

Convection naturelle et transfert de chaleur de fluides viscoélastiques en milieu poreux.

Gérémino ELLA ENY^{1*}, Mohamed Najib OUARAZI¹

¹Laboratoire de Mécanique de Lille, UMR CNRS 8107, USTL,
Bd. Paul Langevin – 59655 Villeneuve d'Ascq cedex, France

* (auteur correspondant : ellaenyg@yahoo.fr)

Résumé - Ce travail porte sur une étude théorique des instabilités de fluides viscoélastiques pouvant naître et se développer en milieu poreux chauffé par le bas. La formulation mathématique des équations de ce problème repose sur la loi phénoménologique de Darcy, généralisée aux fluides viscoélastiques de type Oldroyd-B. L'étude temporelle de stabilité linéaire montre que la nature stationnaire ou oscillatoire des structures thermo-convectives bifurquées dépend, en plus du nombre de Rayleigh, des temps de relaxation et de retardation associés à l'élasticité du fluide. Lorsque le système est le siège d'instabilité oscillatoire, nous montrons qu'en régime non linéaire, l'évolution spatio-temporelle de l'amplitude des structures convectives est gouvernée par un système de deux équations couplées de type Ginzburg-Landau complexes qui prévoit la formation d'ondes progressives ou celle d'ondes stationnaires. Une analyse de stabilité révèle que les ondes progressives sont stables, contrairement aux ondes stationnaires qui demeurent instables indépendamment des valeurs prises par les nombres sans dimension du problème. Le nombre de Nusselt associé à ces ondes progressives stables est ensuite évalué et l'influence de l'élasticité du fluide sur le transfert de chaleur moyen est discutée.

Nomenclature

Ra	nombre de Rayleigh	α	coefficient d'expansion thermique, K^{-1}
T	température, K	μ	viscosité dynamique, $Pa.s$
Nu	nombre de Nusselt	ν	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
K	perméabilité, m^2	(ρc)	chaleur spécifique, $J.K^{-1}.m^{-3}$
P	pression, Pa	θ	perturbation de la
g	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$		de la température
H	hauteur entre les deux plaques, m	ε	paramètre de la
k	nombre d'onde		perturbation
V	vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes	ψ	fonction de courant
w	composante verticale de la vitesse, $m.s^{-1}$		

Symboles grecs

λ_1	coefficient de relaxation
λ_2	coefficient de retardation
ω	fréquence
λ	conductivité thermique du milieu, $W.m^{-1}.K^{-1}$

Indices et exposants

c	critique
r	partie réelle
i	partie imaginaire
s	stationnaire
osc	oscillatoire
f, m	relatif au fluide et au milieu

1. Introduction

La convection naturelle au sein d'un milieu poreux chauffé par le bas et saturé par un fluide Newtonien a bénéficié d'un grand intérêt, tant en ce qui concerne les conditions

d'apparition de la convection, que le transfert de chaleur et la forme des cellules convectives [1]. En revanche, la littérature consacrée à la convection de fluides viscoélastiques tels que des solutions polymères diluées a été pendant longtemps peu abondante. Kim et al. [2] ont récemment mené une étude linéaire et faiblement non linéaire de la convection thermoconvective de fluides viscoélastiques en milieu poreux en utilisant le modèle de Darcy-Oldroyd. Leur investigation a été étendue par Zhang et al. [3] en utilisant comme équation du mouvement le modèle de Darcy-Brinkman-Oldroyd. Il a été montré dans [2] et [3], que les structures bifurquées peuvent être stationnaires ou oscillatoires suivant les valeurs prises par les temps de relaxation et de retardation associés à l'élasticité du fluide. Lorsque la convection est de nature stationnaire, ces auteurs ont montré que le transfert de chaleur demeure insensible à l'élasticité du fluide et se comporte comme pour un fluide Newtonien. Dans le cas où le système est le siège d'une bifurcation de Hopf, leur étude non linéaire s'est focalisée sur les ondes stationnaires et le transfert de chaleur associé à ces ondes sans se soucier de leur stabilité.

