

Modèle polytropique pour les écoulements de gaz chauffés en convection mixte ou à haute température

Claude REY¹, Malika MAHAMEDIA², Michel PAVAGEAU³

¹Laboratoire de Modélisation et Simulation Numérique en Mécanique et Génie des Procédés
UMR 6181 CNRS-UPCAM, IMT, Technopôle de Château-Gombert
38 rue F. Jolior Curie – 13451 Marseille cedex 20

² Institut de Physique, Université des Sciences et de la Technologie, Houari Boumédiène, BP 32 El-Alia, 16111 Bab-Ezzouar, Alger

³ GEPEA -UMR CNRS 6144, Ecole des Mines de Nantes, Département Systèmes Energétiques et Environnement, La Chantrerie, 4 rue Alfred Kastler, BP 20722, 44307 Nantes Cedex

*(auteur correspondant : claude.rev@univ-cezanne.fr)

Résumé - Nous proposons une nouvelle approche pour la prise en compte de la complexité des écoulements de gaz à fort gradient de température. Les gaz sont supposés se comporter comme des gaz parfaits à propriétés physiques constantes. Cette approche s'appuie sur une substitution de la pression et de la masse volumique par une nouvelle grandeur variable représentative des transformations thermodynamiques réelles. L'analyse des propriétés implicites de cette nouvelle variable conduit à réécrire le système d'équations statistiques du type $k\epsilon$, pour l'analyse expérimentale et la simulation numérique.

Nomenclature

g accélération gravitationnelle
 k énergie cinétique de la turbulence
 k conductivité thermique
 P, p pression instantanée, fluctuante
 T température instantanée
 U_i, u_i vitesse instantanée, fluctuante
Indices et exposants
 i, j, k indices de projection

Symboles grecs
 a diffusivité thermique
 c coefficient « polytropique »
 e dissipation d'énergie cinétique de la turbulence
 e_q égalisation moléculaire de la variance de q
 g rapport des chaleurs spécifiques
 n viscosité cinématique
 q température fluctuante
 r masse volumique
 S tenseur des contraintes de viscosité

1. Introduction

Les écoulements de gaz en convection mixte ou à fort gradient de température nécessitent une prise en compte précise de la dilatation et du couplage par la loi d'état [1]. Pour cela il faut éviter les approximations a priori sur la masse volumique et sur la pression. Aussi nous proposons une nouvelle démarche [2,3] qui substitue à une approximation globale, une approximation locale élémentaire décrivant la transformation thermodynamique réelle en jeu.

Les applications sont multiples, aussi bien dans le milieu naturel : atmosphère, étude d'impact, que dans le milieu industriel : refroidissement, chauffage, procédés à haute température...

L'objectif est de donner des outils d'observation et de simulation pour mieux quantifier les facteurs prépondérants qui régissent les échanges, valider ou infirmer les approximations usuelles, construire une nouvelle démarche de simulation.

2. Description du modèle

2.1. Démarche

Le modèle consiste en un changement de variable, incluant une réduction du nombre d'équations.

6 équations	6 inconnues	5 équations	5 inconnues
continuité (1) mouvement (3) enthalpie (1) loi d'état (1)	P, ρ, T, U _i	continuité (1) mouvement (3) enthalpie (1)	T, U _i , χ

Ce changement de variable est pertinent si la nouvelle variable χ a des propriétés particulières facilitant la mise en œuvre des bilans pour l'observation expérimentale ou la simulation numérique.

2.2. Définition de la variable c , modèle polytropique

Nous postulons qu'une transformation thermodynamique quelconque peut être décomposée en une succession de transformations élémentaires du type polytropique, telle qu'il existe une grandeur variable χ , vérifiant pour chaque transformation élémentaire :

$$\frac{dr}{r} = \frac{1}{c-1} \frac{dT}{T} \quad \text{et} \quad \frac{dP}{P} = \frac{c}{c-1} \frac{dT}{T} \quad (1)$$

2.3. Propriétés de la nouvelle variable

La nouvelle variable χ n'est ni une variable d'état, ni une variable de comportement. Elle caractérise la transformation thermodynamique à laquelle la particule fluide est soumise.

- Nous considérons que cette grandeur peut être traitée différemment (ou séparément) des autres variables inconnues du système d'équations de bilan.
- Nous convenons que la variable χ n'est pas fluctuante au sens des fluctuations turbulentes.

