

# Déplacement d'interfaces liquide – gaz sous l'effet d'un chauffage

Marie-Christine DULUC<sup>1,2</sup>, Virginie DARU<sup>1,3</sup>, Isam ELAYYADI<sup>1</sup>, Patrick LE QUÉRÉ<sup>1</sup>

<sup>1</sup>LIMSI, CNRS, UPR 3251, B.P. 133, 91403 Orsay Cedex

<sup>2</sup>CNAM 61 rue du Landy 93210 La Plaine Saint Denis

<sup>3</sup>ENSAM 151 Boulevard de L'Hôpital 75013 Paris

<sup>2</sup>(auteur correspondant : [duluc@limsi.fr](mailto:duluc@limsi.fr))

**Résumé** – On étudie numériquement une configuration diphasique monodimensionnelle assimilable à un actuateur thermique de petites dimensions dans laquelle deux lames d'air sont séparées entre elles par une lame d'eau liquide. On montre qu'il est possible de réaliser un déplacement de la lame liquide par chauffage d'une ou des deux parois en contact avec le gaz. Un modèle simple est développé permettant la mise en évidence des paramètres d'influence ainsi que des échelles de temps caractéristiques de la dynamique du système.

## Nomenclature

$c_p$	chaleur spécifique à pression constante, $Jkg^{-1}K^{-1}$	<i>Symboles grecs</i>	
$k$	conductivité thermique, $Wm^{-1}K^{-1}$	$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2s^{-1}$
$L$	longueur, $m$	$\mu$	viscosité dynamique, $kgm^{-1}s^{-1}$
$p$	pression, $Pa$	$\rho$	masse volumique, $kgm^{-3}$
$q$	densité de flux de chaleur, $Wm^{-2}$	$\bar{\tau}$	tenseur des contraintes visqueuses, $Pa$
$r$	constante des gaz, $Jkg^{-1}K^{-1}$	<i>Indices et exposants</i>	
$t$	temps, $s$	1	gaz à gauche du liquide
$t^*$	durée de la première phase, $s$	2	gaz à droite du liquide
$T$	température, $K$	$f$	état final
$u$	vitesse, $ms^{-1}$	$g$	gaz
$U$	énergie interne par unité de surface, $Jm^{-2}$	$i$	interface
$x$	abscisse, $m$	$l$	liquide
		$w$	paroi

## 1. Introduction

Les micro-systèmes électro-mécaniques (MEMS) permettent la réalisation à petite échelle de diverses opérations et trouvent de multiples applications dans des domaines aussi variés que la physique, la chimie, la biologie ou encore la mécanique [1]. Nombreux sont les dispositifs qui utilisent des fluides s'écoulant dans des canaux de faibles dimensions. Dans ce travail, on se propose d'étudier la capacité d'un gaz à déplacer un milieu liquide sous l'effet d'une sollicitation thermique. La présente étude considère, en première approche, le cas d'une cavité monodimensionnelle contenant deux lames d'air séparées par une lame d'eau liquide. L'étude utilise pour cela un modèle et le code qui lui est associé, développés ces dernières années au LIMSI permettant la description d'écoulements avec changement de phase liquide – vapeur [2].

## 2. Modélisation

### 2.1. Modèle mathématique

L'écoulement du fluide est gouverné par les équations de Navier-Stokes écrites sous la forme générale compressible. On ignore ici les effets liés à la gravité et à la tension superficielle :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \\ \frac{\partial \rho \vec{u}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot (\vec{\tau}) \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \vec{u} \cdot \nabla T = k \Delta T + \frac{dp}{dt} \end{cases} \quad (1)$$

