

Modélisation analytique de la convection transitoire sur plaque plane

Ali GRINE*, Jean-Yves DESMONS, Souad HARMAND

Laboratoire de Mécanique et Energétique, Le Mont Houy, Université de Valenciennes et du Hainaut Cambrésis, 59313 Valenciennes CEDEX 9

*(auteur correspondant : ali.grine@univ-valenciennes.fr)

Résumé - Nous proposons une méthode analytique pour la détermination du profil de température dans la couche limite thermique transitoire d'un écoulement sur plaque plane, lorsque la couche limite dynamique est connue. Ce modèle permet d'identifier les échanges convectifs pariétaux lorsque la plaque est soumise à un régime thermique transitoire. Les résultats obtenus montrent que le coefficient de transfert convectif prend des valeurs importantes au voisinage de $t = 0$, décroît très rapidement et tend vers une valeur limite proche des valeurs obtenues à partir des corrélations issues de la littérature.

Nomenclature

a	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$	x, y, z	variable spatiale, m
G_φ	fonction de Green		
p, q	variables de Laplace		
K	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$		
T	température, $^\circ C$		
t	temps, s		
			<i>Symboles grecs</i>
		Φ	densité de flux, $W.m^{-2}$
		δ_T	épaisseur de la couche limite thermique, m
		δ	épaisseur de la couche limite dynamique

1. Introduction

Ce travail présente une méthode originale d'identification du coefficient d'échange convectif basée sur l'utilisation des fonctions de Green. Les méthodes les plus connues et les plus couramment utilisées pour identifier ce coefficient h sont des méthodes numériques ou semi analytiques [1,2,3,4]. La méthode proposée dans cet article est basée sur le développement de modèles théoriques décrivant la répartition spatio-temporelle de la température dans le fluide ainsi que son évolution à l'interface. Le fluide est soumis à un flux de chauffage par l'intermédiaire d'une plaque et une température constante à l'infini.

L'originalité du travail réside dans le développement d'un modèle analytique qui permet de connaître l'évolution de la température du fluide en connaissant le flux pariétal, l'objectif à terme étant le couplage conduction – convection.

2. Présentation du problème

Une bande chauffante (S_p) plane, de grande longueur, de largeur c , située au bord d'un demi-plan isolant au dessus duquel s'écoule un fluide, est chauffée sur sa face inférieure par une densité de flux Φ (convection+rayonnement) connue. La face supérieure émet alors dans le fluide une densité de flux $\Phi(x, y, t)$. Nous nous proposons d'établir la relation analytique qui existe entre cette densité et le champ de température dans le fluide $T(\vec{r}, t)$. Cette relation se présentera sous forme d'une série dont nous n'étudierons ici que le premier terme.

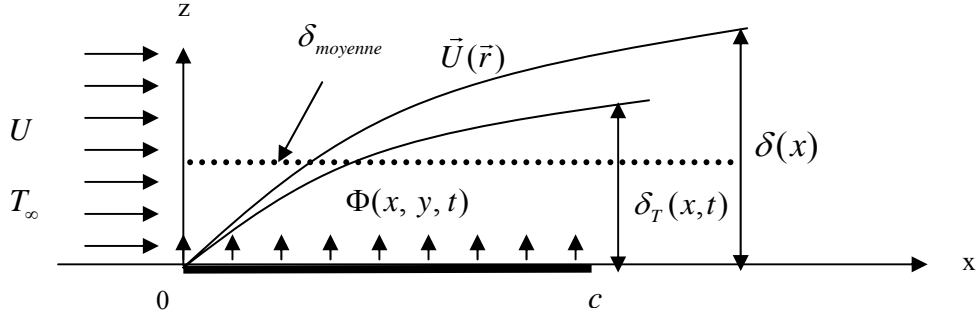


Figure 1 : Schéma et notation du problème de la convection forcée sur la plaque plane

Le fluide de propriétés physiques constantes est le siège d'un champ de vitesse $\vec{U}(\vec{r}, t)$, dépendant en général du point et du temps, supposé isovolume ($\text{div}\vec{U} = 0$) et s'annule sur la paroi de la plaque plane.

