

Effets de double-diffusion dans la bioconvection gravitactique en milieux poreux

Tri NGUYEN-QUANG^{1, 2*}, The Hung NGUYEN¹, Georges LE PALEC², Philippe BOURNOT²

¹ Département de Génie Mécanique, École Polytechnique, Montréal, Québec, H3C 3A7, Canada

² Institut de Mécanique de Marseille, Université de la Méditerranée, Marseille, France

* (auteur correspondant: tri.nguyen-quang@polymtl.ca)

Résumé - Dans cet article, nous étudions le phénomène de la bioconvection gravitactique dans un autre milieu stratifié. Les résultats obtenus dans cette étude montrent que les effets dus à la double diffusion peuvent à la fois stabiliser ou déstabiliser, accélérer ou diminuer la propre intensité de la bioconvection. En particulier, ils peuvent engendrer un régime d'écoulement sous-critique. La sous-criticité du régime d'écoulement de double-diffusion bioconvective existe indépendamment de la relation entre les diffusivités des facteurs stabilisant et déstabilisant.

Nomenclature

D_c	diffusivité des cellules, m^2/s	P	pression adimensionnelle
$F = L/H$	rapport de forme de la cavité poreuse 2D	Ra_b	nombre de Rayleigh bioconvectif $Ra_b = gKH \beta_b \Delta n / \nu D_c$
k	nombre d'ondes basé sur l'échelle de longueur H	Ra_T	nombre de Rayleigh thermoconvectif $Ra_T = gKH \beta_T \Delta T / \nu \alpha$
K	perméabilité, m^2	T	température, K
L	longueur de la cavité considérée, m	T^*	température adimensionnelle
Le	nombre de Lewis, α / D_c	\vec{V}^*	vitesse de Darcy, m/s
n	concentration des cellules, nombre de cellules/ m^3	\vec{V}_c^*	vitesse gravitactique de la cellule, m/s
\bar{n}	concentration moyenne des cellules, nombre de cellules/ m^3	\vec{V}	vitesse adimensionnelle de Darcy $\vec{V} = H\vec{V}^* / D_c$
n_0	concentration des cellules sur la surface inférieure, nombre de cellules/ m^3	\vec{V}_c	vitesse adimensionnelle de la cellule $\vec{V}_c = H\vec{V}_c^* / D_c$
n_1	concentration des cellules sur la surface supérieure, nombre de cellules/ m^3	(X, Y, t^*)	coordonnées cartésiennes, m et temps, s
N	concentration adimensionnelle de cellules	(x, y, t)	coordonnées Cartésiennes et temps adimensionnels $x=X/H; y=Y/H; t=D_c t^*/H^2$
\bar{N}	concentration moyenne adimensionnelle	Symboles grecs	
H	profondeur de la cavité, m	α	diffusivité thermique, m^2/s
P^*	pression dynamique, Pa		

β_b	coefficient de variation de densité de la suspension $\beta_b = \mathcal{G}\Delta\rho / \rho_0$	ψ	$\psi = \psi^* / D_c$ fonction de courant adimensionnelle
β_T	coefficient d'expansion thermique, K^{-1}	ν	viscosité cinématique de la suspension, m^2/s
Δn	différence de concentration $\Delta n = n_1 - n_0$, nombre de cellules/ m^3	ρ_w	densité de l'eau, kg/m^3
μ	viscosité dynamique du fluide ($IN.s/m^2$)	ρ_c	masse volumique de la cellule, kg/m^3
$\Delta\rho$	$\Delta\rho = \rho_c - \rho_w$, kg/m^3	ρ	masse volumique de la suspension "fluide-cellule", kg/m^3
ψ^*	fonction de courant, m^2/s	ρ_0	densité de la suspension au fond de la cavité, kg/m^3

