

# Etude de la convection naturelle oscillante dans une enceinte cylindrique sous l'effet d'un champ magnétique

Farid BERRAHIL\*, Smail BENISSAAD, Rachid BESSAIH

Laboratoire d'Energétique Appliquée et de Pollution, Département de Génie Mécanique Université Mentouri Constantine, Route d'Ain El Bey, Constantine 25000, Algérie

\*(auteur correspondant : f\_berrahil2002@yahoo.fr)

**Résumé** - Cette étude porte sur l'écoulement magnétohydrodynamique d'un métal liquide dans une cavité cylindrique chauffée par le bas. La transition des solutions à l'état instationnaire est étudiée par simulation numérique, à l'aide d'un code de calcul en volumes finis. Les résultats obtenus montrent que l'intensité du champ magnétique a des effets importants sur les champs d'écoulement et de température. La transition vers un écoulement oscillatoire et périodique se fait pendant l'augmentation progressive du nombre de Grashof. La stabilité de ce régime peut être obtenue par l'application d'un champ magnétique externe.

## Nomenclature

$A$	rapport d'aspect = $H / r_c$	$U, V$	vitesse adimensionnelles radiale et axiale
$\vec{B}$	champ magnétique, $T$	$\vec{V}$	vecteur de vitesse, $m.s^{-1}$
$B_0$	intensité du champ magnétique, $T$	<i>Symboles grecs</i>	
$f$	fréquence adimensionnelle	$\alpha$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
$F$	force électromagnétique, $N.m^{-3}$	$\beta$	coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$
$g$	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$	$\varphi$	potentiel électrique, $V$
$Gr$	nombre de Grashof = $g\beta(T_H - T_C).r_c^3/\nu^2$	$\mu_m$	perméabilité magnétique, $H.m^{-1}$
$H$	hauteur du cylindre, $m$	$\theta$	température adimensionnelle
$Ha$	nombre de Hartmann = $B_0 r_c \sqrt{\sigma/\rho\nu}$	$\rho$	masse volumique, $kg.m^{-3}$
$\vec{j}$	densité du courant électrique, $A.m^{-2}$	$\sigma$	conductivité électrique, $\Omega^{-1}.m^{-1}$
$P$	pression adimensionnelle	$\nu$	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
$Pr$	nombre de Prandtl = $\nu/\alpha$	$\tau$	temps adimensionnel
$r, z$	directions radiale et axiale	$\Psi$	fonction de courant
$R$	rayon adimensionnel du cylindre	$\xi$	période adimensionnelle
$r_c$	rayon de l'enceinte cylindrique, $m$	<i>Indices et exposants</i>	
$Re_m$	nombre de Reynolds magnétique = $\mu_m \sigma UH$	$Cr$	critique
$\overline{Nu}$	nombre de Nusselt moyen = $\int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial Z} R dR$	$C$	froid
$T$	température, $K$	$H$	chaud
		$R, Z$	références aux directions radiale et axiale
		$0$	état de référence

## 1. Introduction

La convection naturelle d'un métal liquide dans des milieux confinés auquel un champ magnétique est appliqué apparaît dans les procédés de croissance cristalline. En général, l'homogénéité et la qualité des cristaux développés dans le bain fondu sont d'intérêt immense pour les fabricants des composants électroniques [1]. Le gradient de la température entre le

front de solidification et la phase liquide peut entraîner des mouvements du métal liquide convectifs complexes. Les écoulements instationnaires causent, à l'échelle microscopique, des concentrations de dopant indésirables, appelées striations [2,3] et peuvent également causer des inhomogénéités dans la distribution de dopant à un niveau macroscopique nommées ségrégations. Ces concentrations et inhomogénéités nuisent à la qualité du cristal formé. La voie unique pour avoir des cristaux de bonne qualité est de procéder à leur croissance en présence d'un champ magnétique [4,5].

