

# Simulation d'un microprocesseur par couplage de modèles réduits modaux

Pierre-Olivier LAFFAY<sup>1\*</sup>, Olivier QUEMENER<sup>1</sup>, Alain NEVEU<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry (LMEE)

40, Rue du Pelvoux – 91020 Evry Cedex

\* (auteur correspondant : [laffay@crans.org](mailto:laffay@crans.org))

**Résumé** - Cette étude présente une méthode de couplage de modèles réduits modaux pour un problème de diffusion thermique linéaire. La méthode développée présente l'avantage d'être entièrement dans le domaine modal, le retour à l'espace physique dans les calculs intermédiaires n'est donc pas nécessaire. L'application considérée est un microprocesseur refroidi par un radiateur et un ventilateur à vitesse variable. Des gains de temps importants sont obtenus, pour un écart tout à fait acceptable.

## Nomenclature

$c$	capacité thermique, $J.m^{-3}.K^{-1}$	$S$	matrice de terme source, $W$
$k$	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$	$C_{cd}$	matrice de couplage, $W.K^{-1}$
$P_{vol}$	puissance volumique, $W.m^{-3}$	$T$	vecteur-matrice des températures, $K$
$T$	température, $^{\circ}C$	$L$	matrice de capacité modale, $J.K$
$N$	dimension du modèle complet	$M$	matrice de transfert modale, $W.K$
$\tilde{N}$	dimension du modèle réduit	$N$	vecteur-matrice des sollicitations, $W.K$
$V$	mode propre	$V$	matrice des modes, $K$
$n$	normale extérieure	$X$	vecteur-matrice des états, $K$
$M$	point de l'espace	<i>Symboles grecs</i>	
$R$	résistance de contact, $K.m^{-1}.W^{-1}$	$\Omega$	domaine
$t$	temps, $s$	$\partial\Omega$	bord d'un domaine
$z$	valeur propre d'un mode, $s^{-1}$	$\Gamma$	partie du bord d'un domaine
$\Delta$	opérateur de Laplace, $m^{-2}$	$\zeta$	condition de Steklov, $kg.s^{-2}.K^{-1}$
$\nabla$	vecteur de l'opérateur nabla, $m^{-1}$	$\varepsilon$	écart entre modèles, $K$
$x$	état d'excitation d'un mode	<i>Indices et exposants</i>	
$C$	matrice de capacité, $J.K^{-1}$	$j$	numéro de domaine
$A$	matrice de conductivité, $W.K^{-1}$	$i$	numéro d'un mode
$H$	matrice de convection, $W.K^{-1}$		

## 1. Introduction

L'optimisation de paramètres de systèmes thermiques complexes nécessite un grand nombre de simulations. Les méthodes de réduction de modèles, telles que la méthode nodale, l'analyse modale (identification modale [1], Proper Orthogonal Decomposition, ...), permettent de réduire le temps nécessaire à la simulation tout en conservant autant que possible la précision des calculs. En parallèle, la décomposition de domaine tend à s'imposer de plus en plus dans le cadre de simulations de gros ensemble industriels (moteurs, turboréacteurs...) que ce soit pour un problème de taille des maillages ou pour l'introduction de phénomènes de contact. L'objectif de cette étude est ainsi d'étudier le couplage de modèles réduits modaux afin de généraliser cette technique de réduction à des problèmes physiques nécessitant un découpage en sous domaines.