L'équation de propagation du champ de température $T(\vec{r}, t)$ dans le fluide, prend alors la forme :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T(\vec{r}, t)}{\partial t} - \Delta T(\vec{r}, t) + \frac{1}{a} \text{div} U(\vec{r}, t) T(\vec{r}, t) = 0 \quad \text{avec} \quad a = \frac{K}{\rho c} \quad (1)$$

Où $\vec{r} = (x, y, z)$

L'équation (1) peut être considérée comme le noyau linéaire, dominant en général dans les problèmes d'écoulement forcé, des équations complètes non linéaires (équation de propagation couplée à l'équation de Navier-Stokes et l'équation d'état).

On peut toujours écrire $\vec{U}(\vec{r}, t) = U\vec{i} + \vec{v}(\vec{r}, t)$ où U est la vitesse moyenne loin de la paroi.

Le champ $\vec{v}(\vec{r}, t)$, qui mesure l'écart du champ de vitesse réel par rapport au champ uniforme $U\vec{i}$, est à divergence nulle et est égal à $-U_\infty\vec{i}$ sur la plaque plane. L'équation de propagation devient alors :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T + \frac{U}{a} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{a} \text{div} \vec{v} T = 0 \quad (2)$$

Soit P un point quelconque sur la paroi de la plaque plane soumise à l'écoulement ; appelons $\Phi(\vec{\rho}, t)$; ($\Phi(\vec{\rho}, t < 0) = 0$ $\vec{\rho} = \overline{OP}$), la densité de flux de chaleur entrant dans le fluide par conduction au point P . Nous avons alors :

$$K \vec{\nabla} T(\vec{r}, t) \cdot \vec{n} \Big|_{\vec{r}=\vec{\rho}} = \Phi(\vec{\rho}, t) \quad (3)$$

Nous allons maintenant établir une relation mathématique exacte entre le champ $T(\vec{r}, t)$ et le champ pariétal, $\Phi(\vec{\rho}, t)$.

3. Solution analytique par la méthode des fonctions de Green

Posons $T(\vec{r}, t) = e^{\frac{U}{2a} \left(x - \frac{U}{2} t \right)} T_1(\vec{r}, t)$, on vérifie alors que le champ inconnu $T_1(\vec{r}, t)$ doit satisfaire l'équation :

$$\frac{1}{a} \frac{\partial T_1(\vec{r}, t)}{\partial t} - \Delta T_1(\vec{r}, t) + \frac{1}{a} \vec{v}(\vec{r}, t) \cdot \vec{\nabla} e^{\frac{x}{l}} T_1(\vec{r}, t) = 0 \quad \left(\frac{U}{2a} = \frac{1}{l} \right) \quad (4)$$

qui est une équation de conduction pure avec un terme de source $\frac{1}{a} \vec{v} \cdot e^{-\frac{x}{l}} \vec{\nabla} e^{\frac{x}{l}} T_1$ dépendant linéairement du champ inconnu T_1 .

La résolution de l'équation (4) est faite par la méthode des fonctions de Green.

Soit $G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', t)$ (fonction de Green définie dans le domaine fluide (D) semi-infini limité par le plan $z = 0$), la solution des équations :

$$\begin{cases} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial t} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', t) - \Delta_r G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', t) = \delta(t) \delta(\vec{r} - \vec{r}') \\ G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', t < 0) = 0 \\ K \vec{\nabla}_r G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', t) \cdot \vec{n} \Big|_{r \in S_p} = 0 \quad \forall \vec{r}' \\ G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', t) \Big|_{r \in S_\infty} = 0 \quad \forall \vec{r}' \end{cases} \quad (5)$$

En procédant comme dans [5], on montre que :

$$T_1(\vec{r}', t) = \begin{cases} \int_0^t d\tau \iint_{S_p} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \vec{\nabla}_r T_1(\vec{r}, \tau) d\vec{S}_p \\ - \frac{1}{a} \int_0^t d\tau \iiint_{(D)} d^3r G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \cdot \vec{v}(\vec{r}, \tau) \cdot e^{-\frac{U}{2a} x} \vec{\nabla}_r e^{\frac{U}{2a} x} T_1(\vec{r}, \tau) \end{cases} \quad (6)$$

soit

$$T(\vec{r}', t) = \begin{cases} \int_0^t d\tau e^{-\frac{U}{2l}(t-\tau)} \iint_{S_p} e^{\frac{(x'-x)}{l}} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \Phi(\vec{r}, \tau) dS_p \\ + \frac{1}{a} \int_0^t d\tau e^{-\frac{U}{2l}(t-\tau)} \iiint_{(D)} d^3r e^{\frac{(x'-x)}{l}} T(\vec{r}, \tau) \vec{v}(\vec{r}) \cdot \begin{pmatrix} \vec{\nabla}_r G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \\ -\frac{1}{l} G_\varphi(\vec{r}, \vec{r}', t - \tau) \vec{i} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (7)$$

Le terme T_1 étant défini au début de la partie 3.