Ces équations sont complétées dans la vapeur par la loi d'état des gaz parfaits  $p = \rho_g r T$ . La masse volumique du liquide  $\rho_l$  est constante. Chaque phase est repérée à l'aide de la fonction de Heaviside  $H(x, t)$  telle que  $H(x, t)=1$  dans le gaz et  $H(x, t)=0$  dans le liquide. La masse volumique du fluide  $\rho$  est calculée à l'aide de la relation :

$$\rho = \rho_l + H(\rho_g - \rho_l) \quad (2)$$

Les autres propriétés du fluide, viscosité dynamique  $\mu$ , conductivité thermique  $k$  et chaleur spécifique à pression constante  $c_p$  sont calculées à l'aide de la relation :

$$X = X_l + H(X_g - X_l) \quad \text{avec } X = \mu, k, c_p \quad (3)$$

Le suivi d'interface réalisé à l'aide d'une méthode de front-tracking [3] permet d'accéder à la fonction  $H(x, t)$ . Sur l'interface, en l'absence de changement de phase, les équations de saut se réduisent à la continuité de la composante normale de la vitesse,  $\vec{u}_l \cdot \vec{n} = \vec{u}_g \cdot \vec{n} = u_n$ , de la densité de flux de chaleur  $\vec{q}_g \cdot \vec{n} = \vec{q}_l \cdot \vec{n}$  et de la température  $T_l = T_g$ .

## 2.2. Méthodes numériques

La résolution numérique utilise un schéma aux différences finies centrées d'ordre 2 pour la résolution spatiale et un schéma d'Euler retardé d'ordre 1 pour l'intégration temporelle. De plus amples détails sont disponibles dans la référence [4].

## 3. Résultats et discussion

### 3.1. Configuration étudiée

On considère une cavité 1D en géométrie cartésienne. Cette cavité, horizontale, contient une lame de liquide intercalée entre deux lames de gaz (Fig. 1). A l'état initial, le système est à pression et température uniformes de valeurs respectives égales à  $p_0$  et  $T_0$ . L'objectif est d'étudier le déplacement de la lame de liquide induit par chauffage. La dynamique de la lame liquide est régie par les équations de Navier-Stokes et l'équation de l'énergie. Combinant la conservation de la masse et le bilan de quantité de mouvement, il vient :

$$u_l(x, t) = u_l(t) \quad \text{et} \quad \frac{du_l}{dt} = \frac{p_{i1}(t) - p_{i2}(t)}{\rho_l L_l} \quad (4)$$

dans laquelle  $p_{i1}(t)=p(x_i, t)$  et  $p_{i2}(t)=p(x_i+L_l, t)$ . Dans ce problème la lame liquide se déplace en bloc tel un solide. La vitesse du liquide étant uniforme, sa viscosité n'intervient pas. L'équation (4) est équivalente à la relation fondamentale de la dynamique. L'équation de l'énergie dans le liquide se réduit quant à elle à une équation de diffusion :

$$\rho_l c_{pl} \frac{\partial T_l}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T_l}{\partial x^2} \quad (5)$$

### 3.2. Chauffage continu

La première configuration étudiée consiste à chauffer la paroi gauche de la cavité repérée par  $x=0$  en imposant une température égale à  $T_w$ . L'autre paroi ( $x=L$ ) est adiabatique. Ce cas présente l'intérêt de conduire le système dans un état stationnaire, de température uniforme égale à  $T_w$ . La lame de liquide retrouve sa position initiale et la pression est donnée par la relation :

