

# Convection naturelle dans un espace annulaire horizontal excentré et partiellement poreux

Mebrouk AIT SAADA<sup>1,3</sup>, Salah CHIKH<sup>1</sup>, Antonio CAMPO<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Faculté de Génie Mécanique et de Génie des Procédés, USTHB  
B.P.32, El Alia, Bab Ezzouar 16111, Algérie

<sup>2</sup>Department of Mechanical Engineering, University of Vermont  
Burlington, VT 05405, USA

<sup>3</sup>Polytech'Marseille, IUSTI-CNRS (UMR 6995), Université de Provence  
Technopôle Château Gombert, 5, rue Enrico Fermi, 13453 Marseille, France

\*(auteur correspondant : [m\\_aitsaada@yahoo.fr](mailto:m_aitsaada@yahoo.fr))

**Résumé** - On étudie numériquement la convection naturelle entre deux cylindres horizontaux et excentrés. La combinaison d'une couche poreuse et d'un gap d'air entre deux cylindres coaxiaux engendre une réduction des pertes thermiques. L'effet de l'excentricité entre les deux cylindres et de la présence simultanée d'une couche d'isolant poreux et d'un espace d'air est analysé dans la présente étude. Les résultats numériques montrent que le déplacement du cylindre extérieur vers le haut permet d'améliorer la qualité de l'isolation thermique avec une couche poreuse relativement mince de rapport de conductivité thermique  $R_c=1.5$  et de perméabilité correspondante à  $Da \leq 10^{-5}$ , dans le cas d'un nombre de Rayleigh de  $10^4$ .

## Nomenclature

$a$	position du pôle du repère bipolaire, m	$Ra^*$	nombre de Rayleigh modifié, $Ra Da/R_c$
$Da$	nombre de Darcy, $K/(\varepsilon r_i^2)$	$R_c$	rapport de conductivité thermique, $k_{eff}/k$
$e$	excentricité des cylindres, m	$u, v$	composantes de la vitesse, m/s
$e_a$	épaisseur du gap d'air, m	$r^*, \varphi$	coordonnées cylindriques, m et rd
$e_p$	épaisseur moyenne, $r_e - r_i - e_a$	<i>Symboles grecs</i>	
$h$	coefficient métrique, m	$\alpha, \beta$	coordonnées bipolaires, rd
$k$	conductivité thermique du fluide, W/m	$\varepsilon$	porosité
$p$	pression, N/m <sup>2</sup>	$\psi, \theta$	fonction de courant et température
$Pr$	nombre de Prandtl, $\nu/\alpha_T$	<i>Indices</i>	
$Q$	quantité de chaleur total	$f, p$	fluide, poreux
$R$	rapport de rayon, $r_e/r_i=2$	$i, e, 0$	intérieur, extérieur, concentrique
$Ra$	nombre de Rayleigh, $g\beta_T(T_i - T_e)r_i^3/(\nu\alpha_T)$	$eff$	effectif

## 1. Introduction

La convection naturelle dans un espace annulaire horizontal est rencontrée dans une large variété d'applications technologiques, comme l'isolation thermique des conduites de vapeur et de gaz, le stockage de l'énergie thermique, la cryogénie, les réseaux de câbles électriques souterrains, etc. L'augmentation de l'excentricité, obtenue par le déplacement vers le haut du cylindre intérieur (chaud), réduit le transfert de chaleur par convection thermique et augmente par contre le transfert de chaleur par conduction thermique. Il existe alors une valeur optimale de l'excentricité pour laquelle les pertes de chaleur sont minimales [1,2]. Plusieurs travaux ont été menés dans ce contexte. Bau [3,4] a appliqué les techniques de développement de perturbation régulière, en terme du nombre de Rayleigh modifié  $Ra^*$ , pour étudier la convection naturelle dans un anneau poreux et excentré. Himasekhar et Bau [5] ont

utilisé une approche de type couche limite et ont proposé une corrélation du nombre de Nusselt moyen pour une large gamme de  $Ra^*$ . Plus tard, Mota et Saadjan [6] ont élargi l'étude au cas d'un écoulement 2D bicellulaire. Enfin, Mota et al. [7] ont montré que le transfert de chaleur est optimisé par un choix approprié de la forme de l'espace annulaire.

