

# Séparation des constituants d'un mélange binaire saturant une cavité poreuse horizontale soumise à des vibrations verticales

Bilal ELHAJJAR<sup>1</sup>, Abdelkader MOJTABI<sup>1</sup>, Marie-Catherine Charrier-MOJTABI<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>IMFT, UMR CNRS/INP/UPS N°5502, UFR MIG, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062, Toulouse Cedex, France

<sup>2</sup>PHASE, EA 810, UFR PCA, Université Paul Sabatier, 118 route de Narbonne, 31062, Toulouse Cedex, France.

\*(auteur correspondant : [cmojtabi@cict.fr](mailto:cmojtabi@cict.fr))

**Résumé-** On présente une nouvelle méthodologie pour la séparation des espèces d'un mélange binaire en utilisant le couplage entre la convection et la thermodiffusion appelé thermogravitation. On étudie pour cela la thermogravitation dans une couche poreuse horizontale, de grande extension, saturée par un fluide binaire en présence de l'effet Soret, et soumise à des vibrations harmoniques verticales. Les parois horizontales sont imperméables à la matière et maintenues à des températures constantes et différentes.

## Nomenclature

$A$	rapport de forme	$K$	perméabilité du milieu poreux, $m^2$
$a$	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$	$T$	température, $K$
$C$	fraction massique	<i>Symboles grecs</i>	
$c$	capacité calorifique massique, $J.Kg^{-1}.K^{-1}$	$\beta_T$	coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$
$D$	Coefficient de diffusion massique, $m^2.s^{-1}$	$\beta_C$	coefficient d'expansion massique
$D_T$	Coefficient de thermodiffusion, $m^2.s^{-1}.K^{-1}$	$\lambda$	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$

## 1. Introduction

Le problème concerne l'étude de l'interaction entre les deux phénomènes physiques suivants : la convection thermosolutale et la convection thermo-vibrationnelle en milieu poreux. Le phénomène de la double-diffusion dans un milieu poreux dû aux gradients de température et de concentration a été largement étudié en raison de ses nombreuses applications fondamentales et industrielles. Un bilan des recherches récentes dans ce domaine a été fait par Nield et Bejan [1]. L'effet Soret ne peut pas être négligé dans beaucoup de processus physiques. Dans ces conditions le flux de masse est induit non seulement par le gradient de concentration mais également par le gradient de température [2].

Gershuni et al. [3], [4], ont étudié la stabilité de la solution d'équilibre mécanique d'une couche horizontale d'un fluide binaire avec effet Soret en présence de vibrations de hautes fréquences. L'axe des vibrations est longitudinal [3] ou transversal [4]. Dans le dernier cas, ils ont montré que les vibrations ont un effet stabilisant.

Concernant la séparation des constituants d'un mélange binaire par thermogravitation, ce sont Furry, Jones et Onsager qui les premiers ont développé en 1939 [5] la théorie de la thermodiffusion pour interpréter les processus expérimentaux de séparation d'isotopes. Ils ont utilisé pour cela une cavité parallélépipédique verticale de grand rapport d'aspect,

différentiellement chauffée sur deux parois verticales. Ensuite plusieurs auteurs ont essayé d'améliorer ce dispositif pour augmenter la séparation. Emery et Lorenz ont proposé d'introduire un milieu poreux dans la cavité [6], Platten et al. [7] ont proposé d'incliner la cavité d'un certain angle par rapport à la verticale pour augmenter la séparation. Elhajjar et al. [8] ont proposé d'utiliser une cavité horizontale avec des gradients thermiques imposés sur les parois horizontales pour disposer de deux paramètres physiques indépendants qui permettent de mieux contrôler la séparation.

Cette étude porte sur la convection thermovibrationnelle dans une couche poreuse horizontale, saturée par un fluide binaire, avec prise en compte de l'effet Soret, et soumise à des vibrations verticales. Nous considérons le cas des vibrations de hautes fréquences et de faibles amplitudes ce qui nous permet de recourir à la formulation des équations moyennées. Les résultats de la stabilité linéaire de la solution d'équilibre mécanique sont confrontés aux résultats de simulations numériques directes. On trouve qualitativement les résultats connus en milieu fluide. On montre à partir de l'étude de la stabilité que les vibrations contribuent à séparer les constituants d'un mélange binaire dans la configuration horizontale, tout en favorisant l'écoulement monocellulaire.