## 2. Système étudié et méthodologie

### 2.1. Description du problème physique

On considère un composant électronique de type microprocesseur en géométrie 2D. Ces composants ont la particularité de présenter une très forte production d'énergie volumique, au point que la résistance de contact entre le radiateur et le composant fait apparaître des sauts non négligeables de température. On se propose de simuler l'évolution thermique en considérant deux corps, l'un étant le composant (silicium, époxy et support en cuivre), l'autre étant le radiateur, couplés par une résistance de contact  $R_c = 40000 \text{K.m}^{-1}.\text{W}^{-1}$  ([2]) :

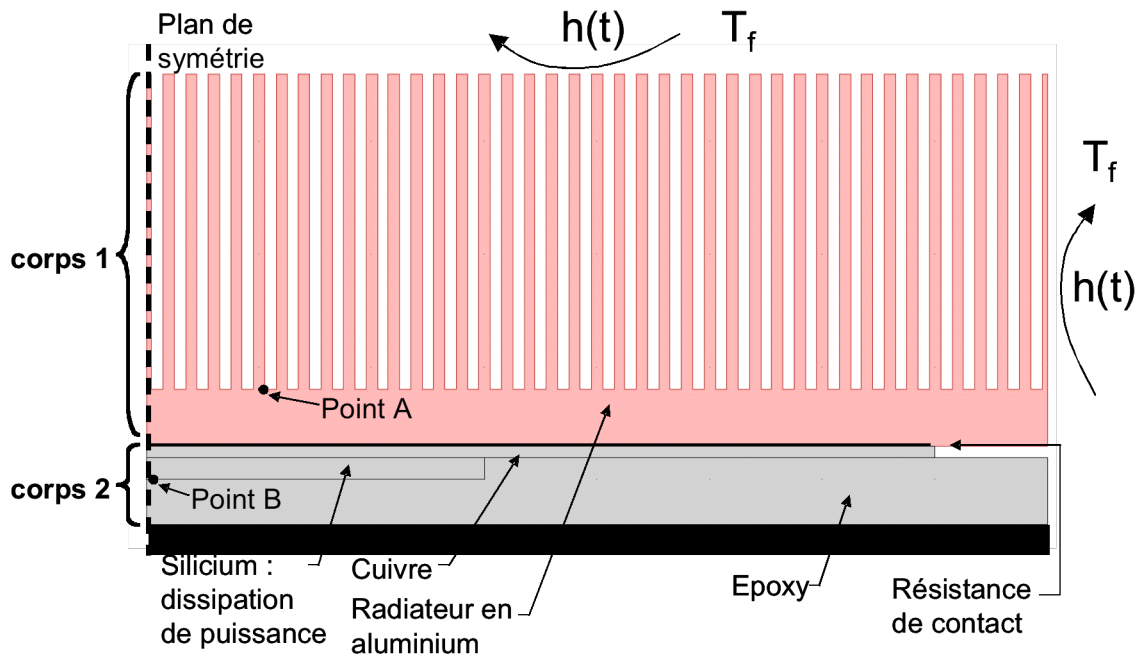


Figure 1 : Géométrie du problème

Les caractéristiques des matériaux sont les suivantes :

	$k$ $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$c$ $\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$
Epoxy	0,035	1848000
Silicium	145	1514500
Cuivre	380	3363000
Aluminium	216	2340000

Tableau 1 : caractéristiques des matériaux

Il y a production d'énergie volumique dans le silicium suivant un échelon de valeur  $P_{vol} = 3,4.10^7 \text{W.m}^{-3}$ . La production d'énergie est nulle dans les autres matériaux.

L'évolution thermique est contrôlée par un ventilateur possédant deux vitesses de rotation, le contrôle de la vitesse s'effectue par la température au point A (figure 1). L'évolution du coefficient d'échange suit donc un hystérésis (figure 2). L'air est à une température  $T_f = 20^\circ\text{C}$ .