1. Introduction

Contrairement à la convection de Bénard qui a été largement étudiée depuis une centaine d'années, la bioconvection [1] est un phénomène qui a suscité un intérêt croissant depuis seulement quelques dizaines d'années. En fait, la bioconvection gravitactique est fondamentalement semblable à la convection de Bénard lorsque la vitesse de natation des micro-organismes est très faible [2, 3]. Dans cet article, nous étudions les effets combinés des stratifications de densité dues à la fois à des *micro-organismes gravitactiques* dans un milieu poreux et des sollicitations thermiques. La bioconvection est générée par le mouvement ascendant des micro-organismes qui sont légèrement plus denses que l'eau, tandis que la stratification thermique joue un rôle soit stabilisant soit déstabilisant. La compétition entre ces deux mécanismes opposants est régie par le phénomène de *double diffusion* [2, 4]. Le problème est décrit par l'équation de Darcy et les équations de conservation de la concentration des micro-organismes et des solutés [5]. Ces équations sont résolues par la méthode des volumes de contrôle, en fonction des paramètres gouvernants du problème, soit le rapport de forme de la cavité, les nombres de *Rayleigh*, de *Péclet* (ou vitesse adimensionnelle des micro-organismes) et de *Lewis*. Il sera montré que la bioconvection stationnaire sous la sollicitation thermique pourra être un phénomène d'instabilité *sous-critique*, indépendamment du nombre de Lewis. Ce problème se présente dans plusieurs applications géophysiques comme, par exemple, l'étude de la dynamique de quelques types de micro-organismes mobiles thermophiles, vivant dans les sources thermales, parmi lesquels on peut citer les protozoaires de la famille *Tetrahymena* (*Tetrahymena thermophila*).

2. Description du problème et formulation mathématique

2.1 Description physique et équations gouvernantes

Kuznetsov et Jiang [6] en employant le modèle continu de Pedley et al. [7] et la théorie de Whitaker [8] ont proposé un modèle de bioconvection dans un milieu poreux: l'équation de Darcy pour l'écoulement de fluide et l'équation diffusion-convection pour

la concentration des cellules. Deux critères [9] sont proposés pour utiliser la bioconvection en milieu poreux : la perméabilité doit être suffisamment grande pour que les micro-organismes puissent la traverser et elle doit être suffisamment petite pour amortir la bioconvection.

Nous considérons une couche poreuse isotrope $H \times L$ de perméabilité K confinée 2D entre les 4 parois imperméables, contenant une densité initiale \bar{n} des micro-organismes nageant verticalement vers le haut (*gravitaxie*) avec une vitesse cellulaire \vec{V}_c^* . La cavité est soumise aux deux températures constantes $T_1 < T_2$ (fig.1). Toutes les propriétés physiques du fluide sont supposées constantes, à l'exception de la densité dans la poussée d'Archimède selon l'approximation de Boussinesq. On suppose que la matrice poreuse n'absorbe pas les micro-organismes et que la taille des pores est suffisamment plus grande que celle des micro-organismes. On suppose également que les derniers ne participent pas aux échanges de chaleur car ils ne réagissent pas chimiquement avec le milieu fluide et leur taille est telle qu'on peut considérer, à chaque instant, qu'ils sont en équilibre thermique avec celui-ci. La chaleur est aussi supposée suffisamment petite pour que les micro-organismes ne soient pas tués et que leurs comportements gravitactiques ne soient pas perturbés. Les équations gouvernantes dimensionnelles de la bioconvection gravitactique sous l'effet thermique dans le milieu poreux 2D sont donc :

$$\nabla \cdot \vec{V}^* = 0 \quad (1)$$

$$-\vec{\nabla} P^* - \frac{\mu}{K} \vec{V}^* + \bar{g} \rho = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \vec{V}^*) + \nabla \cdot (n \vec{V}_c^*) = D_c \nabla^2 n \quad (3)$$

$$\frac{\partial T^*}{\partial t} + \nabla \cdot (T^* \vec{V}^*) = \alpha \nabla^2 T^* \quad (4)$$

$$\rho = \rho_0 (1 + \beta_B (n - n_0) - \beta_T (T^* - T_0^*)) \quad (5)$$

Sous *forme normalisée* en termes de fonction de courant, ces équations deviennent :

$$\begin{cases} \nabla^2 \psi = Ra_b \frac{\partial N}{\partial x} - Ra_T Le \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot (N \vec{V}) + \nabla \cdot (N \vec{V}_c) = \nabla^2 N \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \nabla \cdot (T \vec{V}) = Le \nabla^2 T \end{cases} \quad (6)$$