Nous analysons la convection naturelle 2D stationnaire et laminaire dans un espace annulaire horizontal, excentré et partiellement poreux. Le cylindre intérieur est de rayon  $r_i$  et à température uniforme  $T_i$ , tandis que le cylindre extérieur est de rayon  $r_e$  et à température uniforme  $T_e$  ( $R=r_e/r_i=2$  et  $T_i > T_e$ ). Le domaine d'étude, indiqué sur la figure 1, est composé d'un gap d'air intérieur d'épaisseur uniforme  $e_a$  et d'une couche poreuse saturée de porosité  $\varepsilon$ , de perméabilité  $K$  et de conductivité thermique effective  $k_{eff}$ . L'excentricité  $e$  (entraxe des deux cylindres) est positive lorsque le cylindre extérieur est déplacé vers le haut tel que :  $e \leq r_e - r_i - e_a$ . Le fluide, air, est de densité  $\rho$ , de coefficient de dilatation thermique  $\beta_T$  et de viscosité cinématique  $\nu$ . L'objectif de cette étude est de déterminer en fonction des propriétés du matériau poreux ( $k_{eff}$ ,  $K$ ), de l'épaisseur  $e_a$  et de l'excentricité  $e$ , les conditions d'une réduction des pertes de chaleur pour une meilleure isolation thermique.

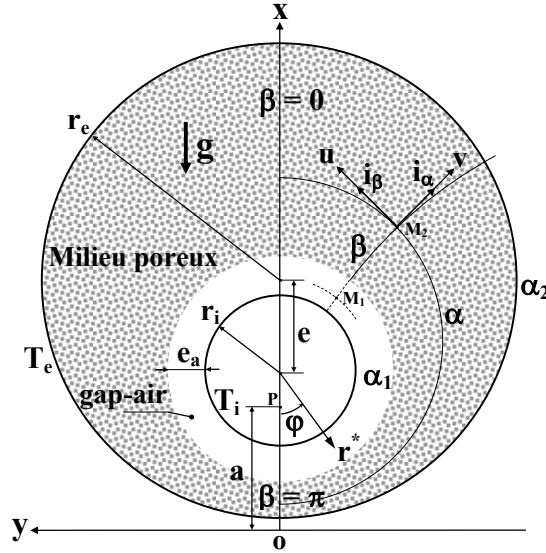


Figure 1: Domaine d'étude.

## 2. Formulation mathématique

Les équations de conservation de masse, de quantité de mouvement et d'énergie sont écrites en coordonnées bipolaires dans la région poreuse et en coordonnées cylindriques dans la région fluide. Un modèle non Darcien est considéré pour décrire l'écoulement dans le milieu poreux. En adoptant l'approximation de Boussinesq, les équations adimensionnelles de conservation sont écrites en coordonnées bipolaires de la manière suivante :

$$H \frac{\partial V}{\partial \alpha} + H \frac{\partial U}{\partial \beta} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( H V V - Pr H \frac{\partial V}{H \partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( H U V - Pr H \frac{\partial V}{H \partial \beta} \right) = -H \frac{\partial P}{\partial \alpha} \\ & - \left( Pr \frac{(\cosh \alpha + \cos \beta) V}{A H} \right) H^2 + \left( 2 Pr \frac{\sinh \alpha}{A} \frac{\partial U}{H \partial \beta} \right) H^2 - \left( 2 Pr \frac{\sin \beta}{A} \frac{\partial U}{H \partial \alpha} \right) H^2 \\ & - \left( \frac{\sinh \alpha U^2}{A} \right) H^2 + \left( \frac{\sin \beta U V}{A} \right) H^2 + Ra Pr \theta \frac{H}{A} (\cosh \alpha \cos \beta - 1) H^2 - \left( \frac{Pr}{Da} V \right) H^2 \end{aligned} \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( H V U - Pr H \frac{\partial U}{H \partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( H U U - Pr H \frac{\partial U}{H \partial \beta} \right) = -H \frac{\partial P}{\partial \beta} - \left( Pr \frac{(\cosh \alpha + \cos \beta) U}{A H} \right) H^2 - \left( 2 Pr \frac{\sinh \alpha}{A} \frac{\partial V}{H \partial \beta} \right) H^2 + \left( 2 Pr \frac{\sin \beta}{A} \frac{\partial V}{H \partial \alpha} \right) H^2 + \left( \frac{\sinh \alpha U V}{A} \right) H^2 - \left( \frac{\sin \beta V^2}{A} \right) H^2 + \left( Ra Pr \theta \frac{H}{A} \sinh \alpha \sin \beta \right) H^2 - \left( \frac{Pr}{Da} U \right) H^2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} (H V \theta - R_c H \frac{\partial \theta}{H \partial \alpha}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (H U \theta - R_c H \frac{\partial \theta}{H \partial \beta}) = 0 \quad (4)$$