## 2. Formulation mathématique

Nous considérons une cavité rectangulaire de rapport d'aspect  $A=L/H$ , où  $H$  est la hauteur de la cavité et  $L$  sa largeur. Le rapport d'aspect sera supposé infini pour l'analyse de stabilité. La cavité est remplie d'un milieu poreux saturé par un fluide binaire pour lequel l'effet de Soret est pris en compte. Les parois horizontales imperméables sont maintenues à des températures constantes et différentes,  $T_1$  pour  $z=0$  et  $T_2$  pour  $z=H$  avec  $T_1 > T_2$  ou  $T_1 < T_2$ . Les parois verticales ( $x=0$ ,  $x=L$ ) sont imperméables et adiabatiques. Toutes les parois sont supposées rigides. La cavité est soumise à des oscillations d'amplitude  $b$  et de pulsation  $\omega$ , dans la direction verticale. Pour les équations modélisant le problème, nous adoptons le modèle de Darcy dans lequel le terme temporel est pris en compte, et l'approximation de Boussinesq est utilisée. Les propriétés thermo-physiques du fluide sont constantes sauf pour la masse volumique dans le terme de gravité qui varie linéairement avec la température et la fraction massique.

$$\rho = \rho_{ref} (1 - \beta_T (T - T_{ref}) - \beta_c (C - C_{ref})) \quad (1)$$

Avec  $T$  la température et  $C$  la fraction massique du constituant le plus lourd. En étudiant le système dans le repère lié à la cavité, l'accélération de la pesanteur  $\vec{g}$  est remplacée par :  $\vec{g} + b\omega^2 \sin(\omega t) \vec{k}$ , avec  $\vec{k}$  est le vecteur unitaire de l'axe vertical et  $t$  le temps.

Les équations adimensionnelles de conservation, de masse, de quantité de mouvement, d'énergie, et d'espèces chimiques en présence de l'effet Soret sont données par :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V} &= 0 \\ B \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} &= -\vec{\nabla} P + Ra(T + \Psi C)(1 - R \sin(\omega t)) \vec{k} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T &= \nabla^2 T \\ \varepsilon^* \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} C &= \frac{1}{Le} (\nabla^2 C - \nabla^2 T) \end{aligned} \quad (2)$$

Avec  $B=(Da(\rho c)_f)/((\rho c^*)\varepsilon Pr^*)$ ,  $R=b\omega^2/g$  et  $Da=K/H^2$  le nombre de Darcy. Les grandeurs de référence sont  $H$  pour la longueur,  $H^2/(\lambda^*/(\rho c)^*)$  pour le temps ( $\lambda^*$  et  $(\rho c)^*$  sont respectivement la conductivité thermique effective et la capacité calorifique volumique du milieu poreux),  $a/H$  pour la vitesse avec  $a=\lambda^*/(\rho c)_f$  ( $a$  est la diffusivité thermique effective),  $\Delta T=T_1-T_2$  pour la température et  $\Delta C=-\Delta T C_i/(1-C_i)D_T/D^*$  pour la fraction massique où  $C_i$  est la fraction massique initiale.

Les conditions aux limites adimensionnelles sont :

$$\begin{aligned} T = 1 \text{ pour } z = 0 ; T = 0 \text{ pour } z = 1; \vec{\nabla} C \cdot \vec{n} = \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} \text{ pour } z = 0,1 \\ \partial T / \partial x = \partial C / \partial x = 0 \text{ pour } x = 0, A \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{n} = 0 \forall M \in \partial \Omega \end{aligned} \quad (3)$$

Le problème considéré dépend de huit paramètres adimensionnels: le nombre de Rayleigh thermique,  $Ra=(Kg\beta_T H \Delta T(\rho c)_f)/(\lambda^* \nu)$ , le nombre de Rayleigh vibrationnel  $Rav=RaR$ , le facteur de séparation  $\Psi=(-\beta_T/\beta_C)(D_T/D^*)C_i(1-C_i)$ , le nombre de Lewis  $Le=a/D^*$ , la porosité normalisée  $\varepsilon^*=\varepsilon(\rho c)_f/(\rho c)^*$  (où  $\varepsilon$  est la porosité), la pulsation adimensionnelle  $\omega$ , le rapport de forme  $A$  et le rapport  $B$ .