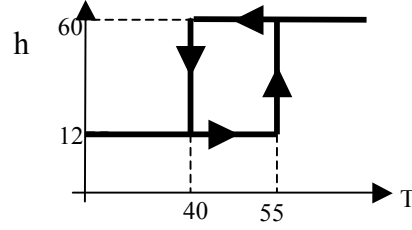


Figure 2 : Loi de contrôle du ventilateur

Le problème physique est donc le suivant :

$$j \in \{1,2\} \quad \forall M \in \Omega_j \quad c_j(M) \cdot \frac{\partial T_j(M,t)}{\partial t} = k_j(M) \Delta T_j(M,t) + P_{vol}(M) \quad (1)$$

$$\forall M \in \Gamma_0 \quad \nabla T_1(M,t) \cdot \mathbf{n}_1 = 0 \quad (2)$$

$$\forall M \in \Gamma_1 \quad -k_1(M) \cdot \nabla T_1(M,t) \cdot \mathbf{n}_1 = k_2(M) \cdot \nabla T_2(M,t) \cdot \mathbf{n}_2 = \frac{T_1(M,t) - T_2(M,t)}{R_c} \quad (3)$$

$$\forall M \in \Gamma_2 \quad k_2(M) \cdot \nabla T_2(M,t) \cdot \mathbf{n}_2 = h(T,t) \cdot (T_2(M,t) - T_f) \quad (4)$$

$$j \in \{1,2\} \quad \forall M \in \Omega_j \quad T_j(M,0) = T_{0,j}(M) \quad (5)$$

L'équation 3 traduit la continuité du flux d'une part, et la modélisation du contact par une résistance thermique de contact linéaire d'autre part.

## 2.2. Obtention et réduction du modèle modal

Les modèles réduits (un par corps) sont basés sur l'utilisation de modes de branche. Pour cela on associe au problème physique, un problème modal dit de branche qui s'écrit :

$$j \in \{1,2\} \quad \forall M \in \Omega_j \quad k_j(M) \Delta V_{ji}(M) = z_{ji} c_j(M) V_{ji}(M) \quad (6)$$

$$j \in \{1,2\} \quad \forall M \in \partial \Omega_j \quad k_j \nabla V_{ji}(M) \cdot \mathbf{n}_j = -\zeta_j z_{ji} V_{ji}(M) \quad (7)$$

Il s'agit d'un problème aux valeurs propres dans lequel  $z_i$  est la valeur propre du champ propre  $V_i$ . La résolution du problème discrétisé permet de déterminer  $N$  modes  $\{z_i, V_i\}$ . La condition aux limites (équation 7) est une condition abstraite dite de Steklov qui fait intervenir la valeur propre du mode. Les nombres de Steklov  $\zeta_j$  assurent l'homogénéité dimensionnelle de la condition aux limites (équation 7) et permettent d'éviter la dégénérescence du problème modal de branche, c'est-à-dire de donner une importance comparable aux équations 6 et 7. L'équilibre numérique entre les équations 6 et 7 permet de déterminer  $\zeta_1 = 6400 \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $\zeta_2 = 795 \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . On se référera à [3] pour avoir le détail des explications qui justifient ce choix.

La base des modes de branche est capable de décomposer tous les champs de température du problème considéré, et ce quelles que soient l'instantanéité des paramètres aux frontières. On pourrait par ailleurs traiter avec cette même base des non-linéarités internes. L'intérêt de cette méthode réside dans le fait qu'un certain nombre de modes possèdent une influence négligeable dans la reconstruction du champ de température. Un modèle réduit est obtenu en les éliminant. Ainsi nous pouvons écrire :

$$\forall j \in \{1,2\} \quad T_j(M,t) = \sum_{i=1}^N x_{ji}(t) \cdot V_{ji}(M) \cong \sum_{i=1}^{\tilde{N} \ll N} x_{ji}(t) \cdot V_{ji}(M) \quad (8)$$

Les coefficients  $x_{ji}$  de cette décomposition sont les états d'excitation des modes. Il est possible d'écrire une équation sur les états en remplaçant la température par sa décomposition modale (voir équation 8) dans le problème physique (voir équations 1 à 5). On remplace ainsi le problème sur les températures aux nœuds du maillage de dimension  $N$  par un problème sur les états des modes de dimension  $\tilde{N}$ .