L'effet d'un champ magnétique constant sur les écoulements de convection naturelle d'un métal liquide dans différentes configurations a fait l'objet de nombreuses études. De nombreux travaux se sont intéressés à la configuration de Bridgman horizontale dans des cavités rectangulaires ou cylindriques [6,7]. Différentes intensités et orientations du champ magnétique ont été considérées. Ces études ont inclu des différents cas à savoir les conditions aux limites variables comme la tension superficielle aux surfaces libres et la convection thermocapillaire. La configuration de Bridgman verticale a suscité un intérêt accru et a fait l'objet de nombreux de travaux. Touihri *et al.* [8] ont mené une étude numérique tridimensionnelle dans une enceinte cylindrique chauffée par le bas. L'enceinte est exposée à un champ magnétique en considérant toutes les frontières isolantes. Ils ont obtenus les diagrammes de stabilité et ont déterminé les modes propres des instabilités de l'écoulement pour des différents paramètres à savoir l'orientation du champ magnétique, son intensité et le rapport d'aspect. Gelfgat *et al.* [9] ont fait une étude sur l'effet d'un champ magnétique vertical extérieurement imposé sur l'instabilité d'un écoulement axisymétrique dans une cavité cylindrique. Le cylindre est chauffé par le bas et un profil de température parabolique est imposé sur la paroi latérale. Les diagrammes de stabilité sont obtenus pour un nombre de Prandtl ( $Pr=0.015$ ).

Nous proposons dans ce travail une étude numérique de l'instabilité de la convection naturelle dans une cavité cylindrique axisymétrique chauffée par le bas. Notre but est de déterminer les nombres de Grashof critiques  $Gr_{Cr}$  associés aux nombres de Hartmann  $Ha$  et d'observer l'effet du champ magnétique sur la stabilité hydrodynamique et thermique.

## 2. Géométrie et modèle mathématique

La géométrie considérée est schématisée sur la figure 1. Il s'agit d'une enceinte cylindrique remplie complètement d'un métal liquide, à faible nombre de Prandtl ( $Pr=0.015$ ), ayant une hauteur  $H$  et un rayon  $r_c$  et un rapport d'aspect  $A=2$ . Le cylindre contient deux disques aux extrémités. Celle du bas est maintenue à la température  $T_H$  et l'autre est maintenue à la température  $T_C$  ( $T_C < T_H$ ). Les parois latérales du cylindre sont supposées adiabatiques. L'écoulement est soumis à un champ magnétique extérieur  $B_0$  orienté verticalement.

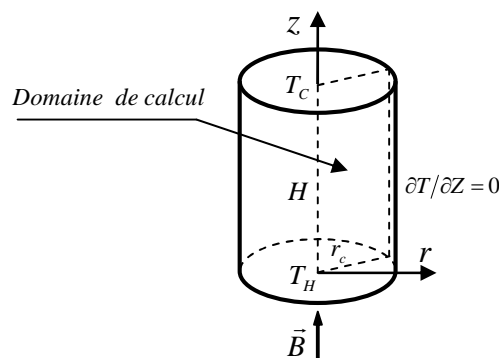


Figure 1 : Géométrie et conditions aux limites du problème

Pour la modélisation de ce problème, nous adopterons les hypothèses simplificatrices suivantes : l'écoulement est laminaire et axisymétrique, les propriétés physiques du fluide sont supposées constantes, la dissipation de chaleur visqueuse est négligeable, il n'y a pas de source de chaleur et l'approximation de Boussinesq est valable.

Dans le cas de l'application du champ magnétique sur l'écoulement, l'équation du courant électrique  $\vec{j}$  est obtenue par l'application de la loi d'Ohm :

$$\vec{j} = \sigma \left[ -\nabla\varphi + \vec{V} \times \vec{B} \right] \quad (1)$$

La densité de courant électrique  $\vec{j}$  est une grandeur conservative ce qui permet d'écrire :

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 \quad (2)$$

Les composantes de la force de Lorentz  $\vec{F}$  sont déduites de l'équation :

$$\vec{F} = \vec{j} \times \vec{B} \quad (3)$$

Par ailleurs, les frontières sont électriquement isolantes, le potentiel électrique  $\varphi$  est donc constant, ce qui permet finalement d'écrire les expressions de  $\vec{j}$  et  $\vec{F}$  par :

$$\vec{j} = \sigma \left[ \vec{V} \times \vec{B} \right] \quad (4)$$

$$\vec{F} = \sigma \left[ \vec{V} \times \vec{B} \right] \times \vec{B} \quad (5)$$

En présence d'un champ magnétique, on considère aussi les hypothèses suivantes : l'effet Joule est négligeable, le champ magnétique induit est négligeable car le nombre de Reynolds magnétique est très inférieur à l'unité et le métal liquide est non magnétisé parce que la perméabilité magnétique  $\mu_m = 1$ .