Dans l'équation de conservation de quantité de mouvement le terme  $B\partial\vec{\nabla}/\partial t$  est normalement négligé puisque  $B$  est de l'ordre de  $10^{-6}$ . Mais dans notre problème les vibrations de hautes fréquences conduisent à des accélérations élevées et donc il n'est plus permis de négliger le terme instationnaire.

### 3. Formalisme des équations moyennées

Dans le cas des vibrations de hautes fréquences et de faibles amplitudes, la méthode dite des équations moyennées peut être utilisée [7]. Toutes les grandeurs physiques du problème sont écrites sous la forme d'une somme de deux termes. Un terme à variation lente et un terme à variation rapide.

$$\vec{V} = \vec{V}^*(t) + \vec{u}'(\omega t) ; P = P^*(t) + p'(\omega t) ; T = T^*(t) + \theta'(\omega t) ; C = C^*(t) + c'(\omega t) \quad (4)$$

Ici  $\vec{V}^*$ ,  $P^*$ ,  $T^*$ ,  $C^*$  sont les champs moyens (c'est-à-dire les valeurs moyennes des champs calculés sur la période  $\tau=2\pi/\omega$ ). Le découplage entre les parties à évolution rapide de la vitesse et de la pression est obtenu en utilisant la décomposition d'Helmholtz de  $T^*\vec{k}$  et  $C^*\vec{k}$  :  $T^*\vec{k} = \vec{W}_T + \vec{\nabla}\xi_T$  ;  $C^*\vec{k} = \vec{W}_c + \vec{\nabla}\xi_c$  où  $\vec{W}_T$  et  $\vec{W}_c$  sont les parties solénoïdales des champs de température et de concentration moyennés satisfaisant  $\vec{\nabla} \cdot \vec{W}_T = \vec{\nabla} \cdot \vec{W}_c = 0$ .

Donc les équations pour l'écoulement moyen sont:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{V}^* &= 0 \\ B \frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t} + \vec{V}^* &= -\vec{\nabla} P^* + Ra(T^* + \Psi C^*)\vec{k} + R_v(\vec{W}_T + \Psi \vec{W}_c) \cdot \vec{\nabla} (T^* + \frac{\Psi}{\varepsilon^*} C^*) \vec{k} \\ \frac{\partial T^*}{\partial t} + \vec{V}^* \cdot \vec{\nabla} T^* &= \Delta T^* \\ \varepsilon^* \frac{\partial C^*}{\partial t} + \vec{V}^* \cdot \vec{\nabla} C^* &= \frac{1}{Le} (\Delta C^* - \Delta T^*) \\ T^*\vec{k} &= \vec{W}_T + \vec{\nabla}\xi_T ; \vec{\nabla} \cdot \vec{W}_T = 0 \\ C^*\vec{k} &= \vec{W}_c + \vec{\nabla}\xi_c ; \vec{\nabla} \cdot \vec{W}_c = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

En plus des conditions aux limites (3) appliquées aux champs moyens on a :  
 $\vec{W}_T \cdot \vec{n} = \vec{W}_c \cdot \vec{n} = 0$  sur  $\partial\Omega$

Le nombre adimensionnel  $Rv = (Ra_v^2 B) / (2(B^2 \omega^2 + 1))$  caractérise l'intensité des vibrations.

#### 4. Stabilité linéaire de la solution de double diffusion pure

On démontre que si l'axe des vibrations est vertical, il existe une solution d'équilibre mécanique caractérisée par :

$$\vec{V}_0^* = \vec{0} ; T_0^* = 1 - z ; C_0^* = cst - z ; \vec{W}_{T0} = \vec{0} ; \vec{W}_{c0} = \vec{0} \quad (6)$$