L'objectif de cette étude est de mener une étude linéaire et non linéaire de ce problème en considérant le cas général des structures convectives structurées aussi bien sous la forme d'ondes stationnaires que sous la forme d'ondes progressives. Nous étudierons la stabilité de ces deux types de structures convectives et discuterons de l'influence de l'élasticité du fluide sur le transfert de chaleur. La partie non linéaire de ce travail constitue une généralisation et une extension à la dynamique spatio-temporelle de l'étude réalisée dans [2] et [3].

2. Formulation du problème et stabilité linéaire

Nous considérons un fluide viscoélastique de type Oldroyd-B confiné dans une couche poreuse d'épaisseur H , d'extension infinie dans le plan horizontal, chauffée par le bas à une température constante T_0 , et maintenue par le haut à une température $T_1 < T_0$. Nous choisissons H , $H^2(\rho c)_m / \lambda_m$, $\lambda_m / H(\rho c)_f$ et $\lambda_m \mu_f / K(\rho c)_f$, $T_0 - T_1$ comme références respectivement pour la longueur, le temps, la vitesse de filtration, la pression et la température. En utilisant la loi de Darcy étendue aux fluides viscoélastiques, les équations adimensionnées régissant le problème s'écrivent sous l'approximation de Boussinesq :

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (1)$$

$$(1 + \lambda_2 \frac{\partial}{\partial t}) \mathbf{V} - (1 + \lambda_1 \frac{\partial}{\partial t})(-\nabla P + Ra Te_z) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} T + \mathbf{V} \cdot \nabla T - \nabla^2 T = 0 \quad (3)$$

Les conditions aux limites sont :

$$w=0 \text{ en } z=0 \text{ et } z=1 ; \quad T=1 \text{ en } z=0 \text{ et } T=0 \text{ en } z=1 \quad (4)$$

Une solution de conduction pure du système (1-4) existe quels que soient les nombres sans dimension le nombre de Rayleigh $Ra = Kg \alpha_f H (T_0 - T_1) (\rho c)_f / (\lambda_m \nu)$, λ_1 et λ_2 . Elle s'écrit :

$$\mathbf{V}_0 = 0, \quad T_0 = 1 - z, \quad P_0 = Ra(z - \frac{z^2}{2}) \quad (5)$$

L'étude de stabilité de cette solution de conduction pure s'effectue en linéarisant les équations (1)-(3) autour de (5). Les perturbations du champ de vitesse, de température et de pression sont recherchées sous la forme de modes normaux (i.e. $e^{i(k_x x + k_y y) - i\omega t} f(z)$) respectant les conditions aux limites.

L'état de stabilité marginale est atteint lorsque $\omega_i = 0$. Dans ce cas, deux types d'instabilités peuvent apparaître :

- l'instabilité stationnaire ($\omega_r = 0$) pour les valeurs critiques : $Ra_c^{(s)} = 4\pi^2$ et $k_c^{(s)} = \pi$

- l'instabilité oscillatoire ($\omega_r \neq 0$), avec : $\omega_c^\pm = \pm \sqrt{\frac{\pi^4 + 2k_c^{(osc)2}\pi^2 + k_c^{(osc)4} - Ra_c^{(osc)}k_c^{(osc)2}}{\lambda_2(\pi^2 + k_c^{(osc)2})}}$

$$Ra_c^{(osc)} = \frac{1}{\lambda_1} \left[1 + 2\lambda_2\pi \left(\pi + \left(\pi^2 + \frac{1}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right) \right] \text{ et } k_c^{(osc)} = \pi^{\frac{1}{2}} \left(\pi^2 + \frac{1}{\lambda_2} \right)^{\frac{1}{4}} ;$$

Comme le système peut être le siège de ces deux types d'instabilités, la limite réelle de stabilité de l'état de conduction correspond à la plus petite des valeurs seuils $Ra_c^{(osc)}$ et $Ra_c^{(s)}$.

