

Stabilité magnétohydrodynamique des écoulements de convection naturelle dans une configuration cylindrique de type Czochralski

Fateh OUDINA-MEBAREK¹, Rachid BESSAIH^{1*}

¹Laboratoire d'Energétique Appliquée et de Pollution (LEAP), Département de Génie Mécanique
Université Mentouri-Constantine

Route d'Ain El. Bey, 25000 Constantine, Algérie

*(auteur correspondant : Bessaihr@yahoo.fr)

Résumé- L'effet d'un champ magnétique sur la détermination du nombre de Rayleigh critique Ra_{Cr} et la stabilité des écoulements de convection naturelle dans une configuration cylindrique de type Czochralski contenant un métal liquide, est faite. Dans la limite des faibles nombres de Prandtl, l'instabilité apparaît sous forme d'oscillations régulières pour des valeurs suffisamment élevées du nombre de Rayleigh. Des diagrammes de stabilité montrent la dépendance du nombre de Rayleigh critique (correspondant à la transition oscillante régulière) et de la fréquence critique des oscillations en fonction du nombre de Hartmann, Ha . Une forte dépendance du nombre de Rayleigh critique et de la fréquence critique F_{Cr} avec l'augmentation du champ magnétique de $Ha = 10$ à 50 pour les trois nombres de Prandtl, $Pr = 0.015, 0.019, 0.026$, est obtenue.

Mots clés : Convection naturelle/transfert de chaleur/ champ magnétique/ instabilité/métal liquide.

Nomenclature

B champ magnétique, *Tesla*
 F fréquence adimensionnelle
 F_r, F_z Forces adimensionnelles de Lorentz
suivant r et z
 r, z coordonnées cylindriques
adimensionnelles
 r^*, z^* coordonnées cylindriques
dimensionnelles, m
 r_c rayon du cylindre, m
 r_s rayon du cristal, m
 H hauteur du cylindre, m
 Ha nombre de Hartmann
 Ra nombre de Rayleigh
 p pression adimensionnelle
 p^* pression, Pa
 Pr nombre de Prandtl
 T température adimensionnelle
 T^* température, K
 t temps dimensionnel, s
 g accélération de la pesanteur, $m^2.s^{-1}$
 u, v composantes de la vitesse
adimensionnelles

u^*, v^* composantes de la vitesse
dimensionnelles, $m.s^{-1}$

Symboles grecs

α diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
 β coefficient d'expansion thermique, K^{-1}
 ν viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
 σ conductivité électrique, $\Omega^1.m^{-1}$
 ρ masse volumique, $Kg.m^{-3}$
 τ temps adimensionnel
 ω amplitude adimensionnelle
 Ψ fonction de courant adimensionnelle

Indices et exposants

Cr valeur critique
 c froide
 h chaude
 max maximale
 min minimale

1. Introduction

L'intérêt pratique de la technique de Czochralski est d'accroître les monocristaux d'une phase liquide utilisés dans des dispositifs électroniques [1-2]. Les cristaux sont obtenus à partir du métal liquide contenu dans un creuset cylindrique (Fig.1). Il est clair que les fluctuations (instabilités) hydrodynamiques et thermiques d'un fluide (fluide à faible nombre de Prandtl ou semi-conducteur, par exemple) ont des effets néfastes sur la qualité des cristaux formés lors de la solidification par la technique de Czochralski. Ceci est dû principalement à l'apparition de striations modifiant la structure des cristaux obtenus. Pour stabiliser les écoulements convectifs dans la phase liquide et de retarder les seuils de transitions, l'application d'un champ magnétique est nécessaire [3] et [4].

A notre connaissance, l'effet d'un champ magnétique sur la structure d'écoulement oscillatoire d'un fluide à faible nombre de Prandtl n'a jamais été examinée, à l'exception du cas traité par Bottaro et Zebib en situations axisymétrique [1] et non axisymétrique [2], en absence d'un champ magnétique. Pour cela, notre objectif consiste à analyser l'effet d'un champ magnétique sur les profils de vitesse et de température en régime oscillatoire, et la détermination des différents nombres de Rayleigh critiques, Ra_{Cr} , et fréquences critiques, F_{Cr} , en fonction des différents nombres de Hartmann choisis dans cette étude.

