

# Vers un benchmark numérique pour des écoulements de convection mixte 3D à faible nombre de Mach en canal rectangulaire chauffé par le bas

Sofiane MERADJI<sup>1\*</sup>, Gilbert ACCARY<sup>2</sup>, Dominique MORVAN<sup>1</sup>, Dominique FOUGERE<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire MSNM-GP, UMR 6181 CNRS, Technopôle de Château-Gombert, 38 rue Frédéric Joliot Curie, 13451 Marseille, France

<sup>2</sup>Université Saint-Esprit de Kaslik, Faculté de Sciences et de Génie Informatique, Département de Sciences et Technologies, B.P. 446, Jounieh, Liban

\* (auteur correspondant : [sofiane@l3m.univ-mrs.fr](mailto:sofiane@l3m.univ-mrs.fr))

**Résumé** – Il existe peu de références dans la littérature traitant d'écoulements de convection mixte en régime non-Boussinesq. C'est pourquoi, on propose dans le présent travail d'étendre le benchmark 3D du canal rectangulaire chauffé par le bas [1] au cas des grands écarts de température pour lesquels l'approximation de Boussinesq n'est plus valable. Les équations de Navier-Stokes, assorties de l'hypothèse des faibles nombres de Mach, sont résolues. Les résultats préliminaires, relatifs au volet stationnaire du benchmark [1], suggèrent l'idée de lancer un appel à contributions dont les contours resteraient à définir, pour parvenir à la mise au point d'une solution de référence indispensable à la validation de codes numériques.

## Nomenclature

$g$	gravité terrestre, $m.s^{-2}$	$x, y, z$	coordonnées, $m$
$H$	hauteur de la cavité, $m$	$X, Y, Z$	coordonnées adimensionnées
$n$	nombre de cellules de maillage	<i>Symboles grecs</i>	
$Nu$	nombre de Nusselt	$\varepsilon$	paramètre de chauffage, $(T_h - T_0)/T_0$
$Pr$	nombre de Prandtl	$\theta$	température réduite, $(T - T_0)/(T_h - T_0)$
$P_{th}$	pression thermodynamique, $Pa$	$\kappa$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
$R$	constante des gaz parfaits, $J.Kg^{-1}.K^{-1}$	$\mu$	viscosité dynamique, $Pa.s$
$Ra$	nombre de Rayleigh	$\rho$	densité, $Kg.m^{-3}$
$T$	température, $K$	<i>Indices et exposants</i>	
$U_{moy}$	vitesse moyenne en entrée, $m.s^{-1}$	$h$	paroi chaude (inférieure)
$U, V, W$	composantes adimensionnées du vecteur vitesse	$0$	état de référence

## 1. Introduction

Dans la perspective de développement de codes de calculs numériques permettant d'appréhender la convection mixte par la voie de la simulation numérique, on ne peut pas se contenter de données expérimentales seules pour la validation des codes développés. Ceci est dû aux difficultés rencontrées lorsqu'il s'agit de reproduire numériquement de façon suffisamment fiable des conditions expérimentales pas toujours faciles à contrôler [1]. C'est pourquoi, conformément à la démarche employée dans [1,2], la validation de codes numériques doit s'appuyer sur la mise au point de configurations servant de référence, dès lors qu'il en existe peu dans la littérature, notamment dans le cas de convection mixte (3D).

Les écoulements dans les conduites de forme rectangulaire disposées horizontalement et chauffées par le bas, portant également le nom d'écoulements de type Poiseuille-Rayleigh-Bénard, sont le siège d'une convection mixte dont la richesse et la complexité, à en juger par les nombreux paramètres de contrôle et structures spatio-temporelles associées, rendent leur

investigation très attractive, comme en témoignent les travaux [3,4]. Cette richesse et cette complexité font de la configuration Poiseuille-Rayleigh-Bénard un cas test intéressant pour juger de la capacité des codes de calcul à appréhender les écoulements de convection mixte [1]. Le présent travail s'inscrit dans la continuité du benchmark défini dans [1] et ce pour un faible écart de température (hypothèse de Boussinesq). Seul le premier volet du benchmark dont s'inspire ce travail a été traité, à savoir le cas stationnaire. Le travail est étendu à un cas d'écart de température élevé pour lequel, à notre connaissance, il n'existerait pas encore de base de comparaisons.