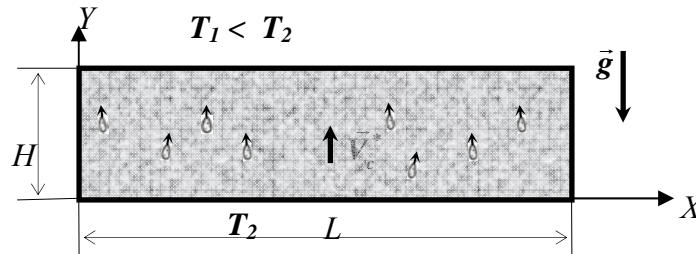


Figure 1 : La description physique du problème.

2.2 Conditions initiales (CI) et aux limites (CL) adimensionnelles (cf. Nomenclature)

- CI de la concentration cellulaire $\bar{N} = \frac{\bar{n} - n_0}{\Delta n} = \frac{e^{V_c} - V_c - 1}{(e^{V_c} - 1)V_c}$ (7)
- CI de la température $T_{t=0} = 0$ (8)
- CL aux parois

$$\begin{cases} x=0, F & \psi = 0 & \partial N / \partial x = \partial T / \partial x = 0 \\ y=0 & \psi = 0, T = 1 & \partial N / \partial y = V_c N + V_c / (e^{V_c} - 1) \\ y=1 & \psi = T = 0 & \partial N / \partial y = V_c N + V_c / (e^{V_c} - 1) \end{cases} \quad (9)$$

3. Résultats et discussions

Les résultats par la théorie de stabilité linéaire sont présentés sous forme de diagrammes de stabilité pour les nombres de Rayleigh critiques (fig. 2-5) tandis que la simulation numérique est rapportée sous forme de diagrammes de bifurcation pour différents nombres de *Lewis* et de *Péclet* (fig. 6 et 7). Compte tenu de la longueur des développements, la démarche et les détails de l'analyse de stabilité linéaire sont donnés dans la référence [2].

Quand la cavité considérée est chauffée par le bas, les effets thermiques montrent une déstabilisation remarquable des mouvements bioconvectifs. Cette déstabilisation dépend encore du nombre de Lewis *Le* et de la vitesse de mobilité (figure 2).

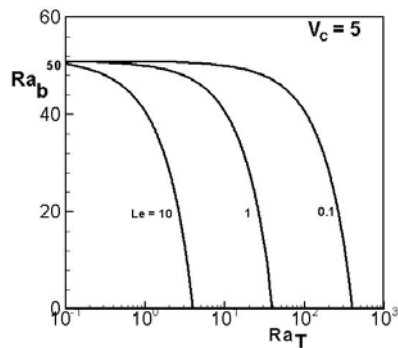


Figure 2 : Ra_b vs Ra_T en différentes valeurs de *Le* pour une cavité allongée chauffée par le bas, $V_c = 5$

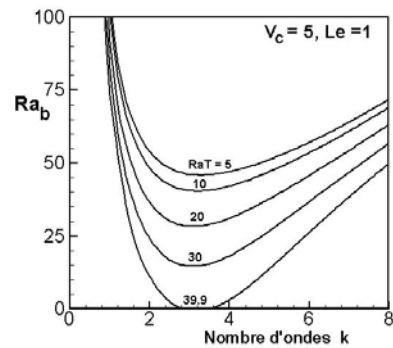


Figure 3 : (Ra_b vs k) en différentes valeurs de Ra_T pour $Le=1$, $V_c=5$, cavité allongée chauffée par le bas