2. Géométrie et modèle mathématique

Le problème est montré schématiquement par la figure 1. Un fluide semi-conducteur de viscosité cinématique ν , de densité ρ , de diffusivité thermique α et de conductivité électrique σ est contenu à l'intérieur d'un creuset cylindrique de hauteur H et de rayon r_c . r_s est le rayon du cristal formé (avec $r_s = 0.5 r_c$). Les parois verticales du cylindre sont maintenues à la température constante T_h , ainsi que la paroi inférieure. Le disque est situé dans la région à $z = H$ et $0 \leq r \leq r_s$, possède une température T_c ($T_c < T_h$). L'ensemble est soumis à un champ magnétique uniforme externe B . Nous supposons que l'écoulement est axisymétrique, incompressible, Newtonien et visqueux, et que l'hypothèse de Boussinesq est valable [5].

En introduisant les variables adimensionnelles suivantes :

$$r = \frac{r^*}{r_c}, \quad z = \frac{z^*}{r_c}, \quad u = \frac{u^*}{(\nu/r_c)}, \quad v = \frac{v^*}{(\nu/r_c)}$$

$$p = \frac{p^*}{\rho(\nu/r_c)^2}, \quad T = \frac{T^* - T_c}{T_h - T_c}$$

Les équations gouvernant le système s'écrivent alors :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + F_r \quad (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rv)}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + F_z + \frac{Ra}{Pr} T \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + u \frac{\partial T}{\partial r} + v \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{1}{Pr} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right\} \quad (4)$$

où $F_r = -Ha^2.u$ et $F_z = 0$ sont respectivement les forces de Lorentz adimensionnelles dans les directions r et z . Dans cet article, seule l'orientation verticale du champ magnétique B est considérée. L'adimensionnalisation des équations (1)-(4) fait apparaître le nombre de Prandtl, $Pr = \nu/\alpha$, le nombre de Rayleigh, $Ra = g\beta (T_h - T_c) r_c^3 / (\nu.\alpha)$, et le nombre de Hartmann, $Ha = Br_c(\sigma/\rho\nu)^{1/2}$, qui désigne le rapport des forces électromagnétiques aux forces de viscosité.

Initialement, à $t = 0$, $u=v=T=0$. Les conditions aux limites sont présentées pour notre problème sous forme adimensionnelle, pour $t > 0$, comme suit [1] :

$$\begin{array}{llll}
 0 \leq r \leq 1, & z = 0 & u = v = 0 & T = 1 \text{ (fond du cylindre)} \\
 r = 1, & 0 \leq z \leq 2 & u = v = 0 & T = 1 \text{ (paroi latérale du cylindre)} \\
 r = 0, & 0 \leq z \leq 2 & u = \frac{\partial v}{\partial r} = 0 & \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \text{ (axe de symétrie)} \\
 0 \leq r \leq 0.5, & z = 2 & u = v = 0 & T = 0 \text{ (région du cristal de rayon } r_s) \\
 0.5 \leq r \leq 1, & z = 2 & \frac{\partial u}{\partial z} = v = 0 & \frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ (surface libre)}
 \end{array}$$

3. Méthode numérique

Les équations (1)–(4) et leurs conditions aux limites sont résolues en utilisant la méthode des volumes finis (Patankar [6]). Le schéma des différences centrées est utilisé pour évaluer les flux convectifs et diffusifs à l'interface de chaque volume de contrôle. Le couplage vitesse-pression est résolu en utilisant l'algorithme SIMPLER [6]. Plusieurs maillages non uniformes resserrés près des parois de l'enceinte où les forts gradients de vitesse et de température existent ont été utilisés pour voir leurs effets sur la solution numérique. Le maillage qui a été choisi pour achever les calculs nécessaires à la résolution du problème considéré, est celui de 40 x 160 noeuds, puisqu'il est considéré pour avoir le meilleur compromis entre temps de calcul et précision (voir tableau 1). Ce code maison a montré un bon accord avec les résultats trouvés dans la littérature [1-2], sans la présence d'un champ magnétique. Les calculs ont été effectués sur un ordinateur personnel avec CPU 2.66 GHz, ainsi, le temps de calcul moyen pour un cas typique était environ de 3 heures.