$$p_f/p_0 = T_f/T_0 = T_w/T_0 \quad (6)$$

Des simulations ont été effectuées avec les paramètres suivants :  $L=100 \mu\text{m}$ ,  $x_{i0}=10 \mu\text{m}$ ,  $L_f=10 \mu\text{m}$ ,  $T_0=293 \text{ K}$ ,  $p_0=101325 \text{ Pa}$ ,  $T_w=373 \text{ K}$ . Les résultats sont présentés sur les figures 2 à 5. L'évolution du système se traduit par un rapide déplacement de la lame liquide suivi d'un retour plus lent vers l'état stationnaire (Fig. 2). Il est à noter ici que la position de l'interface à l'état stationnaire ne correspond pas à la valeur attendue ( $x_{i0}$ ) ; ce point sera discuté ultérieurement. Le comportement du système peut être analysé plus précisément en considérant l'évolution temporelle de la pression de part et d'autre de la lame liquide (Fig. 3). Dans le cas présent, la pression est quasiment uniforme dans chaque domaine gazeux et il est possible de considérer  $p_{i1}(t)=p_1(t)$  et  $p_{i2}(t)=p_2(t)$ . La figure 3 montre que l'évolution du système comporte deux phases distinctes : une première phase de très courte durée ( $t < t^* \approx 20 \mu\text{s}$ ) dans laquelle la différence de pression de part et d'autre de la lame liquide engendre un déplacement rapide de cette dernière ; une seconde de durée beaucoup plus longue ( $t > t^*$ ) dans laquelle la différence de pression de part et d'autre de la lame liquide devenue imperceptible (inférieure à 10 Pa), induit une vitesse de déplacement extrêmement lente. Ces observations sont cohérentes avec la relation (4).

#### 3.2.1. Première phase $t < t^*$

L'évolution temporelle du champ de température, représentée sur la figure 4, indique que le profil de température dans le domaine gazeux en contact avec la paroi chauffée ( $x=0$ ) est déjà linéaire au temps  $t=1 \mu\text{s}$ . A titre de comparaison, si ce milieu était purement diffusif, la linéarité du profil de température linéaire serait obtenue pour un temps égal à  $x_{i0}^2/\pi\alpha_g$  soit environ  $1,5 \mu\text{s}$ . En raison de l'inertie thermique du liquide, l'élévation de température dans la lame liquide (et par conséquent en  $x_i$ ) est imperceptible au cours de cette première phase. Dans ces conditions, le profil de température dans le milieu 1 peut s'écrire en première approximation :

$$T_1(x, t) = (T_0 - T_w) \frac{x}{x_i(t)} + T_w \quad (7)$$

Concernant la seconde lame de gaz, la réduction de son volume induite par le déplacement du liquide entraîne une élévation de la pression. Utilisant l'équation d'état du gaz, il vient après intégration dans le domaine  $[x_i+L_l ; L]$  :

$$\int_{x_i+L_l}^L \frac{p_2(x, t)}{T_2(x, t)} dx = r \int_{x_i+L_l}^L \rho_2(x, t) dx \quad (8)$$

Les variations spatiales de pression étant négligeables, on a en outre,  $p_2(x, t) \approx p_2(t)$  et :

$$\frac{p_2(t)}{p_0} \int_{x_i+L_l}^L \frac{T_0}{T_2(x, t)} dx = L - L_l - x_{i0} = Cte \quad (9)$$

Cette dernière relation montre qu'une élévation de la pression engendre dans la seconde lame de gaz un accroissement de la température. Celle-ci est quasiment uniforme sauf à proximité de l'interface ( $x \approx x_i+L_l$ ) car en ce point, l'inertie thermique du liquide maintient la

température égale à la valeur initiale. La figure 5 qui présente l'évolution temporelle de la température sur la paroi adiabatique confirme que le rapide déplacement de la lame liquide observé au cours de la première phase ( $0,1 \mu\text{s} < t < t^* \approx 20 \mu\text{s}$ ) induit une modification de la température de la seconde lame de gaz. Dans la mesure où cette lame de gaz n'échange (quasiment) pas de chaleur avec son environnement, ce phénomène illustre clairement l'impact de la compressibilité du gaz.