3. Dynamique faiblement non linéaire des structures oscillatoires

- **Sélection des structures convectives :**

L'analyse de stabilité linéaire menée au paragraphe précédent a permis de déterminer le seuil d'apparition des structures convectives ainsi que le nombre d'onde et les fréquences associés ω_c^- et ω_c^+ . Au delà de ce seuil où se produit une bifurcation, le taux de croissance temporelle devient positif indiquant que l'instabilité s'amplifie linéairement. La prise en compte des termes non linéaires devient nécessaire car ils permettent d'endiguer cette amplification linéaire. Nous limitons l'étude non linéaire à une instabilité bidimensionnelle. Le comportement non linéaire de la convection stationnaire associée à ce problème a déjà été analysé par [2] et [3]. Pour cette raison, nous analyserons par la suite seulement la dynamique non linéaire qui résulte de la bifurcation de Hopf qui donne naissance simultanément à deux modes instables de fréquence ω^+ et ω^- .

Le comportement dynamique au voisinage du seuil peut être décrit par deux équations couplées non linéairement de type Ginzburg-Landau. Ces équations rendent compte de la modulation spatio-temporelle des amplitudes des ondes. Une analyse classique basée sur des méthodes de développements asymptotiques et d'échelles multiples permet de chercher les solutions à l'ordre dominant sous la forme :

$$\theta_1 = \left[A_1(x,t)e^{i\omega t + ik_c x} + A_2(x,t)e^{i\omega t - ik_c x} \right] \sin(\pi z) + c.c \quad (6)$$

où $A_1(x,t)$ et $A_2(x,t)$ représentent respectivement les amplitudes de l'onde montante et de l'onde descendante. Pour la clarté de ce document, les calculs longs et fastidieux des équations d'amplitude pour $A_1(x,t)$ et $A_2(x,t)$ ne sont pas exposés ici. Ces équations s'écrivent :

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} + v_g^+ \frac{\partial A_1}{\partial x} = (\mu_r + i\mu_i)A_1 + (\beta_r + i\beta_i) \frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2} - (\alpha_r + i\alpha_i)A_1|A_1|^2 - (\gamma_r + i\gamma_i)A_1|A_2|^2 \quad (7)$$

$$\frac{\partial A_2}{\partial t} + v_g^- \frac{\partial A_2}{\partial x} = (\mu_r + i\mu_i)A_2 + (\beta_r + i\beta_i) \frac{\partial^2 A_2}{\partial x^2} - (\alpha_r + i\alpha_i)A_2|A_2|^2 - (\gamma_r + i\gamma_i)A_2|A_1|^2 \quad (8)$$

Les coefficients qui apparaissent dans (7) et (8) dépendent de λ_1 et λ_2 .

$$v_g^+ = \frac{k_c}{\omega_c} \left[\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right] = -v_g^- ; \quad \mu_r = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} \left(\frac{1 + \lambda_2 C}{2\lambda_2} \right) ; \quad C = k_c^2 + \pi^2 ; \quad \mu_i = -(Ra - Ra_c) \frac{k_c^2}{2\lambda_2 \omega_c C}$$

$$\beta_r = \frac{1}{2\lambda_2(k_c^2 + \pi^2)} \left[\lambda_2 k_c^2 + \frac{3\pi^2(1 + \lambda_2 \pi^2)}{k_c^2} \right]; \beta_i = -\frac{1}{2} \left[-\frac{k_c^2}{\omega_c^3} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right)^2 + \frac{1}{\omega_c} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{4k_c^2}{\lambda_1 C} \right) \right]$$

$$\alpha_r = \frac{C}{4\lambda_2}(1 + \lambda_2 C), \alpha_i = -\frac{C}{4\lambda_1 \lambda_2 \omega_c}(1 + \lambda_2 C), \gamma_r = \left(\frac{1 + \lambda_2 C}{2\lambda_2} \right) a, \gamma_i = -\left(\frac{1 + \lambda_2 C}{2\lambda_2} \right) b$$

