec{r}_1,\tau) \quad (6)$$

Ou encore pour  $\Phi(\vec{r}_1,t) = \Phi_0$  ;  $T(\vec{r},t) = \Phi_0 \int_0^t d\tau \iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\vec{r}_1}(\vec{r},\tau)$

On a alors :  $T_{\delta\vec{r}_1}(\vec{r},t) = T_{\delta\vec{r}_1}^0(\vec{r},t) + T_{\delta\vec{r}_1}^1(\vec{r},t) + T_{\delta\vec{r}_1}^2(\vec{r},t) + \dots$  et le terme correctif dû à la première itération s'écrit :  $T_1(\vec{r},t) = \Phi_0 \int_0^t d\tau \iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\vec{r}_1}^1(\vec{r},\tau)$  avec :

$$T_{\delta\vec{i}}^1(\vec{r}',t) = \frac{1}{\lambda_f a} e^{-\frac{U_\infty t}{2\ell}} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} \int_0^t d\tau \iiint_{(D)} d^3r \vec{v}(\vec{r}) \cdot \begin{pmatrix} G_\phi(x_1, y_1, z_1 = 0, \vec{r}, \tau) \vec{\nabla}_{\vec{r}} G_\phi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \\ -\frac{1}{\ell} G_\phi(x_1, y_1, z_1 = 0, \vec{r}, \tau) G_\phi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \vec{i} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Nous ne traiterons dans ce travail qu'un cas de couche limite dynamique très simplifiée.

Admettons que le champ de vitesse  $\vec{v}(\vec{r})$  soit de la forme :

$$\vec{v}(\vec{r}) = E(f(x) - z) U_\infty (g(z, f(x)) - 1) \vec{i} \quad (8)$$

On obtient donc :

$$T_{\delta\vec{i}}^1(\vec{r}',t) = \frac{U_\infty}{\lambda_f a^4} e^{-\frac{U_\infty t}{2\ell}} e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} G_\phi^2(y_1, y', t) \int_0^t d\tau \int_0^\infty dx G_\phi^1(x_1, x, \tau) \begin{pmatrix} \frac{\partial G_\phi^1(x, x', t - \tau)}{\partial x} \\ -\frac{1}{\ell} G_\phi^1(x, x', t - \tau) \end{pmatrix} K(x, z', \tau, t - \tau) \quad (9)$$

$$\text{avec : } K(x, z', \tau, t - \tau) = \int_0^{f(x)} dz G_\phi^3(z_1 = 0, z, \tau) G_\phi^3(z, z', t - \tau) (g(z, f(x)) - 1) ; g(z, f(x)) = \frac{z}{\delta} \left( 2 - \frac{z}{\delta} \right).$$

Le calcul purement analytique du terme correctif n'est relativement aisé que si l'on peut accéder analytiquement au calcul de l'intégrale suivant  $x$ . Cela est possible dans le cas où  $f(x) = \text{constante} = \delta$  : couche limite dynamique d'épaisseur constante.

Dans le cas d'une bande infinie ( $b \rightarrow \infty$ ) :

$$T_1(\vec{r}, t) = \frac{\Phi_0 U_\infty}{2\lambda_f a^2 \sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{at}} du \left\{ \left( e^{-\left(\frac{x-c}{u} - \frac{u}{2\ell}\right)^2} - e^{-\left(\frac{x}{u} - \frac{u}{2\ell}\right)^2} \right) \times a \left( \begin{aligned} &-\frac{(z-\delta)^3}{6\delta^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{u}\right) - \frac{\delta}{6} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{u}\right) + \frac{(4at)^{3/2}}{8\delta^2} i^3 \operatorname{erfc}\left(\frac{2\delta+z}{u}\right) \\ &-\frac{u^2}{8\delta^2} i^3 \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{u}\right) - \frac{u^2}{4\delta} i^2 \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{u}\right) - \frac{u}{4} i \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{u}\right) \end{aligned} \right) \right\} \quad (10)$$

$$\text{Le terme d'ordre 2 s'écrit : } T_2(\vec{r}', t) = \Phi_0 \int_0^t d\tau \iint_{S_0} dx_1 dy_1 T_{\delta\vec{i}}^2(\vec{r}', \tau) \quad (11)$$

$$\text{Avec : } T_{\delta\vec{i}}^2(\vec{r}', t) = \frac{1}{a^4 \lambda_f} e^{-\frac{U_\infty t}{2\ell}} G_\phi^2(y_1, y', t) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \left( e^{\frac{(x'-x_1)}{\ell}} G_\phi^1(x_1, x', t) \right) K_\delta^2(z', t) \quad (12)$$

Où  $K_\delta^2(z', t) = \int_0^\delta dz v(z) \int_0^t d\tau K_\delta^1(z, t - \tau) G_\phi^3(z, z', \tau)$  possède les mêmes propriétés que  $K_\delta^1(z', t)$ .

Le calcul du terme d'ordre 2, après calcul de  $K_\delta^2(z, \tau)$ , (fonction des erf et erfc) [8], conduit finalement à :

$$T_2(\vec{r}, t) = \Phi_0 \frac{U_\infty^2}{2\lambda_f a^3 \sqrt{\pi}} \int_0^t du \left\{ \left( -\left( 2\frac{c-x}{u^2} + \frac{1}{\ell} \right) e^{-\left(\frac{x-c}{u} - \frac{u}{2\ell}\right)^2} - \left( \frac{2x}{u^2} - \frac{1}{\ell} \right) e^{-\left(\frac{x}{u} - \frac{u}{2\ell}\right)^2} \right) \times K_\delta^2(z, u) \right\} \quad (13)$$

## 5. Résultats et analyse

Nous appliquons maintenant le modèle développé précédemment pour un échelon de flux unité  $\Phi_0 = 1 \text{ W/m}^2$ , distribué sur toute la surface de la bande chauffante avec une vitesse d'air à l'infini  $U_\infty = 1 \text{ m/s}$  et une température  $T_\infty = 25^\circ\text{C}$ .

Nous présentons nos résultats, comparés à ceux disponibles dans la littérature ; à savoir la méthode intégrale [4].

Les résultats numériques obtenus par cette méthode sont ceux du modèle physique (fig.1), où la couche limite thermique est dépendante de  $x$  et du temps  $t$ . Pour la couche limite dynamique moyenne, on a pris tout simplement celle au milieu de la plaque  $x = c/2$ ; ( $\delta_{\text{moy}} = 5\sqrt{vc/2U_\infty}$ ).

Sur la figure 2, nous traçons les courbes de la variation du coefficient d'échange convectif  $h_c$  en fonction de la vitesse d'écoulement. Pour trois valeurs de l'abscisse  $x$  ( $x = 0,02 \text{ m}$ ,  $x = 0,1 \text{ m}$ ,  $x = 0,19 \text{ m}$ ), la vitesse de l'écoulement varie de 0,5 à 20 m/s.

Nous comparons en même temps ces courbes avec celles obtenues par les corrélations de la littérature [9]. Nous remarquons que dans toute cette plage de vitesse, l'écart du coefficient d'échange convectif  $h_c$  entre notre modèle et celui de la littérature est très faible dans la zone de forte gradient de température et augmente avec l'abscisse  $x$  (tableau).

Nous confirmons donc ce que nous avons avancé précédemment [10] pour généraliser dans tous le domaine des vitesses d'écoulement (de 0,5 m/s à 20 m/s) et sur toute la plaque ( $x = 0,02 \text{ m}$ ,  $x = 0,1 \text{ m}$ ,  $x = 0,19 \text{ m}$ ).

x (m)	c/8	c/4	3c/8	c/2	5c/8	3c/4	7c/8
$h_{c\_corrélation}$	16,64	11,77	9,61	8,32	7,44	6,79	6,29
$h_{c\_mod}$	17,45	12,69	10,58	9,31	8,44	7,80	7,30
$\Delta(\%)$	<b>4,61</b>	<b>7,25</b>	<b>9,18</b>	<b>10,61</b>	<b>11,86</b>	<b>12,94</b>	<b>13,86</b>

Tableau : Ecart relatif entre  $h_{c\_modèle}$  et  $h_{c\_corrélation}$  pour  $U_\infty = 1 \text{ m/s}$ ,  $c = 21 \text{ cm}$

Faisons la même chose pour un coefficient d'échange convectif moyenné sur toute la plaque sur la figure 3. Le résultat est celui du milieu de la plaque  $x = c/2$  ce qui est évident et confirme une fois de plus la fiabilité de notre modèle théorique. Il nous semble que cet écart de 10 % peut être diminué à 2 % après le traitement du quatrième terme correctif.