Concernant la deuxième proposition, les fluctuations turbulentes sont issues du transport aléatoire de grandeurs aléatoires. Ainsi une particule fluide rencontre d'autres particules issues de zones où les températures, pressions et vitesses sont différentes ; la turbulence est spatio-temporelle, alors que la transformation thermodynamique caractérisée par χ est locale.

Nous remarquons aussi que la variation de la grandeur instantanée n'est pas la variation de la fluctuation. En effet pour une discrétisation entre les repères n et $n+1$, en conservant dans un premier temps une approximation au second ordre des fluctuations de température et en négligeant le second ordre des fluctuations de pression, il vient.

$$\frac{p'_{n+1}}{P_{n+1}} - \frac{p'_n}{P_n} \approx \frac{c_n}{c_n - 1} \left(\frac{q'_{n+1}}{T_{n+1}} - \frac{q'_n}{T_n} \right) + \frac{c_n}{(c_n - 1)} \left[\frac{(q'^2 - \overline{q'^2})}{2\overline{T}^2} \right]_n^{n+1} \quad (2)$$

Au premier ordre en q , on observe que la corrélation

$$\overline{c_n \left(\frac{p'_{n+1}}{P_{n+1}} - \frac{p'_n}{P_n} - \frac{q'_{n+1}}{T_{n+1}} + \frac{q'_n}{T_n} \right)} = 0$$

ce qui confirme l'hypothèse c non fluctuant (la somme entre parenthèse est non nulle dans le cas général).

3. Les équations instantanées

3.1. Application à un gaz parfait à propriétés physiques constantes

Il vient pour les équations de bilan (mouvement, masse et enthalpie) :

$$\frac{d}{dt} \vec{U} = \vec{g} - \frac{rc}{c-1} \overrightarrow{\text{grad}T} + \mathbf{n} \Delta \vec{U} - \underbrace{\frac{\mathbf{n}}{3} \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{1}{c-1} \frac{dT}{dt} \right) + \overline{\Sigma} \overrightarrow{\text{grad}} \ln \left(\frac{m}{m_0} \right)}_{\text{négligés pour la suite}} \quad (3)$$

$$T \text{div} \vec{U} = - \frac{1}{c-1} \frac{dT}{dt} \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} T = \frac{c-1}{c-g} \mathbf{g} (\mathbf{a} \Delta T + \underbrace{\mathbf{a} \overrightarrow{\text{grad}T} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}} k}{k} + \frac{Ra}{rc_p} + \frac{\Phi}{rc_p}}_{\text{négligés pour la suite}}) \quad (5)$$

En réalité la viscosité et la conductivité varient avec la température, mais nous considérons ici que les effets dus à ces variations sont négligeables par rapport aux autres termes du bilan, et qu'il en est de même pour les chaleurs massiques, le rayonnement Ra et la dissipation d'énergie cinétique en chaleur Φ . Remarquons que dans les cas où les variations des propriétés physiques avec la température doivent être prises en compte, on suppose que les propriétés physiques sont non fluctuantes, il n'y aura donc pas d'introduction d'inconnues statistiques supplémentaires par rapport au développement qui suit.

Sur le plan de la physique les cas $\chi=1$ et $\chi=\gamma$ ne sont pas à exclure. En effet :

$$c \rightarrow 1 \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}T} \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\overrightarrow{\text{grad}} \dot{T}}{c-1} \rightarrow Cste$$

$$c \rightarrow g \Rightarrow (\mathbf{a} \Delta T + \mathbf{a} \overrightarrow{\text{grad}} \dot{T} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}} k}{k} + \frac{Ra + \Phi}{rc_p}) \rightarrow 0$$

$$\text{avec } \frac{1}{c-g} (\mathbf{a} \Delta T + \mathbf{a} \overrightarrow{\text{grad}} \dot{T} \cdot \frac{\overrightarrow{\text{grad}} k}{k} + \frac{Ra + \Phi}{rc_p}) \rightarrow 0$$