En pratique, nous n'éliminons pas les modes mais nous appliquons une technique d'amalgame modal. Pour cela nous séparons les modes en sous-ensembles distincts et pour chaque sous-ensemble nous formons une combinaison linéaire des modes afin d'obtenir de nouveaux modes amalgamés. Les modes obtenus vérifient toujours des propriétés d'orthogonalité permettant de les utiliser en tant que base de décomposition ([4]).

### 2.3. Couplage des modèles réduits

La formulation faible par éléments finis  $P^1$  du problème physique (eq 1-5) nous donne une formulation matricielle du problème avec interface de contact :

$$\begin{pmatrix} C_1^T K_1 C_1 & 0 \\ 0 & C_2^T K_2 C_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -C_1^T H_1 & 0 \\ 0 & -C_2^T H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{ext} \\ T_{ext} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_{cd1}^T & 0 \\ 0 & C_{cd2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{2 \rightarrow 1} - T_1 \\ T_2 - T_{1 \rightarrow 2} \end{pmatrix} \quad (9)$$

On retrouve dans l'équation 9 les matrices éléments finis classiques de capacité  $C_1$  et  $C_2$ , de conductivité  $K_1$  et  $K_2$ , de convection  $H_1$  et  $H_2$  et de terme source  $S_1$ . A ces matrices s'ajoutent les matrices qui traduisent le couplage par la résistance de contact :  $C_{cd1}$  et  $C_{cd2}$ . Les maillages considérés ne sont pas concordants à l'interface de raccord, ainsi on introduit deux opérateurs de projection entre maillages :  $P_{1 \rightarrow 2}$  et  $P_{2 \rightarrow 1}$  qui permettent d'obtenir  $T_{1 \rightarrow 2}$  et  $T_{2 \rightarrow 1}$  à partir de  $T_1$  et de  $T_2$ . Le vecteur  $T_{ext}$  est en fait  $\underline{1} T_f$  (où  $\underline{1}$  est un vecteur constitué de 1).

En ce qui concerne le couplage des modèles réduits, on choisit les modes de chaque sous domaine comme fonction de forme. Ce qui donne l'équation 10 dans laquelle  $L_1^T V_1 C_1 V_1$ ,  $M_1^T K_1 H_1 V_1$  et  $N_2^T H_2 T_2$

$$\begin{pmatrix} L_1^T M_1 X_1 X_1^T L_1 & 0 \\ 0 & L_2^T M_2 X_2 X_2^T L_2 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -L_1^T H_1 & 0 \\ 0 & -L_2^T H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1^T S_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_1^T C_1 V_1 C_1 P_1 & -V_1^T C_1 P_1 V_2 \\ -V_2^T C_2 P_2 V_1 & V_2^T C_2 P_2 V_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

Le dernier terme matriciel est qualifié de table de couplage puisque lui seul couple les états du corps 1 avec les états du corps 2. Dans la mise en oeuvre, on calcule une fois pour toute ce dernier terme. Le couplage entre les deux modèles est alors effectué dans l'espace modal. Il n'est alors plus nécessaire de revenir à l'espace physique pour effectuer le couplage. Ce point est très important puisqu'il permet de supprimer un grand nombre de calculs intermédiaires. En effet le nombre de pas de temps calculé est beaucoup plus important que le nombre de pas de temps sauvegardés. Ainsi on ne reconstituera les champs de température que pour les pas de temps de sauvegarde.

## 3. Résultats

Les calculs sont effectués sur un code basé sur la méthode des éléments finis  $P^1$  développé par les auteurs écrit en c++. Le code utilise un solveur implicite à pas de temps variable. Les systèmes matriciels sont résolus par gradient conjugué préconditionné par la diagonale pour le cas éléments finis et par décomposition  $LDL^T$  pour le cas modal. La fréquence du processeur est de  $2,4\text{Ghz}$  et la mémoire vive est de  $2\text{Go}$ . Les maillages comportent 3999 nœuds pour le processeur et 6297 nœuds pour le radiateur. La taille du modèle complet  $N$  est donc de 10296. Le calcul des modes de branche prend 277s pour le processeur (3950 modes) et 170s pour le radiateur (1250 modes). L'amalgame modal s'effectue en moins de 3s.