Lorsque la cavité considérée est refroidie (ou chauffée par le haut), les effets thermiques obtenus montrent une stabilisation des mouvements bioconvectifs. On voit qu'à une petite valeur de la vitesse de mobilité (figure 4), le nombre de Rayleigh biothermoconvectif Ra_b est linéairement proportionnel au nombre de Rayleigh Ra_T pour n'importe quelle valeur de *Lewis*. Cet état de linéarité est conservé pour les cas de Lewis petit ($Le=0.1$) à une vitesse de mobilité grande, mais devient non linéaire quand *Le* est

grand ($Le \geq 1$) (figure 4). Les courbes de diagramme de stabilité (figures 3 et 5) montrent également que la valeur critique du nombre d'ondes k_{cr} correspondant à une valeur critique du nombre de Rayleigh bio-thermoconvectif Ra_b a une nette tendance de proportionnalité linéaire en fonction des valeurs de Ra_T dans le cas d'une cavité chauffée par le haut et de décroissance quand Ra_T augmente pour le cas du chauffage par le bas.

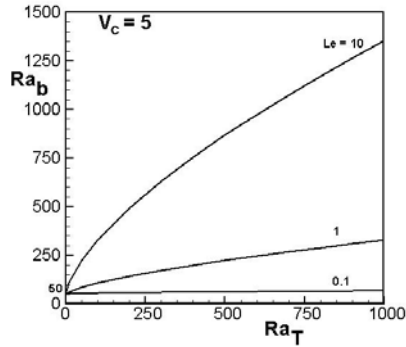


Figure 4 : Ra_b vs Ra_T pour différentes valeurs de Lewis Le pour une cavité allongée chauffée par le haut, $V_c = 5$

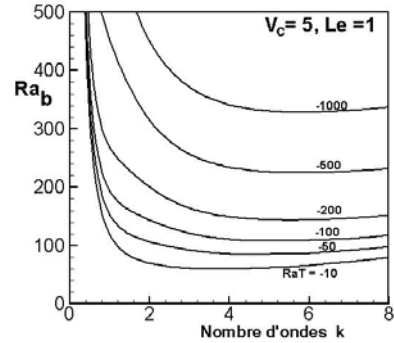


Figure 5 : Ra_b vs k en différents Ra_T pour $Le=1$, $V_c=5$, cavité allongée chauffée par le haut

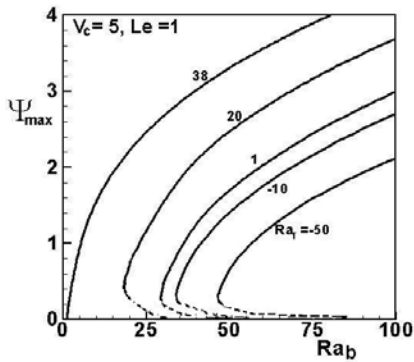


Figure 6 : Courbes de bifurcation de la thermo-bioconvection gravitactique de vitesse $V_c = 5$, $Le=1$, cavité $F = L_{cr}$

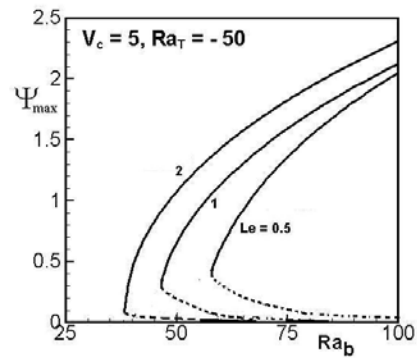


Figure 7 : Courbes de bifurcation de vitesse $V_c = 5$, $Ra_T = -50$, à différents Lewis $Le=0.5, 1, 2$, cavité $F = L_{cr}$