$$\text{où : } a = \frac{C}{2} + (1 - \lambda_1 C) \left(\frac{1}{\lambda_2} - 2\pi^2 \right) \frac{\pi^2}{\lambda_1(4\pi^4 + \omega_c^2)} \text{ et } b = \frac{\pi^2(2\pi^2 + C)\omega_c}{4\pi^4 + \omega_c^2} + \frac{C}{2\lambda_1 \omega_c} + \frac{\pi^2(2\pi^2 C - \omega_c^2)}{\lambda_1 \omega_c(4\pi^4 + \omega_c^2)}$$

Les solutions homogènes du système (7)-(8), autres que la solution triviale ($A_1 = 0, A_2 = 0$), sont de deux types :

- Celles qui correspondent à des ondes progressives « travelling-waves » :

$$A_1^s = \sqrt{\frac{\mu_r}{\alpha_r}} e^{i\left(\mu_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_r} \mu_r\right)t} \text{ et } A_2^s = 0 \text{ ou } A_1^s = 0 \text{ et } A_2^s = \sqrt{\frac{\mu_r}{\alpha_r}} e^{i\left(\mu_i - \frac{\alpha_i}{\alpha_r} \mu_r\right)t}$$

- Celles qui correspondent à des ondes stationnaires « standing-waves » :

$$A_1^m = A_2^m = \sqrt{\frac{\alpha_r \mu_r}{\alpha_r + \gamma_r}} e^{i\left(\mu_i - \frac{\alpha_i + \gamma_i}{\alpha_r + \gamma_r}\right)t}$$

La question qui se pose à ce stade est celle de savoir laquelle de ces solutions est physiquement acceptable sachant que les deux solutions ne peuvent se manifester simultanément. Une analyse de stabilité de l'une par rapport à l'autre est alors suffisante. Si on s'intéresse à la stabilité des ondes progressives vis-à-vis des ondes stationnaires, on introduit alors des perturbations homogènes $a(t)$ et $b(t)$:

$$A_1 = A_1^s + a(t)$$

$$A_2 = b(t)$$

Le taux d'accroissement temporel de la perturbation b est $\sigma_b = \frac{\mu_r}{\alpha_r}(\alpha_r - \gamma_r)$ et s'avère négatif pour toutes les valeurs de λ_1 et λ_2 . Par conséquent, on conclut que les ondes progressives sont stables par rapport aux ondes stationnaires.

- **Transfert de chaleur**

L'importance du transfert de chaleur est caractérisée par le nombre de Nusselt. Ce dernier est défini comme le rapport du flux de chaleur total au flux de chaleur de l'état de conduction pure. Comme le flux de chaleur de l'état de conduction est -1 , le nombre de Nusselt moyen instantané est obtenu en introduisant la moyenne suivant x et s'écrit :

$$Nu = 1 - \left\langle \frac{\partial \theta}{\partial z} \Big|_{z=0} \right\rangle \quad (9)$$

Pour la convection bidimensionnelle structurée en ondes progressives, on trouve

$$Nu = 1 + 2 \left(\frac{Ra - Ra_c}{Ra_c} \right) \quad (10)$$

Le transfert de chaleur moyen pour les ondes stationnaires est donné par :

$$Nu - 1 = \frac{4\mu_r}{\alpha_r + \gamma_r} \left(\frac{C}{2} + \pi^2 \frac{\sqrt{C^2 + \omega_c^2}}{\sqrt{4\pi^4 + \omega_c^2}} \cos[2(\omega_c + \varphi)t + \varphi_0] \right) \quad (11)$$

avec $\varphi = \mu_i - \frac{(\alpha_i + \gamma_i)}{(\alpha_r + \gamma_r)} \mu_r$ et φ_0 est une constante.

Nous remarquons que le nombre de Nusselt moyen instantané relatif aux ondes progressives est indépendant du temps, alors que celui associé aux ondes stationnaires instables oscille près du seuil avec une fréquence $2\omega_c$. Nos résultats théoriques qui prédisent que les ondes stationnaires sont instables au profit des ondes progressives peuvent donc être vérifiés expérimentalement par évaluation du transfert thermique et vérification de son caractère oscillatoire ou indépendant du temps.

Ensuite, il est intéressant de comparer le nombre de Nusselt moyenné dans l'espace et le temps pour les deux structures thermoconvectives. La relation (10) montre que la droite décrivant la dépendance de Nusselt vis-à-vis de la distance au seuil admet une pente égale à 2. Tandis que celle donnée par la relation (11), pertinente pour les ondes stationnaires instables, dépend des valeurs de λ_1 et λ_2 et est inférieure à 2. La figure (1) représente les variations du nombre de Nusselt moyen en fonction de l'écart au seuil critique du nombre Rayleigh pour les ondes progressives et les ondes stationnaires pour différentes valeurs de λ_1 et λ_2 . Cette figure montre clairement que le transfert de chaleur est plus important lorsque la convection est structurée en ondes progressives. Ce résultat est nouveau et n'a pas été prédit dans [2] et [3].

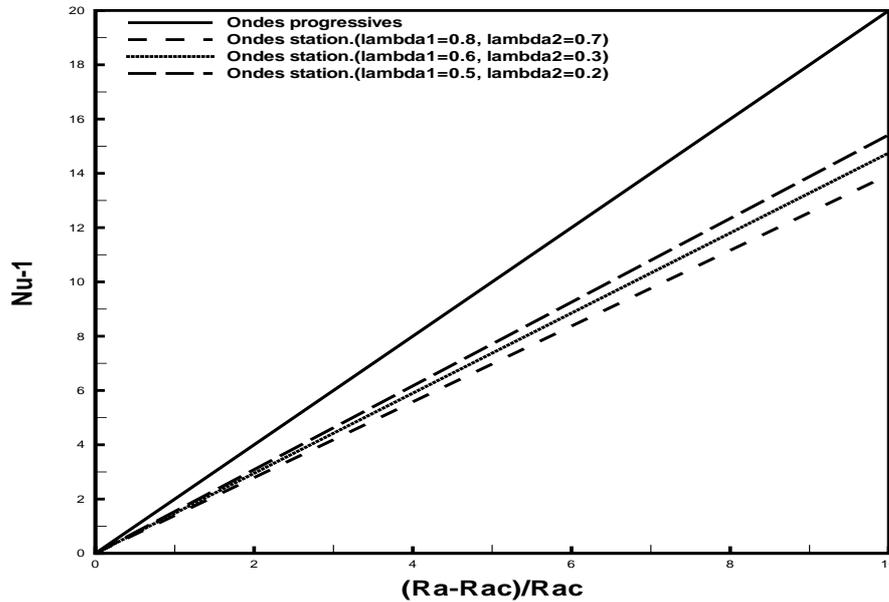


Figure 1 : Comparaison des transferts de chaleur pour les ondes progressives stables et stationnaires instables.

Ensuite, lorsque les structures convectives développées se présentent en ondes progressives stables, l'influence de λ_1 et λ_2 sur le transfert de chaleur moyen est illustrée sur les figures (2) et (3). Ces deux figures montrent respectivement que le transfert de chaleur augmente avec le temps de relaxation λ_1 et diminue avec le temps de retardation λ_2 .