Le tableau 2 présente les écarts maximum et moyen entre modèle complet et modèle réduit ainsi que les temps de calculs, ceci pour différents modèles réduits.

	Modèle réduit à $\tilde{N}$ modes			
	50	75	100	120
$\epsilon_{\max}$ en K	15.13	5.68	5.66	4.46
$\epsilon_{\text{moy}}$ en K	1.7	0.56	0.48	0.32
$t_{\text{CPU}}$ en s	125	212	340	486

Tableau 2 : Comparaison entre modèles réduits et modèle complet

Les écarts maximum et moyen se stabilisent après 120 modes. Il apparaît ainsi que le modèle présentant le meilleur compromis précision par rapport au temps de calcul est le modèle réduit à 120 modes. On passe alors d'un modèle éléments finis (creux au sens des matrices) de dimension 10296 à un modèle modal (plein au sens des matrices) de dimension  $\tilde{N}=120$ . Le gain de temps obtenu a pour valeur 69 puisque le temps de calcul du modèle complet est de 33681s.

L'analyse de ce modèle réduit montre que l'écart moyen sur le point A est de 0,11K et de 0,12K pour le point B. L'écart spatial est concentré dans l'époxy (figure 3), donc dans le matériau où la variation thermique est la plus forte.

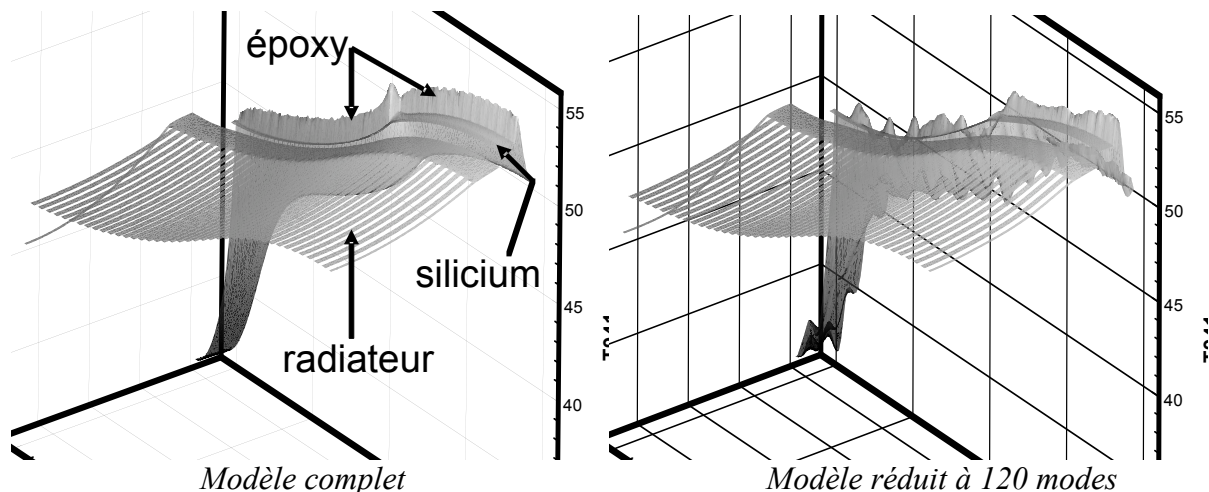


Figure 3 : Comparaison entre modèles au temps où l'écart est maximum ( $t = 941\text{s}$ )

Dans le silicium et le radiateur, les écarts restent faibles (en moyenne) comme le montre la figure 4 qui présente les résultats au point de contrôle du ventilateur (point A de la figure 1) et au point de température maximum dans le composant électronique (point B de la figure 1).