Cette expression est une relation linéaire intégrale exacte (mais implicite puisque $T(\vec{r}, \tau)$ figure dans le second membre) entre le champ de température régnant dans tout le fluide, et le flux entrant par conduction dans celui-ci par la paroi. Ce type d'équation peut être, en principe, résolu par itération.

Le premier terme représente exactement le champ de température, engendré par conduction, dans le fluide comme s'il s'écoulait à vitesse uniforme (fluide parfait).

Si l'on remplace ensuite, dans le deuxième terme de (7), $T(\vec{r}, \tau)$ par le champ précédent, on obtient une première correction tenant compte de la couche limite dynamique, et ainsi de suite, le processus d'itération permettant d'obtenir la solution générale sous forme d'une série.

Nous n'analyserons dans cet article que le premier terme, noté $T_0(x, z, t)$: il est d'une importance majeure car c'est lui qui génère la propagation de la chaleur par convection au voisinage immédiat de la paroi émettrice de flux.

Dans notre configuration géométrique (en supposant, pour simplifier, que le flux de chauffage est uniforme dans la direction y), il est facile de calculer le premier terme de l'équation (7).

$$T_0(x, z, t) = \frac{1}{K} \int_0^t d\tau e^{-\frac{U}{2l}(t-\tau)} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_0^c dx e^{\frac{(x'-x)}{l}} G_\varphi(x, y, z = 0, \vec{r}', t - \tau) \Phi(x, y, \tau) \quad (8)$$

la fonction de Green, solution du système (5), s'écrivant :

$$G_{\varphi}(\vec{r}, \vec{r}', t) = \frac{1}{a^2} G_{\varphi}^1(x, x', t) G_{\varphi}^2(y, y', t) G_{\varphi}^3(z, z', t) \quad (9)$$

Avec :

$$G_{\varphi}^1(x, x', t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4at}} ; G_{\varphi}^2(y, y', t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} e^{-\frac{(y-y')^2}{4at}} ; G_{\varphi}^3(z, z', t) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\pi t}} \left(e^{-\frac{(z-z')^2}{4at}} + e^{-\frac{(z+z')^2}{4at}} \right)$$

ce qui permet d'écrire :

$$T_0(x', z', t) = \frac{a}{2K} \int_0^t d\tau e^{-\frac{U}{2l}(t-\tau)} \frac{a}{\pi(t-\tau)} e^{-\frac{z'^2}{4a(t-\tau)}} \int_0^c dx e^{-\frac{(x'-x)}{t}} e^{-\frac{(x-x')^2}{4a(t-\tau)}} \Phi(x, \tau) \quad (10)$$

expression qui se simplifie dans le cas d'une densité de flux échelon $\Phi(x, y, \tau) = \Phi_0$:

$$T_0(x', z', t) = \frac{\Phi_0}{2K\sqrt{\pi}} \int_0^{2\sqrt{at}} du \left(\operatorname{erf}\left(\frac{c-x'}{u} + \frac{u}{2l}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x'}{u} - \frac{u}{2l}\right) \right) e^{-\frac{z'^2}{u^2}} \quad (11)$$

Or, lorsque $0 < x' < c$, la fonction $\left(\operatorname{erf}\left(\frac{c-x'}{u} + \frac{u}{2l}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x'}{u} - \frac{u}{2l}\right) \right)$ se comporte quasiment comme un créneau égal à 2 pour $0 < u < u_0(x')$ et nulle pour $u_0(x') < u$, où la fonction $u_0(x')$, qui a la dimension d'une longueur, peut être déterminée numériquement. Autrement dit on peut écrire $\left(\operatorname{erf}\left(\frac{c-x'}{u} + \frac{u}{2l}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x'}{u} - \frac{u}{2l}\right) \right) \cong 2E(u_0(x') - u)$ et réécrire la solution (11) à une très bonne approximation :

$$T_0(x', z', t) = \begin{cases} \frac{\Phi_0}{K} \left(2\sqrt{\frac{at}{\pi}} e^{-\frac{z'^2}{4at}} - z' \operatorname{erfc} \frac{z'}{2\sqrt{at}} \right) & \text{si } t < \frac{u_0^2(x')}{4a} \\ \frac{\Phi_0}{K} \left(\frac{u_0(x')}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z'^2}{u_0^2(x')}} - z' \operatorname{erfc} \frac{z'}{u_0(x')} \right) & \text{si } \frac{u_0^2(x')}{4a} < t \end{cases} \quad (12)$$