Les équations de continuité, de quantités de mouvement et d'énergie, qui gouvernent notre problème sont adimensionnées en utilisant les grandeurs de référence  $r_c^2/\nu$ ,  $r_c$ ,  $\nu/r_c$ ,  $\rho(\nu/r_c)^2$ ,  $T_H - T_C$  et  $B_0$  pour le temps, la longueur, la vitesse, la pression, la température et le champ magnétique respectivement. Elles s'écrivent comme suit :

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R.U) + \frac{\partial V}{\partial Z} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R.U^2) + \frac{\partial}{\partial Z} (V.U) = -\frac{\partial P}{\partial R} + \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 U}{\partial Z^2} - \frac{U}{R^2} \right) + F_R \quad (7)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R.U.V) + \frac{\partial}{\partial Z} (V^2) = -\frac{\partial P}{\partial Z} + \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right) + Gr.\theta + F_Z \quad (8)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R.U.\theta) + \frac{\partial}{\partial Z} (V.\theta) = \frac{1}{Pr} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2} \right) \quad (9)$$

Les composantes de la force de Lorentz adimensionnelles suivant les directions  $r$  et  $z$  dans le cas où le champ magnétique est appliqué verticalement ont pour expressions :

$$F_R = -Ha^2.U \quad (a) \quad F_Z = 0 \quad (b) \quad (10)$$

Les équations sont résolues avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

- à  $\tau = 0$ ,  $U = V = \theta = 0$
- Pour  $\tau > 0$ , on a :
  - à  $R = 0$  :  $U = \partial V / \partial R = 0$ ,  $\partial \theta / \partial R = 0$  ; axe de symétrie
  - à  $R = 1$  :  $U = V = 0$ ,  $\partial \theta / \partial R = 0$  ; paroi latérale adiabatique
  - à  $Z = 0$  :  $U = V = 0$ ,  $\theta = 1$  ; disque inférieur chaud
  - à  $Z = H/r_c$  :  $U = V = 0$ ,  $\theta = 0$  ; disque supérieur froid

### 3. Méthode numérique

La méthode des volumes finis est utilisée pour la résolution du système d'équations. La résolution séquentielle est assurée par l'algorithme SIMPLER [10]. Les quantités scalaires ( $P, T$ ) sont stockées aux centres des volumes par contre les quantités vectorielles ( $U, V$ ) sont localisées aux interfaces. Pour la discrétisation des équations du modèle mathématique, on a utilisé un schéma implicite du premier ordre et une discrétisation spatiale par les différences centrées. L'existence de forts gradients de vitesses et de température près de la paroi latérale et l'axe de symétrie, d'une part, et les disques inférieur et supérieur, d'autre part, nous a incité à utiliser un maillage irrégulier et raffiné dans les directions radiale  $R$  et axiale  $Z$ . L'effet du maillage sur la solution a été étudié et notre choix a été orienté sur une grille à  $52 \times 102$  nœuds.

La convergence est vérifiée lorsque le bilan d'énergie est satisfait, en comparant les nombres de Nusselt moyen près du disque froid et du disque chaud, et quand la différence des vitesses entre deux itérations consécutives est négligeable. Pour la présente étude, la convergence sera atteinte lorsque :  $\left| \overline{Nu}_C - \overline{Nu}_H \right| \leq 10^{-4}$ .

### 4. Résultats et discussions

L'étude effectuée est caractérisée par la visualisation graphique des contours de la fonction de courant, des isothermes, les évolutions temporelles des vitesses radiales et les spectres d'énergies. Dans ce travail, nous nous intéressons au point critique pour lequel l'écoulement devient instable, pour cela nous avons fait une série de simulations, en augmentant progressivement le nombre de Grashof  $Gr$ .