Il apparaît donc que les résultats de la simulation modale suivent ceux de la simulation complète. L'écart présente des pics qui s'expliquent par le fait qu'il manque des modes rapides (que l'on a éliminé lors de la réduction modale). L'augmentation de ces pics au cours du temps est liée à la régulation du procédé : l'écart  $\varepsilon$  au point A provoque ainsi un décalage temporel de fonctionnement du ventilateur qui s'accroît à chaque cycle.

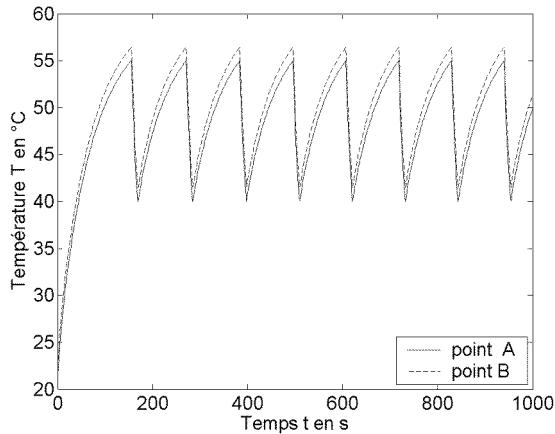


Figure 4a : Evolution des températures

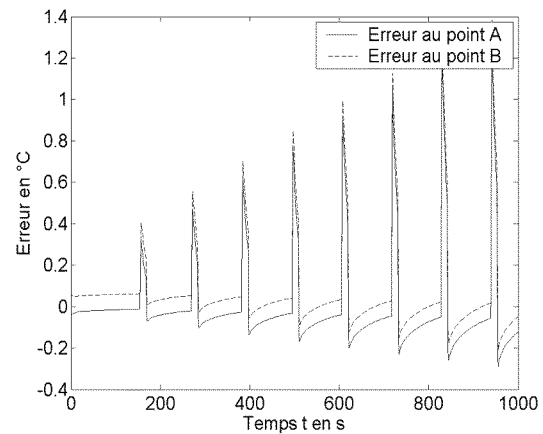


Figure 4b : Evolution des erreurs

Figure 4 : Comparaison entre modèles complet et réduit (120 modes) aux points A et B

## 4. Conclusion

La méthode proposée permet d'obtenir un fort gain de temps CPU (pour mémoire 69), pour un écart sur les températures tout à fait acceptable. Ce gain de temps est notamment lié au fait que la technique permet un couplage entre les deux domaines directement dans l'espace modal et donc indépendamment des températures.

Il n'en reste pas moins que des améliorations sont possibles, notamment en ce qui concerne la technique de réduction. En effet, la réduction par l'amalgame qui a fait ses preuves comme méthode de réduction n'est pas optimisée dans le cas d'un problème couplé.

Ce travail, qui ouvre ainsi un large champ d'investigation en terme de réduction de modèles modaux couplés, n'en fait pas moins la preuve de l'intérêt d'une méthode, qui permet la réduction de temps calculs de simulations numériques s'approchant toujours plus de problèmes réels.

## Références

- [1] Y. Favennec, O. Balima, D. Petit, Contrôle optimal par modèle réduit en conduction thermique, *Congrès français de thermique* (Ile de Ré, 16-19 Mai 2006), 1113-1118.
- [2] J.P. Gwinn, R.L. Webb, Performance and testing of thermal interface materials, *Microelectronics Journal* 34 (2003), 215-222.
- [3] A. Neveu, K. El-Khoury, B. Flament, Simulation de la conduction non linéaire en régime variable : décomposition sur les modes de branche, *IJTS* 38 (1999), 289-304.
- [4] O. Quéméner, A. Neveu, E. Videoq, A specific method for the branch modal formulation : Application to a highly non-linear configuration, *IJTS*, accepté le 11 novembre 2006.