3.2. Equations adimensionnelles

Les équations sont écrites sous forme adimensionnelle pour faciliter la mise en œuvre des simulations numériques :

$$\frac{\partial}{\partial t} U_i + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = - \frac{1}{Fr^2} \mathbf{d}_{i3} - \frac{1}{Ec} \frac{c(\mathbf{g}-1)}{\mathbf{g}(c-1)} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (6)$$

$$T \frac{\partial U_\ell}{\partial x_\ell} = - \frac{1}{c-1} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + U_\ell \frac{\partial T}{\partial x_\ell} \right) \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + U_\ell \frac{\partial T}{\partial x_\ell} = \frac{c-1}{c-g} \frac{\mathbf{g}}{\text{Pr} \cdot \text{Re}} \frac{\partial^2 T}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \quad (8)$$

avec $\text{Fr} = \frac{U_r}{\sqrt{gL_r}}$, le nombre de Froude, $\text{Ec} = \frac{U_r^2}{c_p T_r}$ le nombre d'Eckert, $\text{Re} = \frac{U_r L_r}{\mathbf{n}}$ le

nombre de Reynolds, $\text{Pr} = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{m}c_p}{k}$ le nombre de Prandtl.

Les variables adimensionnées sont : $\frac{\vec{U} \cdot \vec{i}}{U_r} = U_i$, $\frac{T}{T_r} = \frac{T}{T_{\max} - T_{\min}} \Rightarrow T$, $\frac{tU_r}{L_r} \Rightarrow t$, $\frac{x_\ell}{L_r} \Rightarrow x_\ell$.

3.3. Résolution numérique

La résolution numérique utilise un traitement particulier de la variable χ à chaque pas de calcul [4,5].

i/ χ est constant égal à $\chi^{(0)}$; Alors les équations (6) et (7) donnent $\vec{U}^{(1)}$ et $T^{(1)}$.

ii/ $\vec{U}^{(1)}$ et $T^{(1)}$ sont introduits dans l'équation (8) pour obtenir une nouvelle valeur de χ , $\chi^{(1)}$.

iii/ On revient à l'étape i/ avec la nouvelle valeur $\chi^{(1)}$, qui donne $\chi^{(2)}$, jusqu'à convergence.

4. Les Equations statistiques

Les équations sont écrites en grandeurs moyennes (moyennes de Reynolds), les termes liés à la diffusion moléculaires sont donnés avec l'approximation au 1^{er} ordre : $\frac{1}{T} = \frac{1}{\bar{T}}$.

4.1. Equations des grandeurs moyennes (dimensionnelles)

Les équations sont données en grandeurs dimensionnelles pour ne pas introduire les nombres adimensionnels caractéristiques liés aux mécanismes turbulents.

4.1.1. Champ cinématique

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_i u_j}}{\partial x_j} + \frac{\mathbf{g} \mathbf{a}}{(c-g)\bar{T}} \frac{\overline{u_i \partial^2 \mathbf{q}}}{\partial x_j \partial x_j} \cong -\bar{g} d_{i3} - \frac{r\mathbf{c}}{c-1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_i} + \mathbf{n} \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_j} \quad (9)$$

4.1.2. Continuité

$$\frac{\partial \bar{U}_\ell}{\partial x_\ell} = \frac{(c-2)\mathbf{g} \mathbf{a}}{(c-g)\bar{T}} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{1}{\bar{T}} \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j \mathbf{q}}}{\partial x_j} \right) \quad (10)$$

4.1.3. Champ thermique

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \bar{U}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j \mathbf{q}}}{\partial x_j} + \frac{1}{c-g} \frac{\mathbf{g} \mathbf{a}}{\bar{T}} \frac{\overline{\mathbf{q} \partial^2 \mathbf{q}}}{\partial x_j \partial x_j} \cong \frac{c-1}{c-g} \mathbf{g} \mathbf{a} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (11)$$

4.2. Equations des variances (Energie cinétique de la turbulence et variance de température, dimensionnelles)

4.2.1. Champ cinématique

Energie cinétique de la turbulence ($k = u_i u_i$) :

$$\frac{\partial \bar{k}}{\partial t} + \bar{U}_\ell \frac{\partial \bar{k}}{\partial x_\ell} + 2\overline{u_i u_\ell} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_\ell} + \frac{\partial \overline{k u_\ell}}{\partial x_\ell} = -\frac{2rc}{c-1} \frac{\partial \overline{u_i q}}{\partial x_i} - \frac{\mathbf{ga}}{(\mathbf{c}-\mathbf{g})\bar{T}} \left(\frac{\overline{k \partial^2 q}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} - \frac{2rc}{c-1} \frac{\overline{q \partial^2 q}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \right) + \mathbf{n} \left(\frac{\partial^2 \bar{k}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} - 2 \frac{\partial \overline{u_i} \partial \overline{u_i}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \right) \quad (12)$$