## 2. Configuration

L'écoulement proposé est un écoulement de type Poiseuille-Rayleigh-Bénard se produisant dans une conduite horizontale chauffée par le bas, de hauteur  $H$ , de largeur  $10H$  et de longueur  $50H$ , comme le montre la figure 1. Les parois latérales sont adiabatiques sur toute la longueur du domaine. Les parois horizontales sont adiabatiques sur une longueur  $2H$  mesurée à partir de la section d'entrée de la conduite. Au-delà, la paroi horizontale supérieure est maintenue à une température uniforme  $T_0$  tandis que la paroi horizontale inférieure est maintenue à une température uniforme  $T_h (>T_0)$ . L'origine du repère est placée à la distance  $2H$  de la section d'entrée de la conduite, matérialisant ainsi la transition continue de la partie isolée thermiquement à la partie thermostatée.

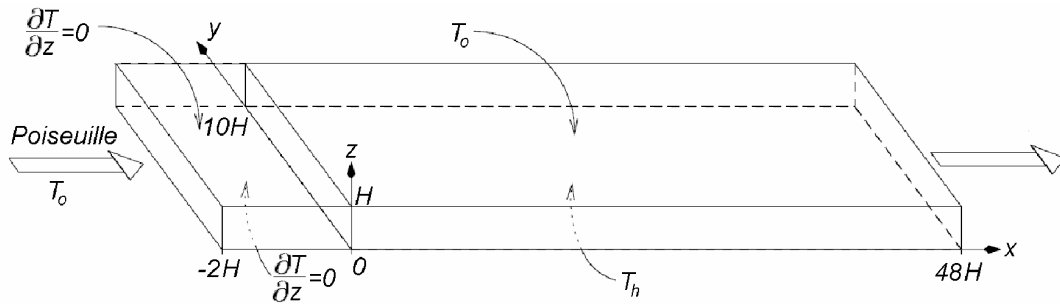


Figure 1 : Géométrie de la configuration retenue et conditions aux limites sur les parois horizontales (parois verticales latérales adiabatiques).

## 3. Modélisation

On considère le cas d'un fluide newtonien dont l'écoulement est régi par les équations de Navier-Stokes assorties de l'hypothèse des faibles nombres de Mach, l'équation d'énergie étant celle d'un gaz parfait. Les équations de transport sont résolues dans leur forme conservative, les effets de la dissipation visqueuse ont été négligés. Pour plus de détails, le modèle mathématique utilisé est entièrement décrit dans [2].

$H$ ,  $T_0$ , la valeur moyenne du profil de vitesse en entrée  $U_{moy}$  et  $H/U_{moy}$  sont considérés respectivement comme grandeurs de référence pour les longueurs, la température, les vitesses et le temps. Ce choix fait apparaître les nombres sans dimension de Reynolds, de Rayleigh et de Prandtl donnés par :

$$Re = \frac{\rho_0 U_{moy} H}{\mu_0}, \quad Ra = \frac{Pr g H^3 \rho_0^2 \varepsilon}{\mu_0^2}, \quad Pr = \frac{\mu_0}{\kappa_0 \rho_0},$$

où  $\varepsilon = (T_h - T_0)/T_0$  est le paramètre de chauffage, soit  $T_h = (1 + \varepsilon)T_0$ ,  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  est l'intensité de la gravité,  $\kappa_0$  est le coefficient de diffusivité thermique,  $\mu_0$  est la viscosité dynamique,  $\rho_0 = P_{th0}/RT_0$  est la densité moyenne,  $P_{th0}$  étant la pression thermodynamique avant le chauffage. On définit également une température réduite  $\theta = (T - T_0)/(T_h - T_0)$ .