Pour chaque nombre de Hartmann  $Ha$ , nous détectons le nombre de Grashof critique  $Gr_{Cr}$ . Généralement, le début des oscillations apparaît soudainement quand  $Gr$  est légèrement augmenté de l'état stationnaire près de l'état critique. La valeur de  $Gr_{Cr}$  correspond à l'amplitude d'oscillation des vitesses adimensionnelles la plus grande [11].

$Ha$	0	10	20	30	40	50	60
$Gr_{Cr}$	$0.8 \times 10^6$	$1.1 \times 10^6$	$2 \times 10^6$	$1.8 \times 10^6$	$2.7 \times 10^6$	$4.1 \times 10^6$	$6 \times 10^6$
$f_{Cr}$	23.67	27.58	44.8	46.76	57.91	65.74	59.08

Tableau 1 : Evolution de  $Gr_{Cr}$  en fonction de  $Ha$

L'écoulement à faible nombre de Grashof présente un régime unicellulaire dont le sens d'écoulement est le sens horaire. Lorsqu'on augmente le nombre de  $Gr$  d'une façon importante, la séparation de la cellule principale se produit au milieu du cylindre et donne naissance à des cellules secondaires. L'application du champ magnétique a pour effet de stabiliser l'écoulement (voir le tableau 1). Lorsque le champ magnétique est appliqué et quand  $Ha = 10$ , la structure de l'écoulement est constituée de deux cellules de recirculation (voir figure 2). La cellule du haut, tournant dans le sens horaire, prend une place plus importante par rapport à la cellule du bas lorsque on augmente  $Ha$  de 10 à 20. Pour  $Ha = 30$ , la dominance de la cellule du haut est nette. L'augmentation de  $Ha$  jusqu'à 40, mène à la naissance d'une autre cellule dont le sens de rotation est l'inverse des aiguilles d'une montre. Pour  $Ha = 50$ , cette zone s'élargit davantage et elle devient dominante pour  $Ha = 60$ .

Les isothermes de la figure 2 montrent l'existence et la dominance du régime convectif par rapport au régime diffusif, ceci est montré par la déformation des isothermes. Ce régime devient très important d'une façon similaire à l'augmentation de l'intensité du champ magnétique. Cela est expliqué par la croissance des valeurs de  $Gr$ , ce qui favorise le flux convectif par rapport au flux diffusif.

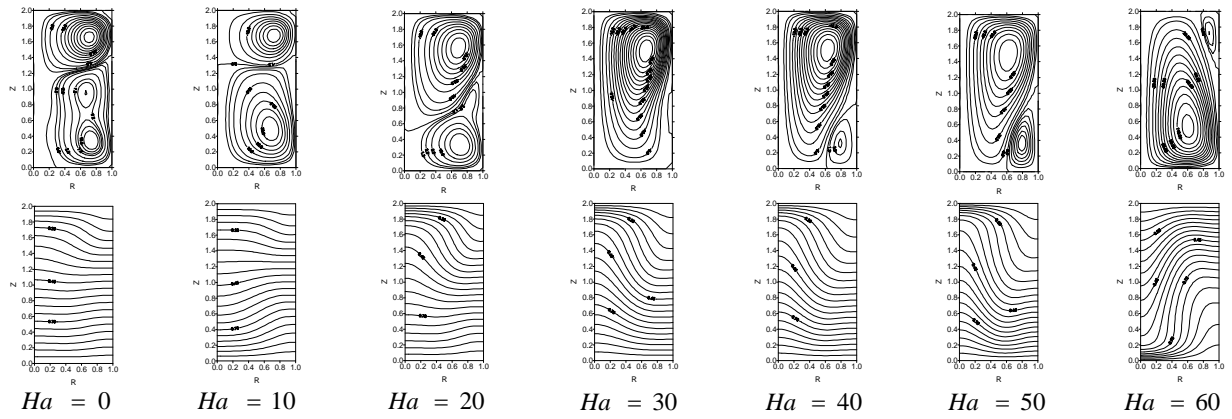


Figure 2 : Structures de l'écoulement et isothermes pour différentes valeurs de  $Ha$  correspondant respectivement à  $Gr_{Cr} = 0.8 \times 10^6$  ;  $1.1 \times 10^6$  ;  $2 \times 10^6$  ;  $1.8 \times 10^6$  ;  $2.7 \times 10^6$  ;  $4.1 \times 10^6$  et  $6 \times 10^6$