Maillage	Fonction de courant adimensionnelle Ψ
20 × 40 noeuds	$\Psi_{\min} = -1.2121$ $\Psi_{\max} = 74.3227$
20 × 60 noeuds	$\Psi_{\min} = -0.9472$ $\Psi_{\max} = 75.5080$
30 × 60 noeuds	$\Psi_{\min} = -0.9043$ $\Psi_{\max} = 79.1321$
40 × 160 noeuds	$\Psi_{\min} = -0.8820$ $\Psi_{\max} = 82.1820$
40 × 200 noeuds	$\Psi_{\min} = -0.8712$ $\Psi_{\max} = 82.7020$

Tableau 1: Comparaison des solutions obtenues de la fonction de courant adimensionnelle Ψ avec différents maillages pour $Pr = 0.015$, $Ra = 10^4$ et $Ha = 0$

4. Résultats et discussion

Afin de déterminer le nombre de Rayleigh du début de l'oscillation, une série de calcul a été exécutée, en changeant Ra dans notre code de calcul pour un pas de temps adimensionnel $\Delta t = 2 \times 10^{-6}$ jusqu'à l'obtention des oscillations régulières correspondantes à un nombre de Rayleigh critique, Ra_{Cr} .

Sur les Figures 2 et 3, on a représenté les variations temporelles de la vitesse radiale adimensionnelle u et de la température adimensionnelle T à une sonde donnée du domaine étudié, pour $Ra_{Cr} = 4.5 \times 10^4$, $Ha = 0$ (Fig.2); $Ra_{Cr} = 5.25 \times 10^4$ et $Ha = 10$ (Fig.3). Ces courbes évoluent de manière oscillatoire autour des valeurs moyennes durant l'intervalle de temps $0.0 \leq t \leq 0.36$. En examinant en détail les Figures 2 et 3 de la vitesse u , on remarque que son intensité est plus élevée (Fig. 3) lorsque le champ magnétique est présent. Nous remarquons aussi que l'amplitude des oscillations de la température adimensionnelle T est plus petite que celle de la vitesse adimensionnelle u .

La figure 4 présente l'évolution des valeurs critiques du nombre de Rayleigh en fonction du nombre de Hartmann. L'augmentation du nombre de Hartman engendre une augmentation du nombre de Rayleigh critique pour les valeurs du nombre de Prandtl considérées.

Afin d'obtenir le spectre d'énergie des oscillations, on a utilisé la transformée de Fourier d'un nombre de puissance 2 de la valeur de la variation temporelle de u . Cette transformée est multipliée par son complexe conjugué et divisée par 2 pour obtenir l'énergie E en fonction des fréquences des oscillations F , définies par : $F = K / (N \times \Delta \tau)$, où $\Delta \tau$ l'incrément du temps et $K = 0, 1, \dots, N/2$. L'énergie est normalisée par N^2 . Les valeurs de $E(F)$ représentent plusieurs échelles de grandeurs, dans ce cas, on a utilisé son logarithme décimal.

A partir des figures 2 et 3, on a déduit les fréquences critiques par analyse de Fourier rapide. Sur la figure 5, on a tracé les fréquences dominantes en fonction des valeurs du nombre de Hartmann ($Ha = 0, 10, 20, 30, 40$ et 50), pour trois différentes valeurs du nombre de Prandtl ($Pr = 0.015, 0.019, 0.026$). On peut clairement constater que l'augmentation de l'intensité du champ magnétique provoque une augmentation des fréquences critiques des oscillations.

La figure 6 représente bien la dépendance linéaire des amplitudes adimensionnelles ω avec la variation entre Rayleigh supercritique et critique pour un nombre de Hartmann Ha donné. En examinant cette figure, on peut déduire les conclusions suivantes :

1. Augmentation des amplitudes correspondant à un nombre de Hartmann donné (la croissance linéaire des amplitudes avec l'écart Ra supercritique à Ra critique).
2. Diminution des amplitudes avec l'augmentation de l'intensité du champ magnétique.
3. La faible croissance de l'évolution des amplitudes en fonction de $Ra - Ra_{Cr}$ avec l'augmentation du champ magnétique.

5. Conclusions

Une étude numérique de la convection naturelle dans une géométrie cylindrique de type Czochralski a été proposée. Des faibles valeurs du nombre de Prandtl (cas des semi-conducteurs) ont été considérées. Le diagramme de stabilité a été établi d'après les résultats numériques de cette investigation. Ce diagramme met en évidence la dépendance du nombre de Rayleigh critique avec l'augmentation du nombre de Hartmann, pour différentes valeurs du nombre de Prandtl. Enfin, cette étude confirme la possibilité de stabilisation d'un écoulement de métal liquide en convection naturelle par application d'un champ magnétique. Les résultats obtenus dans cette étude permettront aux expérimentateurs et industriels de connaître les régimes oscillatoires lors de l'obtention des cristaux en utilisant la technique de Czochralski d'un fluide à faible nombre de Prandtl en présence d'un champ magnétique, afin

d'améliorer la qualité des cristaux obtenus. Bien que notre étude soit axisymétrique, on s'attend à ce que les résultats d'une simulation numérique non axisymétrique que nous recommandons, confirme l'effet du champ magnétique sur la stabilité des écoulements de convection naturelle.