Comme on le verra plus loin, la densité à la section d'entrée de la solution est plus grande que  $\rho_0$ , contrairement à l'approximation de Boussinesq où la densité est supposée constante partout sauf dans le terme des forces de flottaison. Par conséquent, le nombre de Reynolds n'est plus conservé si la valeur de  $U_{moy}$  est maintenue constante. Ainsi, deux variantes de l'approximation à faible nombre de Mach ont été considérées dans la présente étude. Dans le cas 1, on conserve le nombre de Reynolds mesuré en entrée du domaine en adaptant la valeur de  $U_{moy}$ . Dans le cas 2, on maintient inchangé le profil de vitesse entrant, le nombre de Reynolds n'est alors plus conservé. Dans les deux cas, 1 et 2, la masse totale du système fluide ( $500 \times \rho_0 H^3$ ) est conservée (écoulement confiné), la densité moyenne dans le domaine de calcul est égale à  $\rho_0$ .

Conformément au benchmark [1], on considère le cas de l'air ( $R = 287 \text{ J.Kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ,  $\mu_0 = 1,68 \times 10^{-5} \text{ Pa.s}$ ,  $Pr = 0,71$ ). La hauteur du canal  $H$  a été prise égale à  $1 \text{ cm}$ , la température de référence  $T_0 = 600 \text{ K}$ , et la pression thermodynamique de référence  $P_{th0} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$ . A l'entrée du domaine, on impose une température uniforme  $T_0$  et un écoulement de type Poiseuille explicité analytiquement dans [4] dont la valeur moyenne  $U_{moy}$  est fixée par le nombre de Reynolds. Finalement, le paramètre  $\varepsilon$  permet le choix du nombre de Rayleigh. Le volet stationnaire du benchmark [1] (traité ici) est caractérisé par  $Re = 50$  et  $Ra = 5000$ ; étant donné les paramètres explicités précédemment, ceci correspond à  $U_{moy} = 0,1427 \text{ m/s}$  et  $\varepsilon = 0,585$ .

#### 4. Aspects numériques

Les équations de conservation sont résolues de manière découplée par une méthode du type volumes finis en formulation implicite, sur un maillage structuré non uniforme. La localisation des variables primaires est basée sur la technique du maillage décalé. La discrétisation spatiale est basée sur des schémas d'ordre élevé et l'emploi de limiteurs de flux. Le schéma QUICK est utilisé pour les termes convectifs et pour les termes diffusifs on a recours à un schéma centré d'ordre 2. Le couplage vitesse-pression est appréhendé à l'aide de l'algorithme SIMPLER. La linéarisation des équations repose sur la procédure de Picard. Les systèmes linéaires d'équations algébriques sont résolus à l'aide de solveurs itératifs (Gradient Conjugué, BiCGStab). L'emploi de techniques de sous-relaxation, lorsque cela est nécessaire, permet d'assurer la convergence et la stabilité du calcul. Une solution stationnaire est supposée obtenue lorsque les résidus de toutes les équations de conservation atteignent  $10^{-10}$  en forme adimensionnée. Les calculs sont menés sur une plateforme SGI ALTIX à mémoire partagée comprenant 20 processeurs Itanium2 cadencés à une fréquence d'horloge égale à 1.5 GHz et à 4 Mo de mémoire cache L3. Une version séquentielle (monoprocasseur) du code numérique a été employée.

A l'instant initial, on suppose que des conditions uniformes règnent. Le profil de vitesse unidirectionnel de Poiseuille imposé en entrée du domaine, est appliqué partout dans le domaine de calcul. Le fluide est à la température  $T_0$  et à la densité  $\rho_0 = P_{th0}/RT_0$ .