Pour rechercher l'influence du nombre de Grashof  $Gr$  sur la stabilité et sur la structure de l'écoulement, on augmente progressivement sa valeur. En arrivant à une valeur dite Grashof critique  $Gr_{Cr}$ , l'écoulement devient oscillatoire et périodique (voir figures 3a et 3b). La raison de ces instabilités oscillatoires est étroitement liée au mécanisme de production des cellules secondaires. Ceci est en bon accord avec le raisonnement de Gelfgat [12] qui a supposé que l'instabilité est provoquée par l'interaction entre le vortex central et les vortex les plus petits.

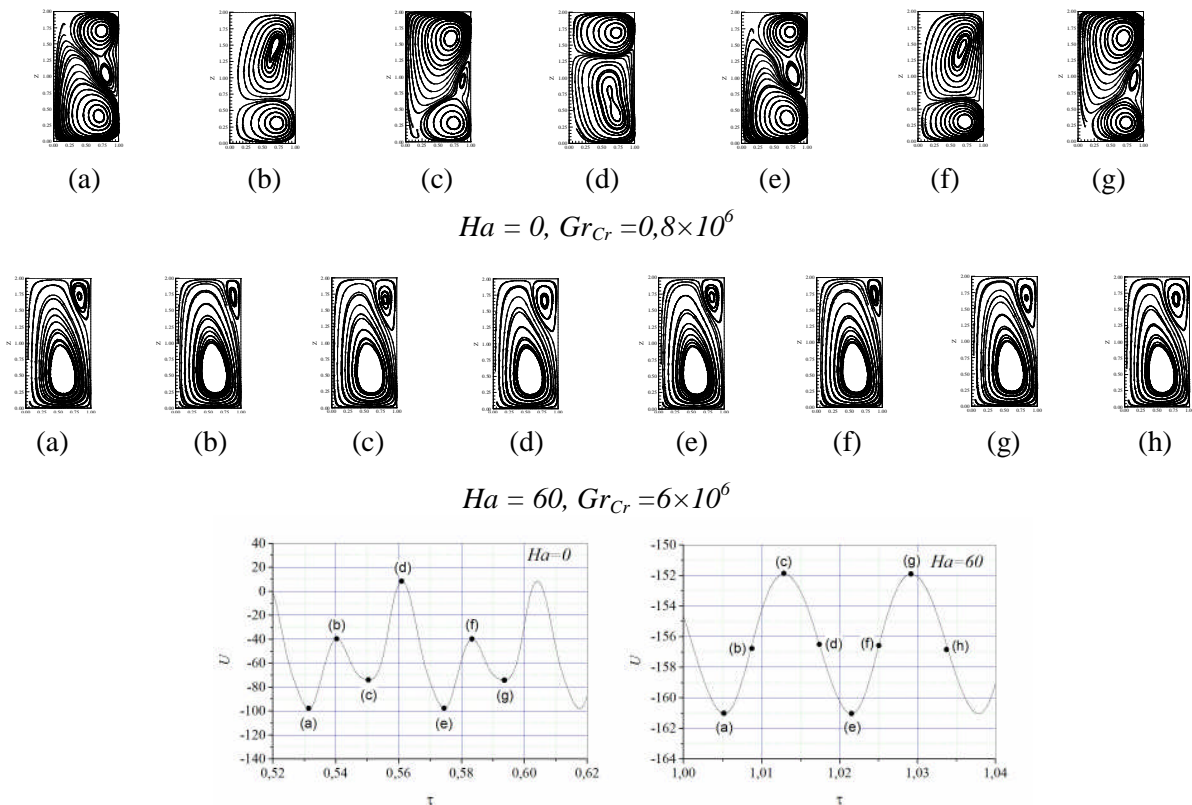


Figure 3 : Structures de l'écoulement en fonction de la périodicité des oscillations pour  $Ha=0$  et  $60$

Afin d'obtenir le spectre d'énergie des oscillations, on utilise la transformée inverse de Fourier. Sur la figure 4, on représente l'énergie  $E$  en fonction des fréquences des oscillations  $f$ . Cette analyse du signal de la vitesse radiale pour différentes valeurs de  $Ha$ , a permis de mettre en évidence le caractère périodique et oscillatoire de l'écoulement, correspond à une fréquence dominante avec ses harmoniques. La figure 4 montre l'existence de trois pics,

cependant la valeur du premier pic  $f_{Cr} = 57.91$  est la plus dominante. Ce qui correspond à une période dominante pour ce régime d'écoulement  $\xi = 1/f_{Cr}$ .