On y ajoute les équations de conservation dans le gap d'air [1]. Les variables adimensionnelles et les caractéristiques du repère bipolaire sont définies par:

$$r = r^* / r_i, U = u / (\alpha_T / r_i), V = v / (\alpha_T / r_i), P = p / \rho (\alpha_T / r_i)^2, \theta = (T - T_e) / (T_i - T_e), A = a / r_i, H = H_\alpha = H_\beta = h / r_i$$

Des nombres adimensionnels apparaissent et constituent les principaux paramètres du problème, à savoir: Ra, Pr, Da, R<sub>c</sub>, ainsi que l'épaisseur du gap d'air  $e_a^* = e_a / r_i$ , l'épaisseur moyenne de la couche poreuse  $e_p^* = R - 1 - e_a^*$  et l'excentricité  $e^* = e / r_i$ . Dans la région fluide, on pose :  $Da \rightarrow \infty$  et  $R_c = 1$ . Pour des raisons de symétrie par rapport à l'axe vertical (ox), on considère la moitié de l'espace comme domaine d'étude. Les conditions aux limites imposées sont :

$$\text{à } r = 1 : \quad U = V = 0 \text{ et } \theta = 1 \quad (5)$$

$$\text{à } \alpha = \alpha_2 : \quad U = V = 0 \text{ et } \theta = 0 \quad (6)$$

$$\text{à } \beta, \varphi = 0^\circ \text{ ou } 180^\circ : \quad U = \frac{\partial V}{\partial \beta} = \frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{\partial \theta}{\partial \beta} = \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} = 0 \quad (7)$$

La continuité des grandeurs physiques est assurée à l'interface perméable poreux-air. En régime stationnaire, la quantité de chaleur adimensionnelle, échangée entre les cylindres, est déterminée par:

$$Q = -2 \int_0^\pi \left. \frac{\partial \theta}{\partial r^*} \right|_1 d\varphi = -2 R_c \int_0^\pi \left. \frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right|_{\alpha_2} d\beta \quad (8)$$

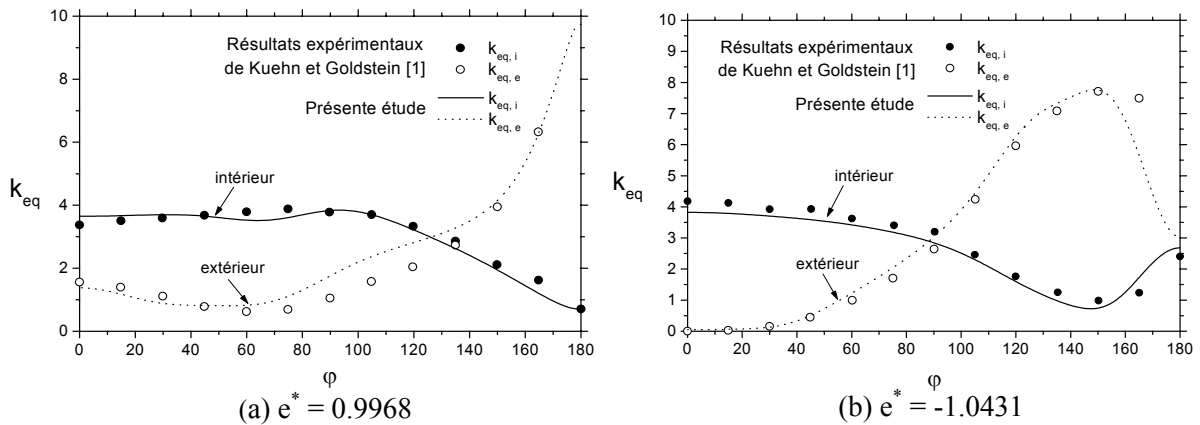


Figure 2 : Comparaison avec les résultats expérimentaux de Kuehn et Goldstein [1] (cas purement fluide,  $R = 2.6$ ,  $Ra = 11931.4$ ,  $Pr = 0.706$ ).