4. Résultats et analyse

Nous appliquons maintenant le modèle développé précédemment pour un échelon de flux unité $\Phi_0 = 1 \text{ W/m}^2$, distribué sur toute la surface de la bande chauffante avec une vitesse d'air à l'infinie $U = 1 \text{ m/s}$ et une température $T_{\infty} = 25^{\circ}\text{C}$.

La figure (2) représente la température à la paroi et dans le fluide en fonction du temps t pour différents x ; on constate que, sur la bande émettant le flux, le fluide s'échauffe comme un solide immobile pendant un temps très faible : 0.107 s au point $x = 0.1 \text{ m}$ par exemple. Cette propriété résulte directement du premier terme de l'expression (12) qui est indépendant de la vitesse. On remarque en outre que ce temps ($t = \frac{u_0^2(x')}{4a}$) correspond pratiquement à celui mis par une particule fluide pour parcourir, à la vitesse U , la distance entre le bord d'entrée de la bande chauffante et le point considéré. Après ce temps très court la convection prend le relais quasi instantanément et la propagation de la chaleur se fait par convection forcée pure en régime permanent (deuxième terme de l'expression (12)).

La figure (3) présente l'évolution temporelle, en fonction de la variable d'espace x , du coefficient d'échange convectif correspondant. Le caractère transitoire de l'évolution de ce paramètre est clairement mis en évidence sur ces graphes. Non défini en $t = 0$, il prend des valeurs importantes au voisinage de $t = 0$, décroît très rapidement et tend vers une valeur limite, d'autant plus élevée que l'abscisse considérée se trouve proche du bord d'attaque de la plaque.

Le tableau présenté ci-dessous montre l'écart relatif entre le coefficient d'échange convectif, en régime permanent, obtenu par notre modèle théorique et celui de la littérature [6] pour différentes abscisses x en régime permanent.

Le coefficient d'échange h obtenu par la modélisation analytique du fluide parfait est presque la moitié de la solution donnée par la littérature et cela quelle que soit la position du point de mesure et la vitesse d'écoulement, ce qui montre que la loi de dépendance de h , en fonction de la position est la même (d'autres calculs non présentés ici confirment que cette loi de dépendance est également valable pour la vitesse).

x	$c/8$	$c/4$	$3c/8$	$c/2$	$5c/8$	$3c/4$	$7c/8$
$h_{\text{Modèle}}$	30,55	21,6	17,59	15,23	13,66	12,45	11,52
$h_{\text{Littérature}}$	16,64	11,77	9,61	8,32	7,44	6,79	6,29
écart (%)	54,47	54,49	54,63	54,63	54,47	54,54	54,60

Tableau : écart en pourcentage entre $h_{\text{Modèle}}$ et $h_{\text{Littérature}}$ pour $0 < x' < c$