### 3.2.2. Seconde phase $t > t^*$

Une fois les deux pressions équilibrées, le déplacement de la lame liquide devient très lent et la dynamique du système est contrôlée par l'inertie thermique du liquide. Le principe de conservation de l'énergie appliqué à la lame liquide donne en effet :

$$\frac{dU_l}{dt} = \sum q_{entrants} - \sum q_{sortants} \quad (10)$$

Pour  $t > t^*$ , le seul flux significatif provient du gaz 1. L'égalité des flux sur l'interface repérée par  $x_i$  conduit à :

$$k_g \left( \frac{\partial T_g}{\partial x} \right)_{x_i} = k_l \left( \frac{\partial T_l}{\partial x} \right)_{x_i} \quad (11)$$

Le rapport des conductivités thermiques  $k_l / k_g$ , de l'ordre de 23 dans le cas présent, permet de négliger en première approximation le gradient de température dans la lame liquide. L'équation (10) s'écrit dans ce cas :

$$\rho_l L_l c_{pl} \frac{\partial T_l}{\partial t} = -k_g \left( \frac{\partial T_g}{\partial x} \right)_{x_i} \quad (12)$$

ou encore :

$$\rho_l L_l c_{pl} \frac{\partial T_l}{\partial t} \approx k_g \frac{T_w - T_l}{x_i} \quad (13)$$

Afin d'estimer l'échelle de temps caractéristique nécessaire au système pour atteindre l'état d'équilibre, caractérisé par une température uniforme en tous points du domaine  $[0 ; L]$  égale à  $T_w$ , le modèle est simplifié en négligeant la variation de  $x_i$  au cours du temps ( $x_i = x_{i0}$ ). L'évolution de température dans la lame liquide s'obtient ensuite en intégrant l'équation (13) :

$$T_l(t) = T_w + (T_0 - T_w) e^{-t/\tau} \quad (14)$$

dans laquelle la constante de temps  $\tau$  est donnée par  $\tau = (\rho_l L_l c_{pl} x_{i0}) / k_g$ .

L'écart entre la température du liquide et la température dans l'état final ( $T_w$ ) rapporté à l'écart maximum n'est plus que de 1% à  $6,9 \tau$ . La durée du régime transitoire est ainsi estimée à environ 0,11 s. Cette valeur est en bon accord avec les résultats présentés sur les figures 2 à 5. Ainsi, en dépit des simplifications apportées, le modèle se révèle satisfaisant pour estimer la durée du régime transitoire.

La simulation présentée (Fig. 2) met toutefois en évidence un écart substantiel entre la valeur attendue dans l'état final ( $x_{i0}$ ) et la valeur obtenue par simulation. Cette différence découle de l'utilisation de la méthode de front tracking dans laquelle l'interface possède une épaisseur. Ce phénomène invisible lorsque le déplacement de l'interface est faible [2, 4] apparaît ici en raison des fortes valeurs de la vitesse et de l'accélération mises en jeu. Un raffinement de maillage n'apporte pas d'amélioration significative. Des simulations ont été réalisées en modifiant la masse volumique du liquide, celle du gaz restant inchangée. La position de l'interface à l'état final ( $x_{if}$ ) rapportée à la valeur théorique ( $x_{i0}$ ) est présentée dans

le tableau 1. L'écart augmente avec le rapport de masses volumiques entre la phase liquide et la phase vapeur. Cette erreur numérique apparaît comme un problème de fond auquel il sera nécessaire d'apporter des améliorations.

### 3.3. Chauffage par échelons

Ce dispositif permet de réaliser un déplacement de la lame liquide sous l'effet d'un chauffage appliqué sur l'une des parois. Le cas étudié précédemment montre que la majeure partie du déplacement intervient au tout début du processus. Un chauffage du type échelon, de courte durée (de l'ordre de  $t^*$ ) est par conséquent suffisant pour réaliser cette opération. Considérant maintenant une configuration symétrique ( $L=100 \mu\text{m}$ ,  $x_{i0}=45 \mu\text{m}$ ,  $L_l=10 \mu\text{m}$ ,  $p_0=101325 \text{ Pa}$ ,  $T_0=293 \text{ K}$ ), on applique sur la paroi gauche ( $x=0$ ) des échelons de température successifs, de hauteur  $T_w=373 \text{ K}$  et de durée égale à  $t^*$ . Le temps  $t^*$  étant proportionnel au carré de  $x_{i0}$ , on multiplie la valeur du cas présenté sur les figures 2 à 5, par  $4,5^2$ . La paroi droite est maintenue à la température  $T_0$ . Le déplacement de l'interface résultant de la simulation, présenté sur la figure 6 confirme que des échelons de très courte durée sont suffisants pour réaliser un phénomène de battement dans lequel la lame liquide se déplace autour d'une position moyenne fixe. On notera ici que le retour à la position initiale est mieux assuré que dans le cas précédent (Fig. 2) en raison d'une dynamique d'interface plus lente ( $u_i \sim 0,1 \text{ m.s}^{-1}$  au lieu de  $1 \text{ m.s}^{-1}$ ).