Pour étudier la stabilité de cette solution d'équilibre, on introduit la perturbation de la fonction de courant  $\varphi$ , les perturbations de la température  $\theta$  et de la concentration  $c$ , les perturbations des fonctions du courant  $\varphi_\theta$  et  $\varphi_c$  associées respectivement à  $\vec{W}_T$  et  $\vec{W}_c$ . Pour simplifier la prise en compte des conditions aux limites de température et de concentration en  $z=0,1$ , on introduit deux nouvelles fonctions :  $\eta = c - \theta$  et  $\varphi_\eta = \varphi_c - \varphi_\theta$ . Les équations de la stabilité linéaire sont résolues par la méthode de Galerkin à l'ordre 4. Les perturbations sont développées comme suit :

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{i=1}^N a_i \sin(i\pi z) \exp(\sigma t + Ikx) ; \theta = \sum_{i=1}^N b_i \sin(i\pi z) \exp(\sigma t + Ikx) ; \eta = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \cos(i\pi z) \exp(\sigma t + Ikx) \\ \varphi_\theta &= \sum_{i=1}^N d_i \sin(i\pi z) \exp(\sigma t + Ikx) ; \varphi_\eta = \sum_{i=1}^N g_i \sin(i\pi z) \exp(\sigma t + Ikx) \end{aligned} \quad (7)$$

avec  $k$  le nombre d'onde dans la direction horizontale  $ox$  et  $l^2 = -1$ .

Nous avons obtenu et comparé les valeurs critiques conduisant aux régimes conductifs stationnaires et instationnaires. Nous présentons principalement dans cette étude les valeurs des nombres d'ondes critiques  $k_{cs}$  et des Rayleigh critiques  $Ra_{cs}$  stationnaires. L'état marginal dans ce cas est obtenu pour  $\sigma=0$ . Le facteur  $B$  est fixé à  $10^{-6}$ . Pour différentes valeurs des paramètres,  $0 \leq Rv \leq 100$ ,  $2 \leq Le \leq 100$  et  $\varepsilon^* = 0.5, 0.7$ , on détermine les diagrammes de stabilité,  $Ra_{cs} = f(\Psi)$  et  $k_{cs} = f(\Psi)$ . Les résultats sont illustrés sur les figures 1.1 et 1.2, pour le cas  $Le=10$ ,  $\varepsilon^*=0.5$  et  $Rv=0, 10, 20$ . Pour une couche chauffée par le bas, on peut noter que  $Ra_{cs}$  augmente avec  $Rv$  alors que  $k_{cs}$  diminue avec  $Rv$ . Pour  $\Psi < 0$ , toutes les courbes ont comme asymptote la droite  $\Psi = -1/(Le+1)$  comme pour le cas  $Rv=0$  [2]. Pour  $\Psi > 0$ , quand  $Rv$  augmente, la valeur  $\Psi_l$  du facteur de séparation à partir de laquelle le nombre d'onde critique tend vers zéro (c'est-à-dire  $k_{cs}=0$ ), diminue. En utilisant une méthode de perturbation avec le nombre d'onde comme paramètre de développement dans le cas des perturbations de grande longueur d'onde (c'est-à-dire  $k=0$ ), on démontre que, pour  $\Psi > \Psi_l$ ,  $Ra_{cs} = 12/(Le\Psi)$ ,  $\forall Rv$ . Pour une couche chauffée par le haut, et pour  $\Psi < 0$ , la première bifurcation primaire est stationnaire et les paramètres critiques sont :  $Ra_{cs} = 12/(Le\Psi)$  et  $k_{cs}=0$ ,  $\forall Rv$ . Pour  $\Psi > 0$ , la solution d'équilibre est infiniment linéairement stable.

En conclusion les vibrations verticales stabilisent les mouvements convectifs alors qu'ils n'ont aucun effet lorsque l'écoulement correspond à un mode de grande longueur d'onde : c'est-à-dire pour  $k_{cs}=0$ . A partir d'une certaine valeur de  $\Psi$  l'écoulement devient monocellulaire donc dans ce cas cette configuration permet de séparer les espèces chimiques. Cette valeur de  $\Psi$  diminue quand  $Rv$  augmente, donc les vibrations peuvent être utilisées pour augmenter la gamme des valeurs de  $\Psi$  pour lesquelles on peut séparer.