### 3. Procédure numérique

Les équations gouvernantes sont discrétisées par la méthode des volumes finis en considérant des maillages de  $150 \times 150$  nœuds. L'algorithme SIMPLE est adopté pour traiter le couplage vitesse - pression [8]. Le schéma PLDS (Power Law Differencing Scheme) est

considéré pour la discrétisation des termes de convection et de diffusion. Les systèmes d'équations algébriques obtenus sont résolus par la combinaison de l'algorithme de Thomas et la méthode de Gauss-Seidel. Le critère de convergence du processus itératif est atteint lorsque l'erreur maximale sur  $U$ ,  $V$  et  $\theta$  est inférieure à  $10^{-5}$  et le résidu massique de l'équation de continuité est inférieur à  $10^{-10}$ . La figure 2 montre une parfaite concordance entre nos résultats numériques et les résultats expérimentaux de Kuehn et Goldstein [1]. La conductivité thermique équivalente locale  $k_{eq}$  représente le rapport de la densité de chaleur par convection thermique ( $e^* \neq 0$ ) à la densité de chaleur par conduction thermique ( $e^* = 0$ ) au niveau des parois cylindriques.

### 3. Résultats et discussion

Les résultats numériques sont obtenus en considérant:  $R = 2$ ,  $Pr = 0.7$  et  $Ra = 10^4$  ou  $10^6$ . Le matériau poreux est un isolant de rapport de conductivité thermique  $1 \leq R_c \leq 2$ . Sa perméabilité est inférieure à  $10^{-12} \text{ m}^2$ , mais peut avoir aussi des valeurs plus élevées ( $10^{-8} \leq Da \leq 10^{-2}$ ) [2-7]. La figure 3 représente les distributions des lignes de courant et des isothermes. Lorsque le milieu est purement fluide (figs. 3a et b), un gradient de température intense est localisé en bas du cylindre intérieur chaud et en haut du cylindre extérieur froid. Il apparaît ainsi un écoulement monocellulaire ascendant du côté du cylindre intérieur et descendant du côté du cylindre extérieur. En augmentant  $Ra$ , les couches limites deviennent plus minces et plus longues. Le centre de la cellule est déplacé vers le haut et sa fonction de courant maximale  $\psi_{max}$  est amplifiée. L'insertion d'un milieu poreux faiblement perméable ( $Da = 10^{-8}$ ) réduit les pertes thermiques (fig. 3c). Le milieu poreux impose une forte résistance dynamique à l'écoulement ( $\psi \approx 0$ ). Le calcul du nombre de Rayleigh modifié donne une valeur inférieure à l'unité, impliquant un transfert de chaleur par conduction thermique tel que :  $Q_{p0} = 9.08 R_c$  [6].

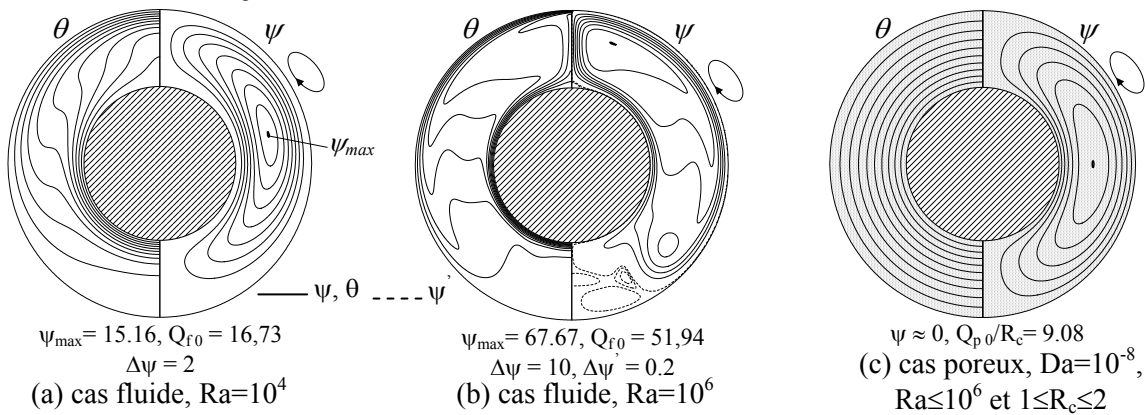


Figure 3: Lignes de courant et isothermes dans un espace annulaire concentrique.