Dissipation de l'énergie cinétique de la turbulence ($\mathbf{e} = \mathbf{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$) :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{e}}}{\partial t} + \bar{U}_\ell \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}}{\partial x_\ell} + 2\mathbf{n} \frac{\partial \overline{u_i} \partial \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_\ell} + \frac{\partial \overline{\mathbf{e} u_\ell}}{\partial x_\ell} + 2\mathbf{n} \frac{\partial \overline{u_i} \partial \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial \bar{U}_\ell}{\partial x_j} + 2\mathbf{n} \frac{\overline{u_\ell} \partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{U}_i}{\partial x_j \partial x_\ell} + 2\mathbf{n} \frac{\partial \overline{u_i} \partial \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_\ell} \frac{\partial \overline{u_\ell}}{\partial x_j} = \mathbf{e} \frac{\partial \bar{U}_\ell}{\partial x_\ell} - \frac{2nrc}{c-1} \frac{\partial \overline{u_i} \partial^2 q}{\partial x_j \partial x_i \partial x_j} - \frac{\mathbf{ga}}{(\mathbf{c}-\mathbf{g})\bar{T}} \frac{\overline{\mathbf{e} \partial^2 T}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} + \mathbf{n} \left(\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{e}}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} - 2\mathbf{n} \frac{\partial^2 \overline{u_i} \partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_\ell \partial x_j \partial x_\ell} \right) \quad (13)$$

4.2.2. Champ thermique

Variance de température :

$$\frac{\partial \overline{q^2}}{\partial t} + \bar{U}_\ell \frac{\partial \overline{q^2}}{\partial x_\ell} + 2\overline{u_\ell q} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_\ell} + \frac{\partial \overline{u_\ell q^2}}{\partial x_\ell} = -\frac{\mathbf{ga}}{(\mathbf{c}-\mathbf{g})\bar{T}} \frac{\overline{q^2 \partial^2 q}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} + \frac{2(\mathbf{c}-1)\mathbf{ga}}{(\mathbf{c}-\mathbf{g})} \frac{\overline{q \partial^2 q}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} \quad (14)$$

Egalisation thermique par conduction moléculaire ($\mathbf{e}_q = \mathbf{a} \frac{\partial q}{\partial x_j} \frac{\partial q}{\partial x_j}$) :

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_q}{\partial t} + \bar{U}_\ell \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_q}{\partial x_\ell} + 2\mathbf{a} \frac{\partial \overline{q} \partial \overline{q}}{\partial x_j \partial x_\ell} \frac{\partial \bar{U}_\ell}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{\mathbf{e}_q u_\ell}}{\partial x_\ell} + 2\mathbf{a} \frac{\partial \overline{q} \partial \overline{u_i}}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_\ell} + 2\mathbf{a} u_\ell \frac{\partial \overline{q}}{\partial x_j} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j \partial x_\ell} + 2\mathbf{a} \frac{\partial \overline{q} \partial \overline{u_\ell}}{\partial x_j \partial x_j} \frac{\partial \overline{q}}{\partial x_\ell} = -\overline{\mathbf{e}_q} \frac{\partial \bar{U}_\ell}{\partial x_\ell} - \frac{\mathbf{ga}}{(\mathbf{c}-\mathbf{g})\bar{T}} \frac{\overline{\mathbf{e}_q \partial^2 T}}{\partial x_\ell \partial x_\ell} + \frac{(\mathbf{c}-1)\mathbf{ga}}{(\mathbf{c}-\mathbf{g})} \left(\frac{\partial^2 \bar{\mathbf{e}}_q}{\partial x_\ell \partial x_\ell} - 2\mathbf{a} \frac{\partial^2 \overline{q} \partial^2 \overline{q}}{\partial x_j \partial x_\ell \partial x_j \partial x_\ell} \right) \quad (15)$$

5. Discussion

La proposition du modèle polytropique fait suite à la démonstration expérimentale [6,7] et numérique [8,9] du rôle non négligeable des effets de dilatation sur l'évolution des champs turbulents des écoulements en convection libre et en convection mixte. Il n'y a pas dans ce modèle de restriction sur l'applicabilité, d'où l'extension proposée ici au cas des gaz fortement chauffés en convection forcée.