Nous avons montré que le régime d'écoulement de la *bioconvection gravitactique pure* est sous-critique, indépendamment du milieu d'ambiance, qu'il soit fluide ou poreux [2]. Murray et Chen [4] montrent aussi que la *double-diffusion thermosolutale pure* est capable d'engendrer un écoulement sous-critique. Il est évident que les effets de double-diffusion dans la bioconvection, combinaison de ces deux phénomènes, pourrait éventuellement engendrer une autre sous-criticité. Les résultats illustrés sur la figure 6 montrent bien qu'il existe effectivement une sous-criticité du régime de l'écoulement thermo-bioconvectif. Ce régime sous-critique apparaît nettement dans le cas des écoulements opposés et il est moins net dans le cas des écoulements additifs. L'intensité de la sous-criticité est plus forte quand le Rayleigh de l'écoulement opposé est plus grand. En revanche, la sous-criticité devient plus faible quand les écoulements sont additifs et semble disparaître quand le nombre de Rayleigh de l'écoulement additif atteint son propre seuil critique, en absence de l'autre stratification (le nombre de Rayleigh est 39.5 pour la convection de type de Dirichlet). On constate que quelque soit la valeur de

Lewis *Le* (inférieure ou supérieure à 1), le régime sous-critique existe dans le cas de double-diffusion bioconvective (figure 7).

4. Conclusion

Les effets dus à la double diffusion peuvent à la fois stabiliser ou déstabiliser, accélérer ou diminuer la propre intensité de la bioconvection. La bioconvection purement gravitactique elle-même crée une sous-criticité. La double-diffusion bioconvective peut donc également engendrer un régime sous-critique. Cette sous-criticité s'aggrave quand les écoulements stratifiés sont opposés et s'affaiblit quand les stratifications sont additives et peut même disparaître. La sous-criticité du régime d'écoulement de double-diffusion bioconvective existe indépendamment de la relation entre les diffusivités des facteurs stabilisant et déstabilisant.

Références

- [1] J.R. Platt, *Bioconvection patterns in cultures of free-swimming organisms*. Science 1961. **133**: p. 1766.
- [2] T. Nguyen-Quang, *Gravitactic bioconvection study in porous media - Etude de la bioconvection gravitactique en milieux poreux - Ph.D. dissertation*, in *Mechanical Engineering Department*. 2006, Ecole Polytechnique de Montréal - University of Montreal: Canada. p. 181.
- [3] T. Nguyen-Quang, A. Bahloul, and T.H. Nguyen, *Stability of gravitactic microorganisms in a fluid-saturated porous medium*. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2005. **32**(1-2): p. 54-63.
- [4] B.T. Murray, C.F. Chen, *Double-diffusion convection in a porous medium*. . Journal of Fluid Mechanics, 1989. **201**: p. 147-166.
- [5] N.A. Hill, T.J. Pedley, *Bioconvection*. Fluid Dynamics Research, 2005. **37**(1-2 SPEC ISS): p. 1-20.
- [6] A.V. Kuznetsov, N. Jiang, *Numerical investigation of bioconvection of gravitactic microorganisms in an isotropic porous medium*. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2001. **28**(7): p. 877-886.
- [7] T.J. Pedley, N.A. Hill and J.O. Kessler, *The growth of bioconvection patterns in a uniform suspension of gyrotactic micro-organisms*. Journal of Fluid Mechanics, 1988. **195**: p. 223-238.
- [8] S. Whitaker, *The method of volume averaging*. 1999, Dordrecht, Boston: Kluwer Academic.
- [9] A.V. Kuznetsov, A.A. Avramenko, *A 2D analysis of stability of bioconvection in a fluid saturated porous medium - Estimation of the critical permeability value*. International Communications in Heat and Mass Transfer, 2002. **29**(2): p. 175-184.

Remerciements

Cette recherche a été subventionnée par "the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada".