

Méthode de Boltzmann sur réseau pour l'étude de la convection mixte dans un canal contenant un obstacle

Mohammed Amine MOUSSAOUI¹, Mohammed JAMI¹, Ahmed MEZRHAB^{1*},
M'hamed BOUZIDI²

¹Laboratoire de Mécanique & Energétique, Faculté des sciences, Département de physique 60000 Oujda, Maroc

² Université Clermont-2, I. U. T. Ave A.Briand, 03100 Montluçon, France

* (auteur correspondant : mezhhab@sciences.univ-oujda.ac.ma)

Résumé - On étudie la structure d'un écoulement laminaire de l'air dans un canal plan horizontal bidimensionnel, différentiellement chauffé et contenant un obstacle de forme carrée incliné de 45° par rapport à l'horizontal. Un schéma hybride, basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau (Lattice Boltzmann Method: LBM) pour la résolution des équations de mouvement et sur la méthode des différences finies pour le traitement de l'équation de l'énergie, est utilisé. On s'intéresse à l'effet de l'obstacle sur la structure de l'écoulement et sur le transfert thermique pour $Ra = 10^4$, $Pr = 0.71$ et Re variant entre 20 et 200. Les résultats sont présentés en termes de distributions des vitesses, des lignes de courant, des isothermes et du nombre de Nusselt moyen à la paroi chaude.

Nomenclature

A	longueur de la diagonale du carré, m	T_h	température chaude, K
g	accélération de la pesanteur, $m.s^{-2}$	u, v	composantes de la vitesse, $m.s^{-1}$
H	hauteur du canal, m	U_0	vitesse maximale à l'entrée du canal, $m.s^{-1}$
L	longueur du canal, m	x, y	coordonnées cartésiennes
Nu	nombre de Nusselt Local	<i>Symboles grecs</i>	
\overline{Nu}	nombre de Nusselt moyen	α	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
Pr	nombre de Prandtl, $= \nu/\alpha$	β	constante de Boussinesq, K^{-1}
Ra	nombre de Rayleigh, $= g\beta(T_h-T_c)L^3/\nu\alpha$	ρ	densité du fluide, $Kg.m^{-3}$
Re	nombre de Reynolds, $= \rho U_0 A/\mu$	μ	viscosité dynamique du fluide, $Kg.m^{-1}.s^{-1}$
Rec	nombre de Reynolds critique	ν	viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$
T	température, K	ΔT	différence maximale de température, T_h-T_c
T_c	température froide, K		

1. Introduction

La convection est un processus physique de transmission de la chaleur qui s'appuie sur un milieu matériel avec mouvement de matière. Ces dernières années ont vu un accroissement notable des activités de recherche tant expérimentale que numérique dans le domaine des écoulements de fluide et des transferts de chaleur entre deux parois parallèles. Cet intérêt s'explique par des applications industrielles variées liées à ce type d'écoulement. Une revue exhaustive de la littérature montre que la convection mixte dans un canal contenant un obstacle de forme carrée inclinée, a été peu traitée.

L'objectif de ce travail est d'étudier numériquement la structure de l'écoulement laminaire et du transfert thermique dans un canal bidimensionnel différentiellement chauffé avec un obstacle de forme carrée, incliné de 45° par rapport à l'axe horizontal et placé à mi-hauteur de ce canal. Pour cela, nous proposons d'utiliser la méthode de Boltzmann sur réseau (LBM)

pour le calcul des vitesses, couplée avec la méthode des différences finies pour calculer la température [1]. Le choix de la méthode *LBM* est dicté par ses avantages au niveau de la simplicité de programmation et la possibilité de traiter des problèmes complexes.

2. Description du problème et méthode numérique

Le problème physique considéré dans cette étude est celui d'un écoulement incompressible laminaire, permanent et bidimensionnel autour d'un obstacle (voir figure 1). Le fluide circulant dans le canal est de l'air ($Pr = 0.71$) et ses propriétés physiques, à part sa densité, sont supposées constantes. L'obstacle, la paroi supérieure et l'air à l'entrée sont portés à une température froide T_c , alors que la paroi inférieure est portée à une température chaude T_h . Le premier sommet gauche de l'obstacle est localisé à une distance $x_p=L/4$ de l'entrée, $H = 4A$ est la hauteur du canal et $L=32A$ sa longueur. A l'entrée du canal, le profil des vitesses est parabolique avec une vitesse maximale U_0 . Les conditions aux limites dynamiques sur les parois inférieure et supérieure du canal sont de types 'rebonds'; ce qui permet d'obtenir $u=v=0$. Autour de l'obstacle, on procède à des interpolations quadratiques comme détaillées dans [2].

2.1. Méthode de Boltzmann sur réseau

Nous considérons un modèle bidimensionnel de la méthode *LBM* à neuf vitesses discrètes appelé modèle *D2Q9* sur une grille carrée de pas $\delta x = \delta y = 1$ (voir figure 2). Les particules fluides se déplacent d'un noeud de la grille vers le noeud voisin avec les vitesses discrètes qui sont données par :

$$e_i = \begin{cases} (0,0), & i = 0 \\ (\cos[(i-1)\pi/2], \sin[(i-1)\pi/2])c, & i = 1-4 \\ (\cos[(2i-9)\pi/4], \sin[(2i-9)\pi/4])\sqrt{2}c, & i = 5-8 \end{cases} \quad (1)$$

où $c = \delta x / \delta t$, avec $\delta t = 1$, le pas de temps.