La mise en œuvre du modèle polytropique dans la formulation des équations statistiques ne pose pas de nouveaux problèmes par rapport au système classique incompressible. Il n'y a pas de nouvelles inconnues statistiques d'ordre supérieur à 2, compte tenu de l'approximation sur la température pour les termes moléculaires. Les nouvelles inconnues qui apparaissent sont liées aux mécanismes moléculaires, elles seront soit négligées (pour les équations de \mathbf{e} et \mathbf{e}_q),

soit modélisées. Ces termes supplémentaires peuvent être considérés comme termes de déviation secondaire par rapport au système de référence incompressible. La déviation « principale » est donnée exclusivement par la substitution $P, r \rightarrow c, T$ pour les termes de pression des équations classiques.

La détermination en chaque point de la valeur de l'exposant polytropique est similaire à ce qui a été fait en simulation numérique directe (DNS) [4,5].

Les équations données ici ne font pas apparaître de façon explicite les mécanismes de flottation. Le champ « baignant » adiabatique au repos peut être pris en compte directement en écrivant les équations de déviation par rapport à ce champ baignant, ou pris en compte au niveau des conditions limites.

Les conditions de paroi doivent introduire une valeur correspondante pour l'exposant c , le plus souvent isotherme, adiabatique ou à flux constant.

6. Conclusion

La simulation numérique à partir de modèles statistiques du type $k-\varepsilon$ est toujours d'un grand intérêt pour les applications industrielles dont la complexité n'est pas compatible avec l'utilisation de codes plus sophistiqués.

Il s'agit ici de prendre mieux en compte la physique de l'écoulement des gaz chauffés et plus particulièrement le couplage entre les champs cinématique et thermique.

La démarche que nous avons suivi en implantant le modèle polytropique dans un code DNS [4,5] est reconduite ici en donnant tous les éléments nécessaires à la mise en œuvre d'un code utilisant un modèle « polytropique $k-\varepsilon$ ».

Références

- [1] C. Rey, Analyse des effets de variation de volume des gaz dans les équations générales de bilan, *Int. J. Heat Mass Transfer* 43-23 (2000), pp. 4311–4326, 2000.
- [2] C. Rey, S. Benjeddou, Une alternative aux approximations de Boussinesq pour les gaz chauffés: l'approximation polytropique. *C. R. Mécanique* 332 (2004) 109-114..
- [3] C. Rey et S. Benjeddou « Application de l'approximation polytropique à la turbulence statistique en moyenne de Favre. » *C. R. Mécanique* 332 (2004), 217–222.
- [4] S. Benjeddou, C. Rey, E. Serre « Application de l'approximation polytropique à la simulation numérique directe des gaz chauds ». *C. R. Mécanique* 332 (2004), pp. 271–277.
- [5] S. Benjeddou, « Simulation Numérique directe d'un écoulements de gaz fortement chauffé et approximation polytropique » *Thèse de Doctorat de l'Université de la Méditerranée*, 12 sept 2003.
- [6] M. Pavageau, Etude expérimentale de la turbulence de grille en convection naturelle; analyse des effets non-Boussinesq. *Thèse de Doctorat*, Ecole Centrale de Nantes, Nantes, France, 1994.
- [7] M. Pavageau, C. Rey, Observation of volume variation effects in turbulent free convection, *Int. J. Heat Mass Transfer* 45-1 (2002) 181-192.
- [8] Th. Aurier, "Modélisation au second ordre et simulation numérique des écoulements turbulents à volume variable." *Thèse de Doctorat*, Ecole Doctorale SPI de Nantes n° ED82-122, Ecole Centrale de Nantes, 2 juin 1995.
- [9] Th. Aurier, C. Rey, « Simulation numérique d'écoulements turbulents à volume variable, comparaison entre un panache froid et chaud ». *Int. Conf. on Variable Density Turbulent Flows.*, Banyuls, 22-23 juin 2000, Presses Universitaires de Perpignan, Collection Etudes, pp 175-186.