Sur les parois solides, des conditions d'adhérence sont appliquées pour la vitesse, tandis que pour la température le type de conditions appliquées est décrit à la section 2. Sur la partie thermostatée des parois horizontales ( $X > 0$ ), on impose  $T_0$  et  $T_h = T_0(1 + \varepsilon)$ , respectivement sur la paroi supérieure ( $Z=1$ ) et inférieure ( $Z=0$ ). En sortie de domaine, la condition standard de sortie (dérivée normale nulle) est imposée sur l'ensemble des variables primaires, à l'exception de  $U$ , sans que cela n'influe sur les solutions. La condition sur  $U$  est explicitée dans [5].

#### 5. Validation

Le code numérique développé a été validé dans l'approximation de Boussinesq en confrontant les résultats obtenus avec ceux du volet stationnaire du benchmark [1]. Une concordance quantitative des résultats a été observée, avec l'emploi d'un maillage non uniforme défini par

( $n_x = 228$ ,  $n_y = 182$  et  $n_z = 80$ ), raffiné au voisinage des parois solides et au niveau de la transition de la zone calorifugée vers la zone thermostatée (en  $X = 0$ ). L'objet du présent travail n'étant pas de répondre, dans ces colonnes, à l'appel à contributions [1], nous nous limiterons à présenter une sélection de résultats. A cet effet, on représente le champ de température réduite à la figure 2; dans le plan vertical d'abscisse  $X = 30$  et dans le plan horizontal de côte  $Z = 0,5$ .

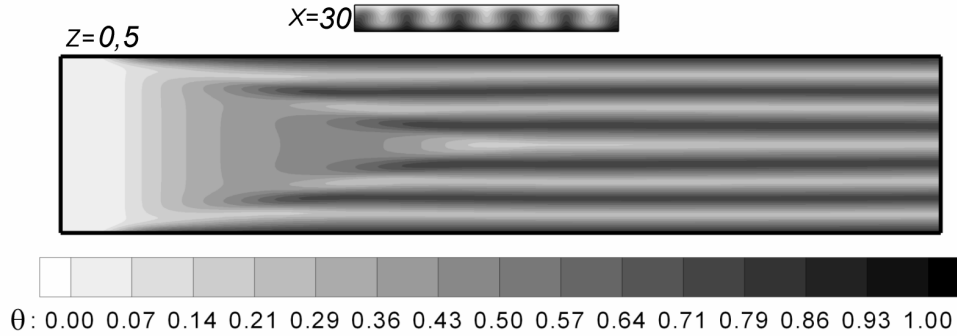


Figure 2 : Iso-valeurs du champ de températures réduites dans plan vertical d'abscisse adimensionnée  $X=30$  (en haut) et dans plan horizontal de côte adimensionnée  $Z=0,5$  (en bas), dans le cadre de l'approximation de Boussinesq.

La figure 3(a) montre les profils longitudinaux des composantes adimensionnées de la vitesse et de la température réduite, et ce, le long de l'axe d'équation ( $Y = 5$ ,  $Z = 0,5$ ). A la figure 3(b), sont donnés les profils longitudinaux du nombre de Nusselt  $Nu = -H(\partial T/\partial z)/(T_h - T_0)$ , et ce, le long d'axes indiqués sur la figure elle-même. La durée du calcul est de 100 heures CPU.