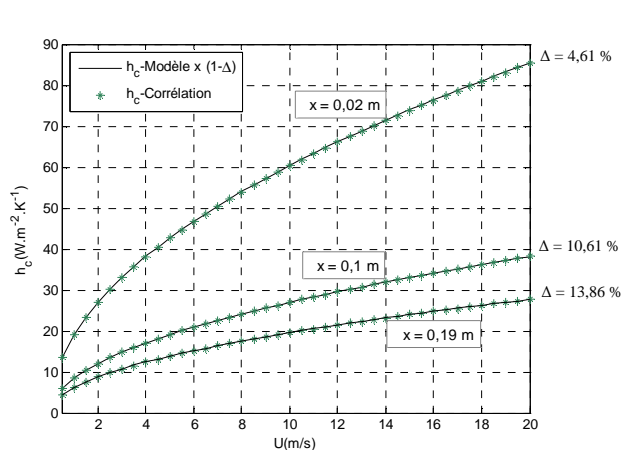


Figure 2 : Comparaison du  $h_c$  local du modèle et de la corrélation

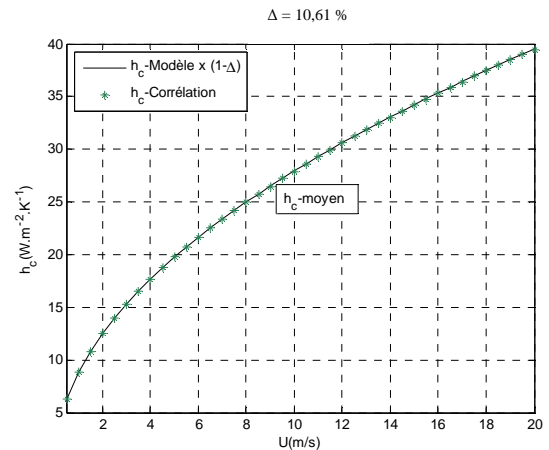


Figure 3 : Comparaison du  $h_c$  moyen du modèle et de la corrélation

## 6. Conclusion

Le travail présenté dans cet article concerne le développement d'un modèle analytique d'identification des échanges thermique sur une plaque plane. La démarche théorique développée est originale par l'utilisation de la méthode des fonctions de Green et permet d'établir une relation intégrale linéaire exacte, découlant de l'équation différentielle de propagation de la chaleur dans le fluide, entre le champ de température dans celui-ci et le flux de chaleur le pénétrant par la paroi solide, et d'en expliciter la forme analytique (relation 4) en fonction des caractéristiques de l'écoulement.

Cette démarche permettra d'identifier la répartition de la température pariétale ainsi que la température dans le fluide en régime transitoire.

Les termes correctifs que nous avons examinés dans cet article corrigent le terme de la conduction pure (représentant déjà près de 50 % de la solution générale en régime permanent) en fonction de la forme de la couche limite.

Tout comme dans les corrélations issues de la littérature, le coefficient de transfert convectif en régime permanent suit la même loi de dépendance ( $\sqrt{U_\infty/x}$ ) en fonction de la vitesse et de la position.

Enfin la méthode utilisée peut s'étendre au cas où le flux de chaleur à l'interface est variable dans le temps et dépendant du point.

Nous avons pu mettre en évidence les points suivants :

- La série converge très rapidement pour les temps très faibles (régime conductif) et les temps (relativement) très grands (régime permanent)
- La prise en compte de deux termes correctifs, toujours en régime permanent, suffit à approcher à près de 10 % la réponse obtenue par les autres méthodes, de manière uniforme lorsque nous prenons en compte une couche limite dynamique.
- La durée du régime transitoire est faible : la condition de Newton avec un coefficient de convection constant est très rapidement valide et notre méthode présente l'intérêt de permettre de déterminer analytiquement ce coefficient dans des conditions et des géométries variées.

## Références

- [1] M. Lachi, M. Rebay, E. Mladin et J. Padet. Etude de la convection forcée transitoire sur une plaque plane avec la méthode intégrale. *SFT*. 2003, 1-8
- [2] M. Lachi, E. Mladin M. Rebay et J. Padet. Modélisation du couplage conduction – convection entre un écoulement et une plaque plane. *SFT*. 2002, 101-106.
- [3] G Polidori, M. Lachi et J. Padet. Unsteady convective heat transfer on a semi-infinite flat surface impulsively heated. *Int. Comm. Heat. Mass. Transfer*, 1998 33-42.
- [4] M. Stoian. Couplage thermique convection – conduction en régime non stationnaire. *Thèse à l'université de Reims* (2006).
- [5] A. Grine, J.Y. Desmons et S. Harmand. Modélisation analytique de la convection transitoire sur plaque plane. *SFT 2007, Ile des Embiez*, 492-500.
- [6] A. Grine, J.Y. Desmons et S. Harmand. Identification Models for Transient Heat Transfer on a Flat Plate. *Experimental thermal and Fluid Science*. 31 (2007) 701-710.
- [7] A. Grine, J.Y. Desmons et S. Harmand. Models for transient conduction in a flat plate subjected to a variable heat flux. *Applied Thermal Engineering*. 27 (2007) 492-500
- [8] A. Grine. Etude théorique et expérimentale de la convection forcée sur plaque plane en régime transitoire. *Thèse à l'université de Valenciennes*. n° 07/44. (2007).
- [9] JF. Sacadura. Initiation aux transferts thermiques. *Cast. INSA de Lyon.Tec. et doc. de Paris*. (1980).
- [10] A. Grine, J.Y. Desmons et S. Harmand. Modélisation par les fonctions de GREEN de l'échange convectif fluide-paroi. *SFT 2008, Toulouse*, 492-500.