La figure 4 expose les répartitions des champs dynamique et thermique à travers une combinaison d'un gap d'air et d'une couche poreuse isolante de propriétés :  $Da = 10^{-8}$  et  $R_c = 1.5$  dans le cas d'un nombre de Rayleigh  $Ra = 10^4$ . Entre deux cylindres coaxiaux, la présence d'un gap d'air d'épaisseur  $e_a^* = 0.52$  induit un rapport de quantité de chaleur total  $Q_0/Q_{f0}$  égal à 63.83% contre 81.83% dans le cas d'un espace annulaire totalement poreux. Cette diminution des pertes thermiques a lieu dans le cas où la conduction thermique est le mode dominant de transfert, tel que montré par le tracé des isothermes sur la figure 4a. Il est donc possible d'améliorer l'isolation thermique par l'insertion d'une couche d'air stagnant et il existe une situation optimale, caractérisée par des pertes thermiques minimales  $Q_{0\ opt}$  pour une épaisseur  $e_{a\ opt}^*$ . La considération d'un gap d'air plus épais ( $e_a^* = 0.84$ ) active les effets convectifs, principalement dans la région fluide. La quantité de chaleur globale est égale à

celle transférée à travers un milieu totalement poreux ( $Q_0 = Q_{p0}$ ). Dans ce cas, l'isolation est dite économique, caractérisée par une limite  $Q_p$  pour une épaisseur  $e_a^*_{CV}$ . A partir des situations optimale et économique, décrites précédemment, la question posée est : la disposition excentrée des cylindres permet-elle une réduction supplémentaire des pertes thermiques? Les figures 4b et c montrent que l'augmentation de l'excentricité de  $e^*/e_p^* = -0.99$  à  $e^*/e_p^* = +0.99$  conduit à une diminution de la puissance de la cellule d'écoulement ( $\psi_{max}$  diminue) pour un gap d'épaisseur  $e_a^*_{CV} = 0.84$ . Cependant, le gain en quantité de chaleur ne dépasse pas 1.5% par rapport au cas de cylindres coaxiaux ( $e^*=0$ ). Pour le gap d'épaisseur  $e_a^*_{opt} = 0.52$ , le déplacement du cylindre extérieur engendre plutôt une augmentation du transfert de chaleur à cause de la prédominance de la conduction thermique [3-7].