Afin d'améliorer l'amplitude de ce battement, une autre simulation a été effectuée en considérant des échelons de température identiques au cas précédent (Fig. 6) mais appliqués en opposition de phase sur les deux parois. Le déplacement de l'interface ( $x_i$ ), reporté sur la figure 7, a une allure similaire à celui de la figure 6 mais son amplitude est double.

## 4. Conclusion

Cette étude met en évidence les paramètres d'influence ainsi que les échelles de temps associées au déplacement d'une lame liquide intercalée entre deux lames de gaz, sous l'effet de sollicitations thermiques. La description de telles configurations est rendue possible par l'utilisation d'un modèle dans lequel la compressibilité des phases gazeuses est prise en compte. Toutefois, les simulations numériques présentées dans ce travail révèlent la nécessité d'améliorer la méthode de suivi d'interface lorsque la dynamique de l'interface est intense.

### Références

- [1] P. Tabeling, *Introduction à la microfluidique*, Belin, (2003).
- [2] V. Daru et al. Modélisation et simulation numérique du changement de phase liquide-vapeur en cavité, *C.R. Mécanique*, 334 (2006), 25-33.
- [3] G. Tryggvason et al., A front-tracking method for the computation of multiphase flows, *J. Comput. Phys*, 169 (2001), 708–759.
- [4] M.-C. Duluc et al., Numerical simulations of a liquid vapour phase change problem in a closed cavity, *Proc. 13<sup>th</sup> Int. Heat Transf. Conf.* (Sydney, 13-18 août 2006).

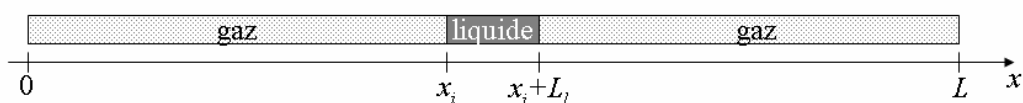


Figure 1 : Configuration étudiée

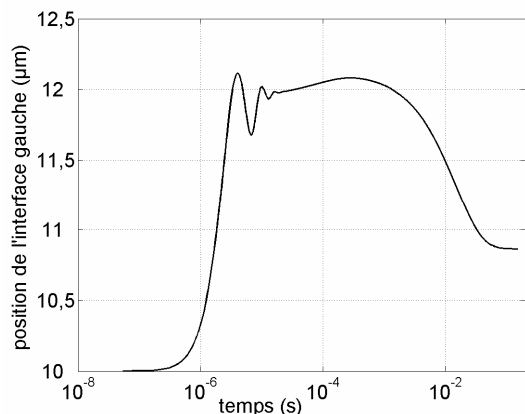


Figure 2 : Déplacement de la lame liquide au cours du temps

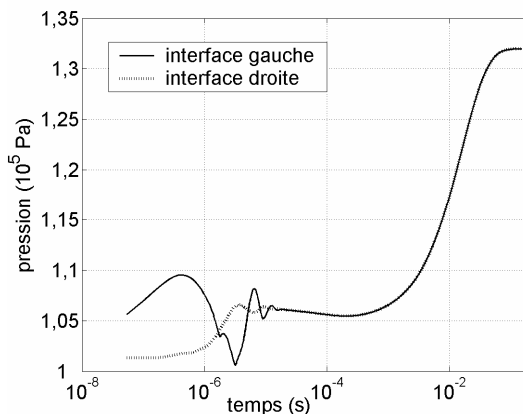


Figure 3 : Evolution temporelle des pressions de part et d'autre de la lame liquide