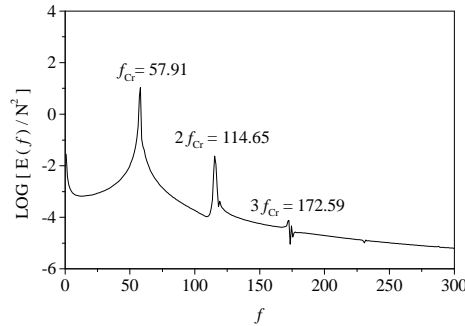


Figure 4 : Spectre d'énergie en fonction de la fréquence pour  $Gr_{Cr} = 2.7 \times 10^6$  et  $Ha = 40$

## 5. Conclusion

L'écoulement et le transfert de chaleur de la convection naturelle dans une enceinte cylindrique en présence d'un champ magnétique externe sont modélisés par les équations de la magnétohydrodynamique. Les simulations numériques ont été effectuées en variant simultanément les nombres de Grashof et de Hartmann. Les résultats obtenus montrent qu'un champ magnétique vertical a un effet important sur la structure de l'écoulement pour des valeurs croissantes de  $Gr$  et de  $Ha$ . Ainsi, l'augmentation du nombre de Hartmann de 0 à 60 a permis de faire reculer la valeur du nombre de Grashof critique de  $0.8 \times 10^6$  à  $6 \times 10^6$ .

## Références

- [1] D. T. J. Hurle, Crystal Growing from the Melt, *Springer* (1993).
- [2] D. T. J. Hurle, Temperature oscillations in molten metals and their relationship to growth striae in melt-grown crystals, *Phil. Mag.* 13, 305-310 (1966).
- [3] H. Utech & M. Flemings, Elimination of solute banding in indium antimonide crystals by growth in a magnetic field, *J. Appl. Phys.* 37, 2021–2024 (1966).
- [4] R. Series & D. Hurle, The use of magnetic fields in semiconductor crystal growth, *J. Cryst. Growth* 113, 305–328 (1991).
- [5] J. Garandet & T. Alboussière, Bridgman growth: modelling and experiments, *Prog. Cryst. Growth* 38, 73–132 (1999).
- [6] H. BenHadid & D. Henry, Numerical simulations of convective three-dimensional flows in a horizontal cylinder under the action of a constant magnetic field, *J. Cryst. Growth* 166, 436–445 (1996).
- [7] H. Ben Hadid & D. Henry, Numerical study of convection in the horizontal Bridgman configuration under the action of a constant magnetic field. Part2. Three-dimensional flow, *J. Fluid Mech.* 333, 57–83 (1997).
- [8] Touiri, H. Ben Hadid & D. Henry, On the onset of convective instabilities in cylindrical cavities heated from below. II. Effect of magnetic field, *Phys. Fluids* 11, 2089-2100 (1999).
- [9] A. Yu. Gelfgat, P. Z. Bar-Yoseph & A. Solan, Effect of axial magnetic field on three-dimensional instability of natural convection in a vertical Bridgman configuration, *J. of Crystal Growth* 230, 63-72 (2001).
- [10] S.V. Patankar, Numerical heat transfer and fluid flow, *Hemisphere*. Washington, DC (1980).
- [11] S. Wakitani, Numerical study of three-dimensional oscillatory natural convection at low Prandtl number in rectangular enclosures, *J. of Heat Transfer* 123, 77-83 (2001).
- [12] A. Yu. Gelfgat & I. Tanasawa, Numerical analysis of oscillatory instability of buoyancy convection with the Galerkin spectral method, *Numerical Heat transfer, Part A*, 25, 627-648 (1994).