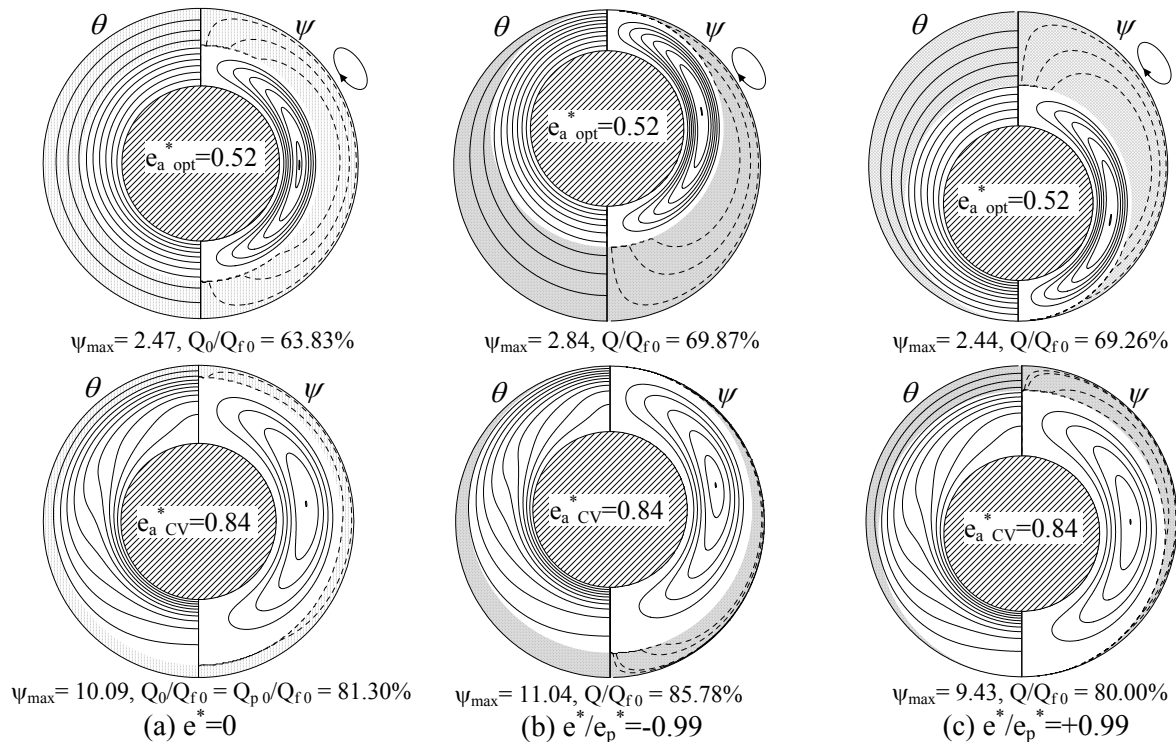


Figure 4 : Lignes de courant et isothermes dans un espace annulaire excentré et partiellement poreux (—  $\psi, \theta$  - - - -  $\psi \approx 0$ ,  $Ra = 10^4$ ,  $R_c = 1.5$ ,  $Da = 10^{-8}$ ).

La figure 5a confirme ces résultats. Pour une isolation optimale ( $e_a^*, Q_0$ )<sub>opt</sub> ou conçue avec une couche d'air plus mince ( $e_a^* = 0.27$ ), l'excentricité, quelle que soit sa valeur, induit une augmentation du rapport de flux de chaleur total  $Q/Q_{f0}$ . Par contre, l'isolation économique limite ( $e_a^*, Q_{p0}$ )<sub>CV</sub>, obtenue en régime de convection thermique, subit une légère amélioration par le déplacement du cylindre extérieur vers le haut ( $e^* > 0$ ) jusqu'à l'interface poreux-air. La cellule d'écoulement dans la région fluide perd de son intensité, en la déplaçant vers le bas. Dans ce cas, la diminution du transfert de chaleur par convection thermique n'est pas compensée par l'augmentation du transfert de chaleur par conduction thermique. Le même résultat est obtenu avec un gap plus épais ( $e_a^* = 0.9$ ). La courbe du cas purement fluide est aussi représentée, comme référence, sur la figure 5a. Un régime d'écoulement bicellulaire (4 cellules) apparaît lorsque l'excentricité est comprise entre -0.42 et -0.22.

Cette étude est terminée par l'analyse de l'influence de la perméabilité ( $Da$ ) du milieu poreux. La figure 5b montre que pour un gap épais ( $e_a^* = 0.9$ ), le point correspondant à un minimum de quantité de chaleur échangée passe d'une position d'excentricité positive  $e^*/(1-e_a^*) = +0.99$  aux faibles perméabilités ( $Da = 10^{-8}$ ) à une position d'excentricité négative  $e^*/(1-e_a^*) = -0.99$  aux grandes perméabilités ( $Da = 10^{-2}$ ). En augmentant  $Da$ , l'air pénètre plus

facilement dans la couche poreuse. Le déplacement du cylindre extérieur vers le bas ( $e^* < 0$ ) étouffe la cellule d'écoulement et réduit ainsi les pertes de chaleur aux grandes perméabilités [2-4]. Enfin, il est important de noter que la qualité de l'isolation thermique est améliorée par une réduction de 2% des déperditions de chaleur en plaçant, entre deux cylindres excentrés d'une distance  $e^* = 0.1$ , un bon isolant thermique d'épaisseur moyenne  $e_p^* = 0.1$ , de rapport de conductivités  $R_c = 1.5$  et de perméabilité correspondante à  $Da \leq 10^{-5}$ .