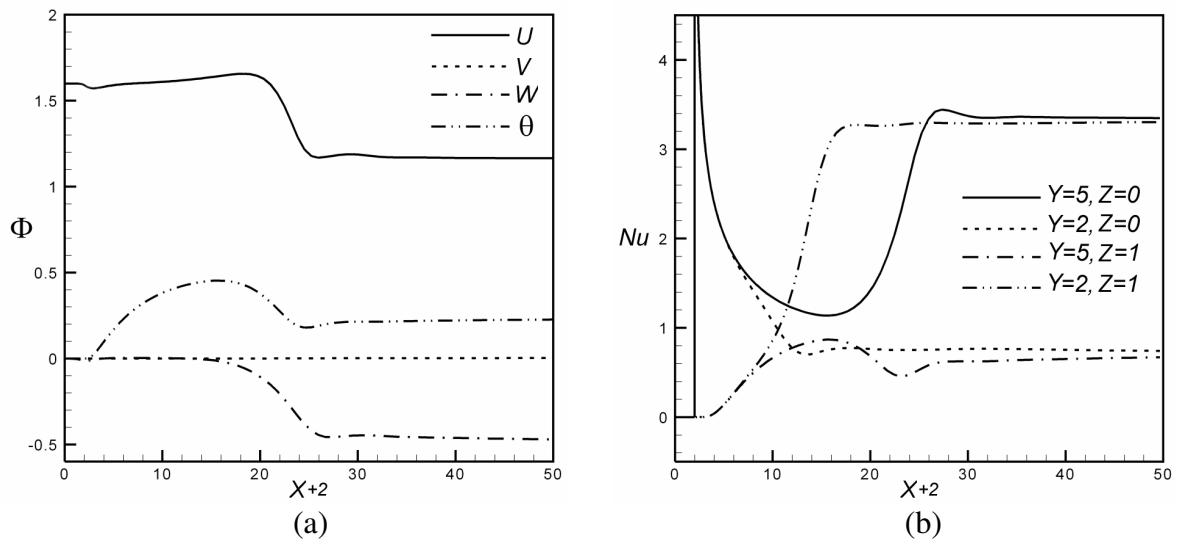


Figure 3 : Dans l'approximation de Boussinesq : (a) profils longitudinaux des grandeurs adimensionnées  $U$ ,  $V$ ,  $W$  et  $\theta$  le long de l'axe ( $Y = 5$ ,  $Z = 0,5$ ) ; (b) évolution longitudinale du nombre de Nusselt sur différents axes dans la direction  $X$ .

## 6. Comparaisons entre formulations

Dans le cadre de l'hypothèse des faibles nombres de Mach, le cas-test sélectionné se décline en deux parties, l'une (cas 1) qui consiste à maintenir une valeur constante du débit massique à l'entrée du domaine et l'autre (cas 2) qui vise à maintenir le profil de vitesse en entrée. Cela se traduit, respectivement, par une valeur constante du nombre de Reynolds mesuré en entrée

(cas 1) et une valeur constante de la moyenne du profil de vitesse en entrée (cas 2). A l'instar du cas à faible écart de chauffage (Boussinesq), des solutions stationnaires ont été obtenues dans les cas présentant un écart de chauffage élevé, pour lesquels la durée du calcul est de 250 heures.

A la figure 4(a), on représente l'évolution longitudinale de la composante  $U$  de la vitesse dans le cas 1 et le cas 2, que l'on compare à la solution obtenue pour un écart de chauffage faible (Boussinesq). Etant donné le confinement du système fluide, la masse totale du système se conserve et la densité moyenne du système est égale à sa valeur de référence  $\rho_0$ . En vertu du chauffage appliqué sur la paroi horizontale inférieure, engendrant une augmentation en moyenne de la température dans le canal, et en se servant de la condition de conservation de la masse totale du système, on peut montrer que la pression thermodynamique augmente d'environ 24% dans les deux cas (respectivement  $P_{th}/P_{th0} = 1,2368$  et  $1,2319$ ). Cela engendre, sur la section d'entrée du domaine (isotherme), une augmentation de la densité d'après la loi d'état des gaz parfaits ( $\rho = P_{th}/RT$ ). Par conséquent, dans le cas 1, on observe dans la figure 4(a) une valeur plus faible de la moyenne du profil de vitesse à l'entrée, comparativement au cas Boussinesq. Dans le cas 2, on observe une augmentation des effets inertiels, qui correspond à l'augmentation du débit massique et donc du nombre de Reynolds mesuré en entrée.