## 5. Simulation numérique 2D de l'écoulement de convection thermo-soluto-vibrationnelle

Les équations moyennées (5) avec les conditions aux limites associées sont résolues par une méthode spectrale de collocation et par un code d'éléments finis. Pour le code spectral, le schéma temporel est un schéma du second ordre d'Adams-Bashforth-Euler backward [9]. L'influence de  $Le$ ,  $\varepsilon^*$ ,  $\Psi$ , et  $Rv$  ( $B$  est fixé à  $10^{-6}$ ), a été étudiée pour une cellule de rapport d'aspect  $A=10$ . En effet on a vérifié que les valeurs numériques des paramètres critiques obtenues pour une cellule de rapport d'aspect  $A=10$  diffèrent peu de celles obtenues pour une cellule d'extension infinie. La résolution spatiale est de  $63 \times 27$  points de collocation le long des axes horizontal et vertical respectivement.

Les résultats de la stabilité donnent  $Ra_{cs}=12.95$  et  $k_{cs}=1.94$  pour  $Rv=0$  et  $Ra_{cs}=15.04$  et  $k_{cs}=0.01$  pour  $Rv=20$  dans une cellule infinie. Par le code spectral pour  $A=10$  et  $Rv=0$ , on trouve  $Ra_{cnum}=13$  et 6 cellules convectives, ce qui est en bon accord avec  $k_{cs}=1.94$ . Pour  $A=10$  et  $Rv=20$ , on trouve  $Ra_{cnum}=15.7$  et un écoulement monocellulaire, ce qui est en accord avec  $k_{cs}=0.01$ .

Pour illustrer l'importance de l'action des vibrations sur l'écoulement nous présentons sur la figure (2) les résultats obtenus par le code d'éléments finis pour  $Le=10$ ,  $\varepsilon^*=0.5$ ,  $\Psi=0.4$  et  $Ra=12.5$ . On présente sur cette figure les lignes de courant et les isoconcentrations avec et sans vibrations, c'est-à-dire pour  $Rv=0$  et  $Rv=10$ . Pour  $Rv=0$  c'est-à-dire sans vibrations l'écoulement est formé de 5 cellules convectives, et on a une distorsion des isoconcentrations et dans ce cas on ne peut pas séparer les constituants du mélange. Pour  $Rv=10$  on observe un écoulement monocellulaire, donc dans ce cas par thermodiffusion le constituant le plus lourd du mélange se dirige vers la paroi froide du haut et l'autre constituant se dirige vers la paroi chaude du bas puis l'écoulement monocellulaire entraîne l'un des constituants du mélange vers la partie droite de la cavité et l'autre constituant vers la partie gauche. Ceci se traduit par une concentration élevée de l'un des constituants dans la partie gauche de la cellule et une concentration élevée de l'autre constituant dans la partie droite, ce qui conduit à une stratification quasi-horizontale du champ de concentration.

## 6. Conclusion

Des approches analytiques et numériques utilisant la formulation des équations moyennées ont été mises en œuvre pour analyser l'influence des vibrations de hautes fréquences et de faibles amplitudes sur le déclenchement de la convection avec prise en compte de l'effet Soret, dans une cellule poreuse horizontale d'extension infinie, saturée par un fluide binaire. L'étude de stabilité linéaire de la solution d'équilibre mécanique, obtenue pour des vibrations verticales, a montré que les vibrations verticales de hautes fréquences stabilisent la solution de double diffusion pure. Ces vibrations permettent d'obtenir pour une large gamme de valeurs de  $\Psi > 0$  un écoulement monocellulaire. Cette configuration assure donc la séparation des constituants du mélange binaire. Des simulations numériques directes 2D ont confirmé les résultats théoriques de stabilité linéaire.

## Références

- [1] A.A. Nield and A. Bejan, *Convection in porous media*, Springer Verlag, New-York, 1998.
- [2] O. Sovran, M.C. Charrier-Mojtabi and A. Mojtabi, Naissance de la convection thermo-solutale en couche poreuse infinie avec effet Soret, *C.R.A.S.*, série II b, N°4 (2001), 287-293.