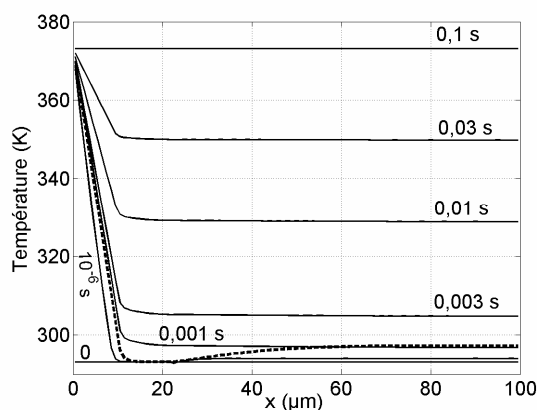


Figure 4 : Champ de température au cours du temps ( $t=10^{-5}$  s représenté en pointillés)

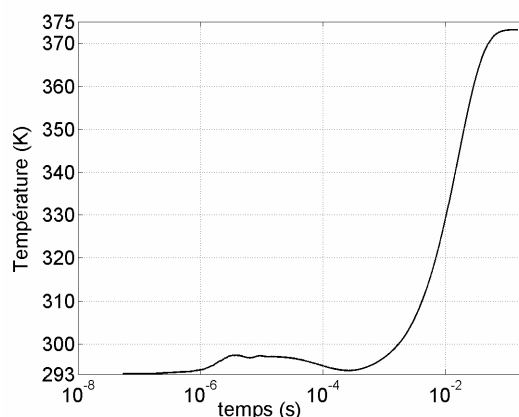


Figure 5 : Evolution temporelle de la température sur la paroi droite adiabatique

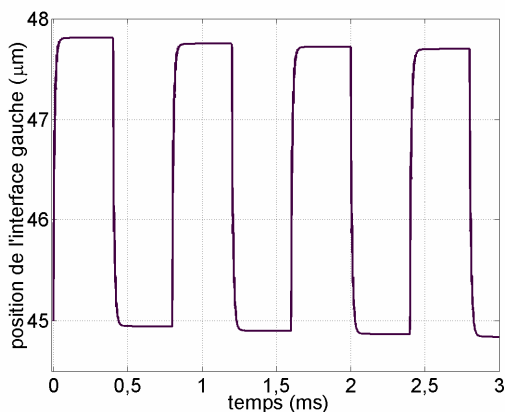


Figure 6 : Déplacement de la lame liquide au cours du temps lorsque des échelons de température sont appliqués sur la paroi gauche.

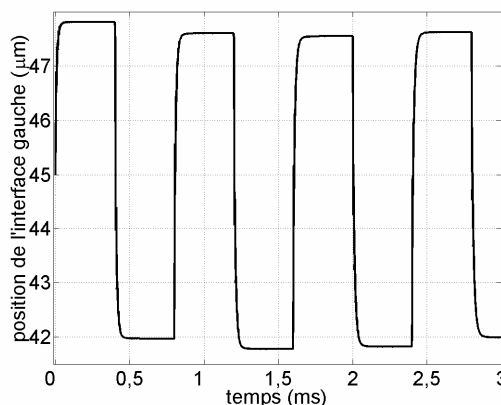


Figure 7 : Déplacement de la lame liquide au cours du temps lorsque des échelons de température sont appliqués sur les deux parois en opposition de phase.

$\rho_l$ ( $\text{kg.m}^{-3}$ )	2	10	100	1000	5000
$x_{if} / x_{i0}$	1,0001	1,0023	1,0178	1,0866	1,14

Tableau 1 : Erreur sur la position de l'interface en fonction de la masse volumique du liquide