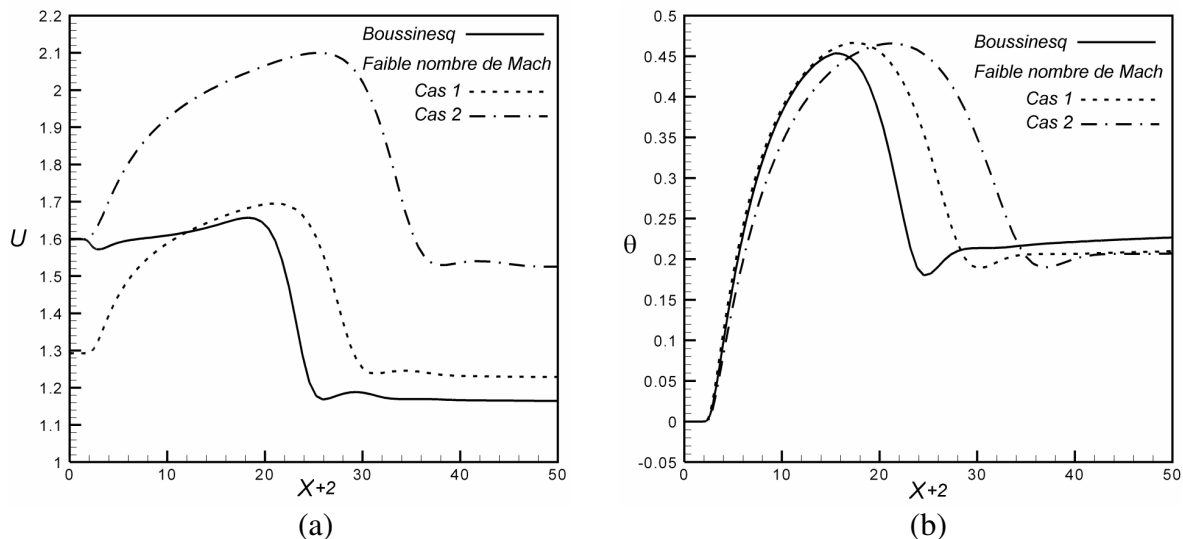


Figure 4 : Profil longitudinal de la composante  $U$  de la vitesse (a) et de la température réduite (b) le long de l'axe ( $Y = 5$ ,  $Z = 0,5$ ) pour l'approximation de Boussinesq et pour les deux variantes considérées de l'hypothèse du faible nombre de Mach (cas 1 :  $Re$  est conservé, cas 2 :  $U_{moy}$  est conservé).

Des différences importantes sont enregistrées sur les champs dynamiques. Néanmoins, et à ce stade de l'exploitation des résultats, il semblerait que ces différences deviennent moins prononcées dès lors qu'il s'agit des effets thermiques, comme le montrent la figure 4(b), représentant le profil longitudinal de la température réduite ainsi que les figures 5(a) et 5(b) dans lesquelles on présente l'évolution du nombre de Nusselt le long des axes médians ( $Y = 5$ ) des parois horizontales ( $Z = 0$  et  $Z = 1$ ). Enfin, on constate que le choix de la formulation influe peu sur la thermique, en sortie de domaine où l'écoulement est pratiquement établi, dans le cas d'écart de chauffage élevé. Il est bien entendu, que des investigations complémentaires restent à mener afin de s'assurer du bien fondé des choix effectués dans cette partie (notamment en ce qui concerne la condition de sortie) et de la pertinence des solutions obtenues. En effet, bien que l'on se soit assuré de la convergence de la solution en maillage, la comparaison de solutions obtenues par des méthodes différentes, à l'instar de ce qui est pratiqué dans [1], est indispensable.