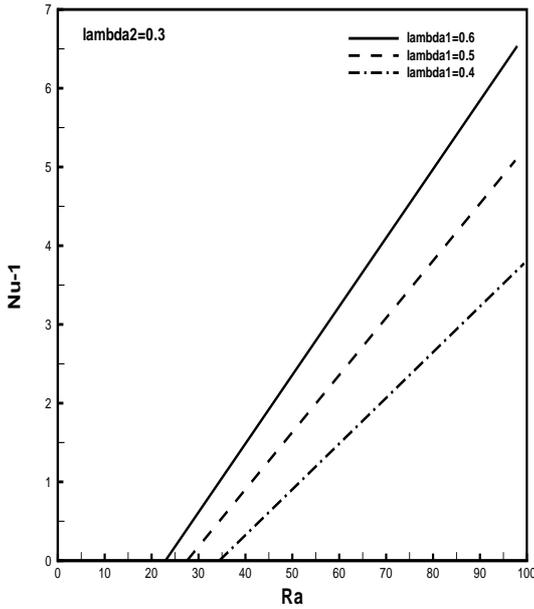


Figure.2 - Influence du temps de relaxation sur le transfert de chaleur

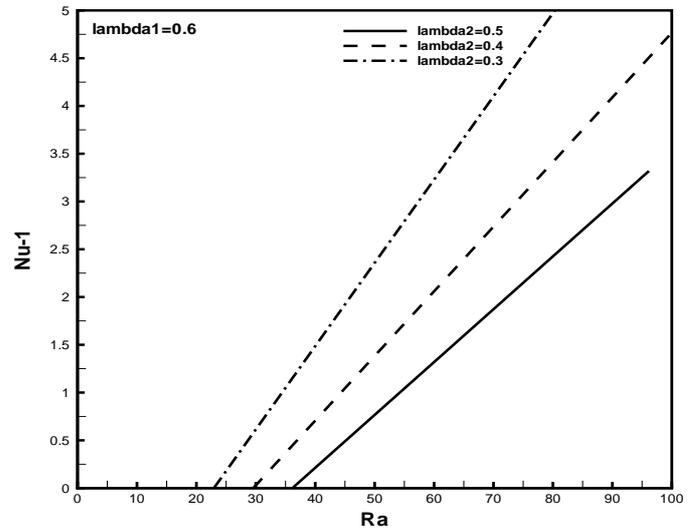


Figure.3-Influence du temps de retardation sur le transfert de chaleur

4. Conclusion

A l'aide du modèle de Darcy étendu aux fluides viscoélastiques, nous avons mené une étude de stabilité linéaire et faiblement linéaire de la convection naturelle d'un fluide non Newtonien de type Oldroyd B confiné en milieu poreux chauffé par le bas. Les variations de la longueur d'onde, des fréquences d'oscillations et du seuil d'apparition des structures thermoconvectives ont été déterminées en fonction des temps de relaxation et de retardation du fluide. Dans le régime non linéaire, nous avons obtenus par des méthodes asymptotiques appropriées deux équations couplées de type Ginzburg-Landau complexes qui décrivent l'évolution spatio-temporelle de l'amplitude des structures convectives. Ce modèle non linéaire réduit admet deux solutions d'équilibre, à savoir des ondes progressives ou des ondes stationnaires. Une analyse de stabilité de ces deux solutions d'équilibre révèle que les ondes progressives sont stables, contrairement aux ondes stationnaires qui demeurent instables indépendamment des valeurs prises par les nombres sans dimension du problème. L'évaluation du nombre de Nusselt associé à ces ondes progressives stables indique que le temps de relaxation favorise le transfert de chaleur, alors que le temps de retardation provoque l'effet inverse.

Références

- [1] D. A. Nield and A. Bejan, Convection in porous media, 3rd ed., *Springer-verlag*, New york 2006.
- [2] Min Chan Kim, Sang Baek Lee, Sin Kim and Bum Jin Chung, Thermal instability of viscoelastic fluids in porous media, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 46, (2003), p. 5065
- [3] Zhiyong Zhang, Ceji Fu and Wenchang Tan, Linear and nonlinear stability analyses of thermal convection for Oldroyd-B fluids in porous media heated from below, *Physics of Fluids*, 20, (2008), p.084103-1