Références:

[1] A. Bottaro and A. Zebib, Bifurcation in axisymmetric Czochralski natural convection, *Physics of Fluids* 31 (1988), 495-501.
 [2] A. Bottaro and A. Zebib, Three – dimensional thermal convection in Czochralski melt, *Journal of Crystal Growth* 97 (1989), 50-58.
 [3] A.Yu. Gelfgat and P. Z. Bar-Yoseph, The effect of an external magnetic field on oscillatory instability of convective flows in a rectangular cavity, *Physics of Fluids* 13,8 (2001), 2269-2279.
 [4] Y. Feng and J. Seyed-Yagoobi, Linear instability analysis of a horizontal two-phase flow in the presence of electrohydrodynamic extraction force, *Journal of Heat Transfer* 124, (2002), 102-110.
 [5] A. Yu. Gelfgat and P. Z. Bar-Yoseph, A. Solan, Axisymmetry breaking instabilities of natural convection in a vertical Bridgman growth configuration, *Journal of Crystal Growth* 220 (2000), 316-325.
 [6] S.V.Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Hemisphere, Washinton, DC, 1980.

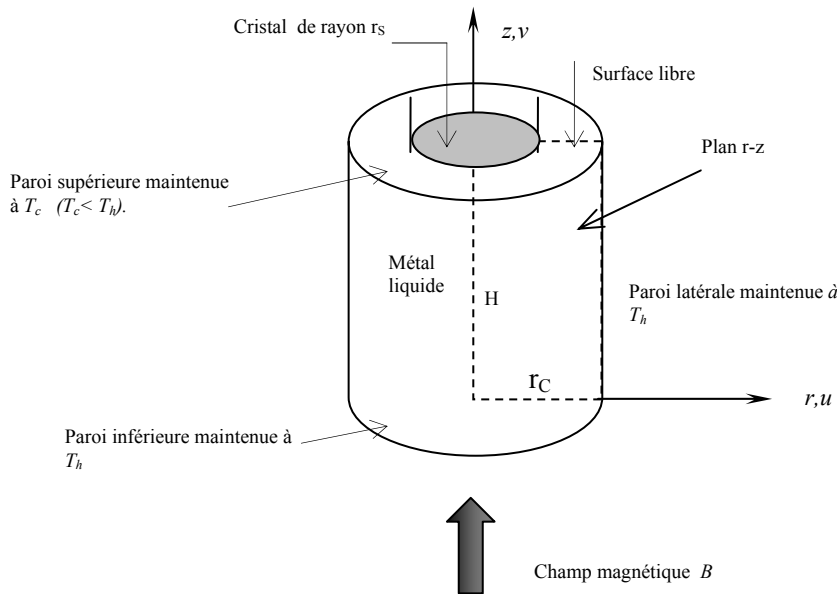


Figure 1 : Représentation idéalisée de la technique de Czochralski. Les conditions aux limites adoptées dans cette étude sont celles considérées dans la référence [1]

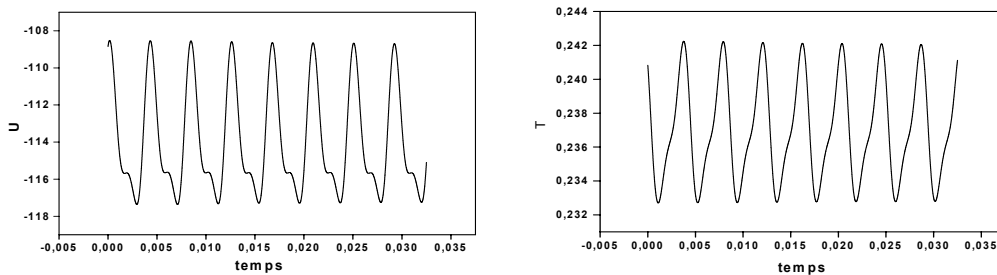


Figure 2 : Evolution temporelle de la vitesse radiale adimensionnelle u et de la température adimensionnelle T , pour $Pr = 0.015$, $Ra_{Cr} = 4.5 \times 10^4$ et $Ha = 0$ (sans champ magnétique)