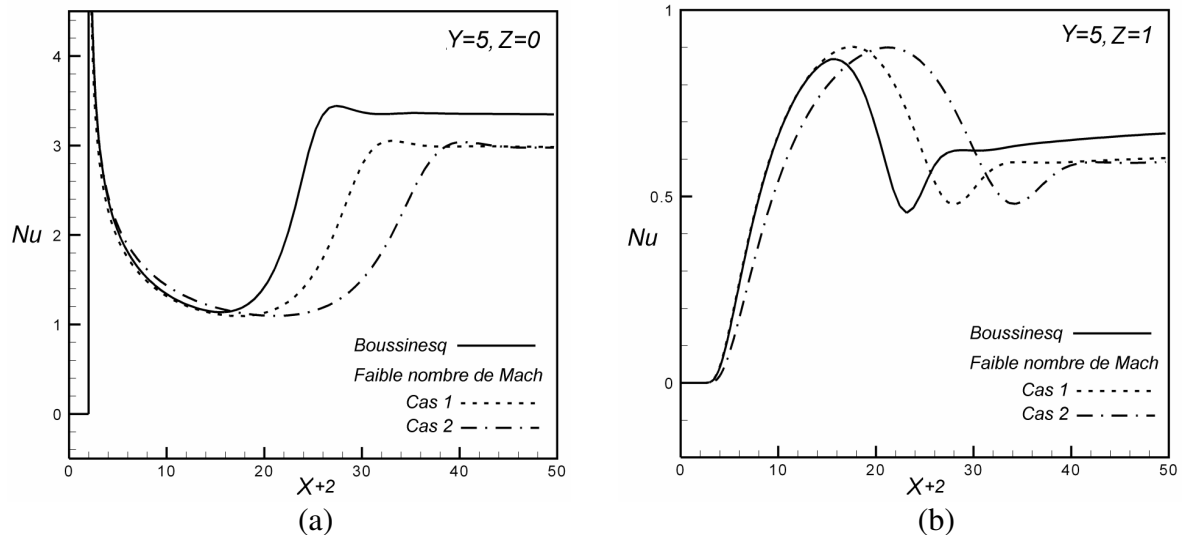


Figure 5: Evolution longitudinale du nombre de Nusselt le long de l'axe ( $Y=5, Z=0$ ) (a) et le long de l'axe ( $Y=5, Z=1$ ) (b) pour l'approximation de Boussinesq et pour les deux variantes considérées de l'hypothèse du faible nombre de Mach (cas 1 :  $Re$  est conservé, cas 2 :  $U_{moy}$  est conservé).

## 7. Conclusions

Des solutions de référence stationnaires ont été obtenues pour un cas-test comportant deux variantes, et ce, dans le cadre d'un problème de Poiseuille-Rayleigh-Bénard présentant un écart de chauffage élevé ( $\varepsilon = 0,585$ ) pour  $Re = 50$ ,  $Ra = 5000$  et  $Pr = 0,7$ . Les auteurs sont conscients de n'être encore qu'à un stade prématuré du processus conduisant à faire de la présente configuration un benchmark. Mais les différences notables observées avec l'approximation de Boussinesq justifient l'appel à contributions afin que l'on puisse au moins dans un premier temps définir les contours du travail à réaliser et, à terme, s'en servir dans le processus de validation de codes de calcul numériques développés dans l'hypothèse d'un faible nombre de Mach, préalable incontournable avant d'aborder des configurations physiques complexes.

## Références

- [1] M. Medale and X. Nicolas, Towards benchmark solutions for three-dimensional mixed convection flows in rectangular channels heated from below, (<http://www.sft.asso.fr/groupe/simul.html>).
- [2] P. Le Quéré, C. Weisman, H. Paillère, J. Vierendeels, E. Dick, R. Becker, M. Braack, and J. Locke, Modelling of natural convection flows with large temperature differences: A Benchmark problem for Low Mach number solvers. Part 1: Reference Solutions, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39 (3), 609, 2005.
- [3] X. Nicolas, Simulation numérique et stabilité des écoulements de convection mixte en conduite rectangulaire chauffée par le bas, Thèse de l'Université Paul Sabatier, 1997.
- [4] X. Nicolas, J.-M. Lwijkx and J.-K. Platten, Linear Stability of mixed convection flows in horizontal rectangular channels of finite transversal extension heated from below", *IJHMT*, 43, 2000, 589-610.
- [5] H. H. Versteeg and W. Malalasekera, An introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method, Longman, 1995, Chap.9, p.198

## Remerciements

Les auteurs remercient la Communauté Européenne pour le soutien financier apporté au projet de lutte contre les feux de forêts Fireparadox.