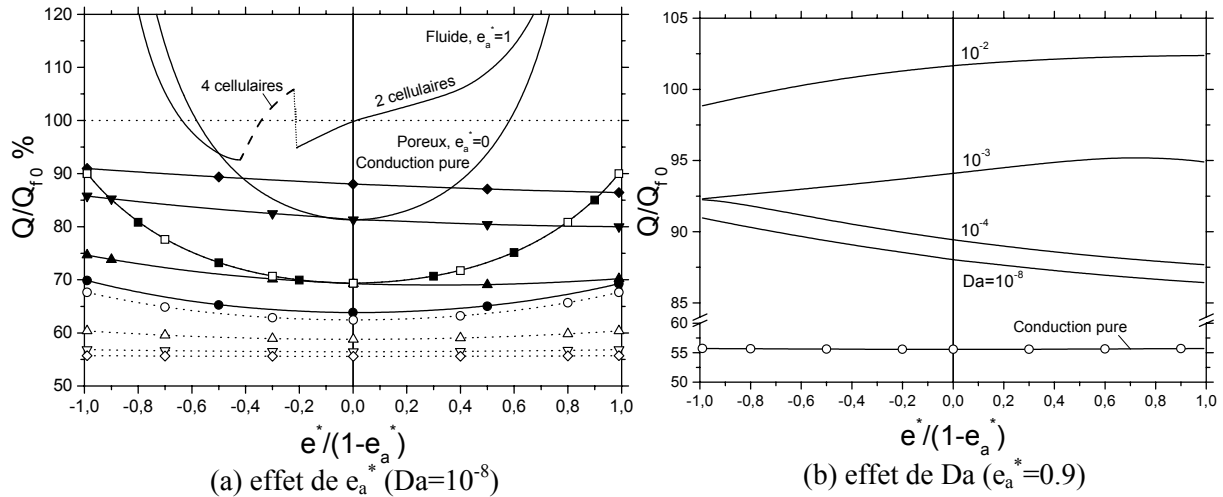


Figure 5 : Evolution de  $Q/Q_{f0}$  en fonction  $e^*/e_p^*$  ( $Ra = 10^4$ ,  $R_c = 1.5$ ).

$Ra=10^4$  —■—  $e_a^*=0.27$  —●—  $e_{a,opt}^*=0.52$  —▲—  $e_a^*=0.7$  —▼—  $e_{a,cv}^*=0.84$  —◆—  $e_a^*=0.9$   
 $Ra=0$  ...□...  $e_a^*=0.27$  ...○...  $e_{a,opt}^*=0.52$  ...△...  $e_a^*=0.7$  ...▽...  $e_{a,cv}^*=0.84$  ...◇...  $e_a^*=0.9$

## 4. Conclusion

La convection naturelle entre deux cylindres horizontaux et excentrés est étudiée numériquement par une approche en volumes finis. Le remplissage partiel de l'espace annulaire concentrique par un matériau poreux isolant constitue un moyen d'améliorer la qualité de l'isolation thermique. Le déplacement du cylindre extérieur vers le haut réduit légèrement la quantité de chaleur échangée entre les parois de confinement à travers une couche d'air épaisse ( $e_a^* \geq 0.7$ ) et une couche poreuse ayant les propriétés suivantes :  $R_c=1.5$  et  $Da \leq 10^{-5}$ , dans le cas d'un nombre de Rayleigh  $Ra = 10^4$ .

## Références

- [1] T. H. Kuehn and R. J. Goldstein, An experimental study of natural convection heat transfer in concentric and eccentric horizontal cylindrical annuli, *J. Heat Transfer*, 100 (1978), 635-640.
- [2] H. H. Bau, G. Mcblane and I. Saferstein, Numerical simulation of thermal convection in an eccentric annulus containing saturated porous media, *ASME 83-WA/HT-34* (1983).
- [3] H. H. Bau, Low Rayleigh number thermal convection in a saturated porous medium bounded by two horizontal eccentric cylinders, *J. Heat transfer*, 106 (1984), 166-175.
- [4] H. H. Bau, Thermal convection in a horizontal eccentric annulus containing saturated porous medium – an extended perturbation expansion, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 27 (1984), 2277-2287.
- [5] K. Himasekhar and H. H. Bau, Large Rayleigh number convection in a horizontal, eccentric annulus containing saturated porous media, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 29 (1986), 703-712.
- [6] J. P. B. Mota and E. Saadtjan, On the reduction of natural convection heat transfer in horizontal eccentric annuli containing saturated porous media, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 7 (1997), 401-416.
- [7] J. P. B. Mota, I. A. A. C. Esteves, C. A. M. Portugal J. M. S. S. Esperança and E. Saadtjan, Natural convection heat transfer in horizontal eccentric elliptic annuli containing saturated porous media, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 43 (2000), 4367-4379.
- [8] S.V. Patankar, Numerical heat transfer and fluid flow, *McGrawHill, Hemisphere*, W, D.C, (1980).