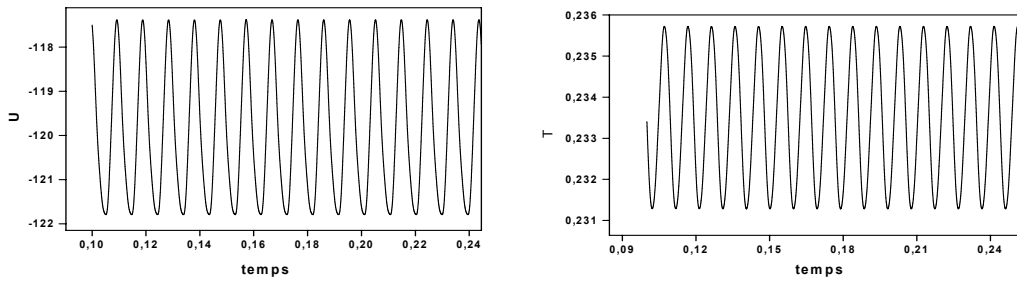


Figure 3 : Evolution temporelle de la vitesse radiale adimensionnelle u et de la température adimensionnelle T , pour $Pr = 0.015$, $Ra_{Cr} = 5.25 \times 10^4$ et $Ha = 10$ (avec champ magnétique)

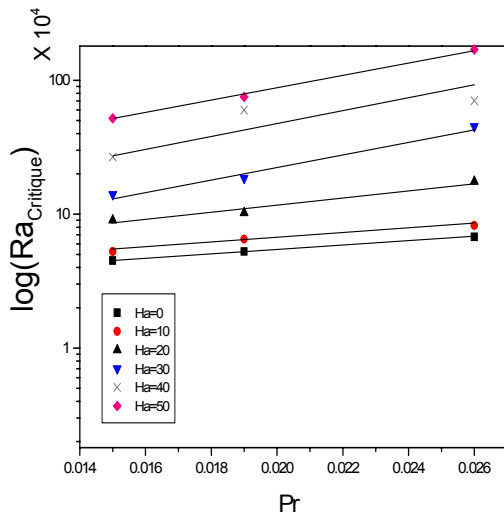


Figure 4 : Diagramme de stabilité $Ra_{Cr} - Pr$ pour différents Ha

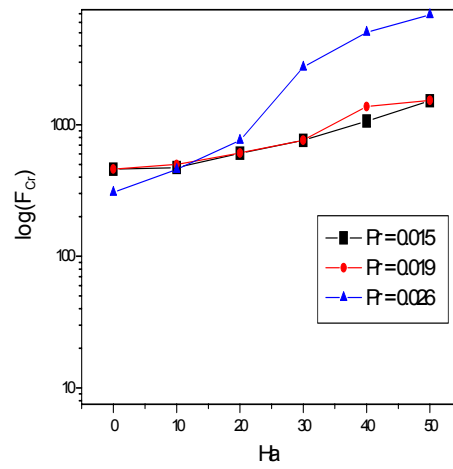


Figure 5: Evolution de la fréquence critique adimensionnelle F_{Cr} en fonction de Ha pour différents Pr

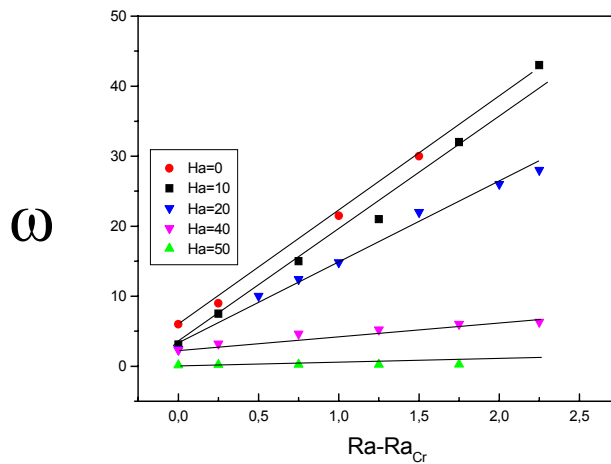


Figure 6 : Evolution des amplitudes adimensionnelles ω en fonction de $Ra - Ra_{Cr}$ pour différents Ha