- [3] G.Z. Gershuni, A.K. Kolesnikov, J.C. Legros and B.I. Myznikova, On the vibrational convective instability of a horizontal binary mixture layer with Soret effect, *J. Fluid Mech.*, vol 330 (1997), 251-269.
- [4] G.Z. Gershuni, A.K. Kolesnikov, J.C. Legros. and B.I. Myznikova, On the convective instability of a horizontal binary mixture layer with Soret effect under transversal high frequency vibration, *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol. 42 (1999), 547-553.
- [5] W.H. Furry, R.C. Jones, L. Onsager, On the theory of isotope separation by thermal diffusion, *Phys. Rev.*, 55 (1939), 1083–1095.
- [6] A.H. Emery, M. Lorenz, Thermal diffusion in packed column, *Amer. Inst. Chem. Engrg.*, J. 9 (1963), 661–663.
- [7] J.K. Platten, M.M. Bou-Ali and J.F. Dutrieux, Enhanced molecular separation in inclined thermogravitational columns, *J. Phys. Chem.*, B 107 (2003), 11763–11767.
- [8] B. Elhajjar, A. Mojtabi, M. Marcoux et M. C. Charrier-Mojtabi, Étude de la thermogravitation dans une couche fluide horizontale, *Comptes Rendus Mécanique*, Volume 334, Issue 10 (2006), 621-627.
- [9] M. Azaïez, C. Bernardi and M. Grudmann, Spectral method applied to porous media, *East-West J. Numer. Math.*, vol. 2 (1994), 91-205.

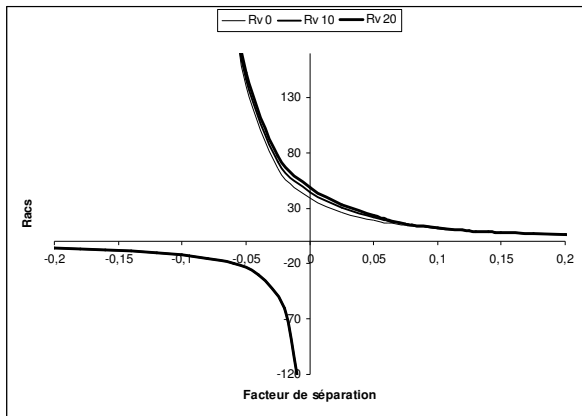


Figure 1.1 :  $Ra_{cs}=f(\Psi)$ ,  $Le=10$ ,  $\epsilon^* = 0.5$

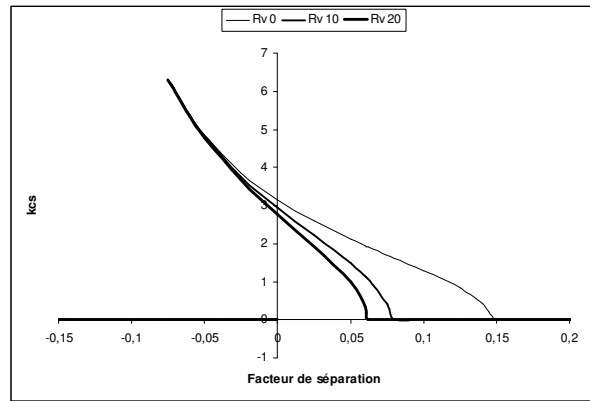


Figure 1.2 :  $k_{cs}=f(\Psi)$ ,  $Le=10$ ,  $\epsilon^* = 0.5$

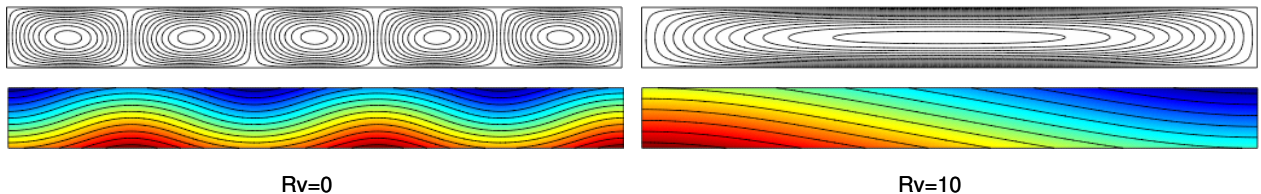


Figure 2 : Lignes de courant et isoconcentrations pour  $Le=10$ ,  $\epsilon^* = 0.5$ ,  $\Psi=0.1$  et  $Ra=12.5$