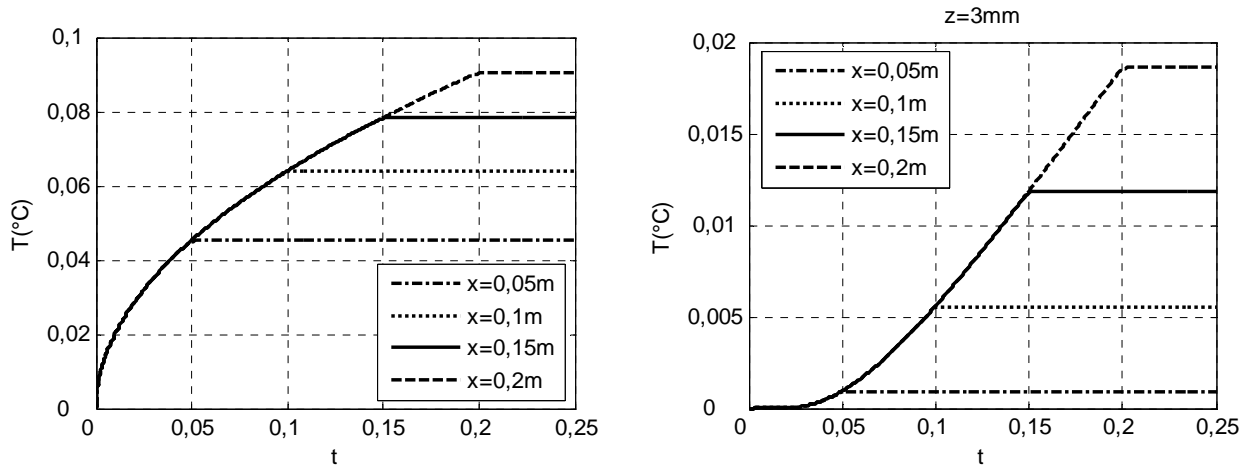


Figure 2 : Evolution temporelle de la température pariétale ($z=0$) et dans le fluide pour ($z=3 \text{ mm}$) pour différents x

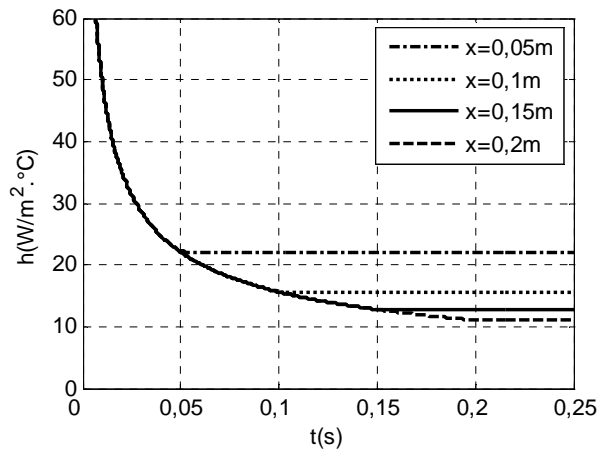


Figure 3 : Evolution temporelle du coefficient d'échange convectif pour différents x

5. Conclusion

Le travail présenté dans cet article concerne le développement d'un modèle analytique d'identification des échanges thermique sur une plaque plane. La démarche théorique développée est originale par l'utilisation de la méthode des fonctions de Green et permet de déterminer la solution analytique de l'équation de l'énergie dans le fluide. La solution obtenue permettra d'identifier la répartition de la température pariétale ainsi que la température dans le fluide en régime transitoire.

Le terme que nous avons examiné dans cet article ne représente évidemment qu'une partie de la solution (54% en régime permanent). Cette partie, cependant, présente déjà des caractères que l'on peut reconnaître dans les études effectuées par des moyens purement numériques : une montée en température de courte durée suivie d'une transition conduction-convection au régime permanent quasi instantanée. Tout comme dans les corrélations issues de la littérature, le coefficient de transfert convectif prend des valeurs importantes au voisinage de $t = 0$, décroît très rapidement et tend vers une valeur limite en régime permanent qui suit la même loi de dépendance en fonction de la vitesse et de la position.

L'étude en cours des termes correctifs suivants confirme et accentue ces caractères tout en fournissant un coefficient de convection en régime permanent dont le comportement et la valeur sont proches de ceux de la littérature.

Enfin la méthode utilisée peut s'étendre au cas où le flux de chaleur à l'interface est variable dans le temps et dépendant du point.

Références

- [1] M. Stoian, M. Rebay, M. Lachi, J. Padet, E. Mladin. Modélisation par volumes finis du couplage conduction - convection en régime instationnaire. *SFT*. 2005. 307-312, 2005.
- [2] M. Lachi, M. Rebay, E. Mladin et J. Padet. Etude de la convection forcée transitoire sur une plaque plane avec la méthode intégrale. *SFT*. 2003, 1-8
- [3] M. Lachi, E. Mladin M. Rebay et J. Padet. Modélisation du couplage conduction – convection entre un écoulement et une plaque plane. *SFT*. 2002, 101-106.
- [4] G Polidori, M. Lachi et J. Padet. Unsteady convective heat transfer on a semi-infinite flat surface impulsively heated. *Int. Comm. Heat. Mass. Transfer*, 1998 33-42.
- [5] A. Grine, J.Y. Desmons et S. Harmand, Models for transient conduction in a flat plate subjected to a variable heat flux. *Applied Thermal Engineering*. 27 (2007) 492-500.
- [6] JF.Sacadura. Initiation aux transferts thermiques. *Cast. INSA de Lyon.Tec. et doc. de Paris*. (1980).