L'équation d'évolution temporelle de l'état du fluide suit l'équation :

$$f_i(x+e_i, t+1) = f_i(x, t) + \Omega f_i(x, t), \quad i = 0, 1, \dots, 8 \quad (2)$$

où f_i est la fonction de distribution d'une particule et Ω est l'opérateur de collision. La linéarisation de cet opérateur autour de la fonction de distribution à l'équilibre locale f_i^{eq} apporte une simplification importante de la méthode *LBM*. Avec l'approximation de *BGK* [3], l'équation (2) s'écrit :

$$f_i(x+e_i, t+1) = f_i(x, t) - \frac{1}{\tau} (f_i(x, t) - f_i^{eq}(x, t)), \quad i = 0, 1, \dots, 8 \quad (3)$$

où τ est le temps de relaxation définie par: $\tau = 3\nu + 0.5$

A chaque noeud du domaine, on calcule un ensemble de neuf moments associés aux neuf fonctions de distribution et qui sont liées par la transformation linéaire [4]

$$m = Mf \quad (4)$$

où la matrice M d'ordre 9 est donnée dans [4]. Pendant l'étape de collision qui est locale en espace, trois moments sont conservés (la densité et la quantité de mouvement), les six moments restant, non conservés, sont calculés à partir d'une simple équation de relaxation linéaire vers les valeurs d'équilibre qui dépendent des quantités conservées :

$$m_k^c = m_k + s_k (m_k^{eq} - m_k), \quad k = 3, 5, \dots, 8 \quad (5)$$

avec $s_k = \Delta t / \tau_k$ est le taux de relaxation, m_k^c le moment après collision et m_k^{eq} représente le moment à l'équilibre.

Les nouvelles fonctions de distribution f^c sont calculées à partir des nouveaux moments :

$$f^c = M^{-1}m^c \quad (6)$$

La densité et le vecteur vitesse sont donnés par:

$$\rho(x,t) = \sum_i f_i(x,t) \quad (7)$$

$$\vec{u}(x,t) = \sum_i f_i(x,t) e_i / \rho(x,t) \quad (8)$$

3. Résultats et discussion

Nous étudions l'influence de la présence de l'obstacle de forme carrée, incliné à 45°, sur l'écoulement et sur le transfert de la chaleur pour un nombre de Reynolds Re ($Re = U_0 A / \nu$) variant entre 30 et 200. Les résultats sont donnés sous forme de courbes en particulier le nombre de Nusselt local et le nombre de Nusselt moyen, les isothermes et les lignes de courant pour deux valeurs de Re (30, 100), u pour différentes positions x , et v sur l'axe horizontale de symétrie. La chaleur transférée à partir du mur bas chaud vers le fluide est caractérisée par le nombre de Nusselt moyen:

$$\overline{Nu} = -\frac{1}{\Delta T} \int_0^L \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{paroi} dx \quad (9)$$

et le nombre de Nusselt local :

$$Nu = -\frac{L}{\Delta T} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{paroi} \quad (10)$$

3.1. Isothermes et lignes de courant

Les figures 3a et 3b montrent l'influence du nombre de Reynolds sur l'écoulement. Pour $Re = 30$, on constate que l'écoulement derrière l'obstacle reste symétrique avec la présence de deux tourbillons contrarotatifs symétriques. On signale également que la longueur de cette zone de sillage augmente avec le nombre de Reynolds Re .

Lorsque Re croît, l'écoulement perd sa symétrie et devient périodique, il y a formation des tourbillons de Von Karman, qui oscillent entre le haut et le bas du canal. L'amplitude de ces oscillations croît avec Re . La transition de l'écoulement symétrique vers l'écoulement périodique est caractérisée par le nombre de Reynolds critique Rec ($Rec = 55$ dans notre cas). Différentes valeurs de Rec existent dans la littérature, on peut citer par exemple Abbassi et al [5] qui ont obtenu $Rec = 45$ pour le cas d'un prisme triangulaire et Breuer et al [6] qui ont réalisé, pour le cas d'un cylindre de section carrée, une comparaison entre la méthode de Boltzmann sur réseau et la méthode des volumes finis, ils ont obtenu $Rec \approx 60$. Sohankar et al [7] ont mentionné que le nombre du Reynolds critique dépend du rapport de blocage.

Dans les figures 4a-d, on compare les isothermes dans le cas du canal avec et sans obstacle. Deux valeurs sont prises en compte $Re = 30$ et 100 caractérisant les deux cas de l'écoulement (symétrique et périodique). Pour $Re = 30$, la présence du carré incliné n'a pas d'influence remarquable sur le transfert de chaleur. Par contre, pour $Re = 100$ ($Re > Rec$), le transfert de la chaleur de la paroi chaude vers le fluide devient important. Les isothermes sont perturbées par la présence de l'obstacle.

3.2. Vitesses d'écoulement

La figure 5 présente, pour un $Re=100$, les profils de la composante de vitesse u pour différentes positions de x , en passant par l'obstacle où le profil parabolique se déforme. En effet, il y a accélération de l'écoulement dans les zones se trouvant entre l'obstacle et les parois du canal. Loin derrière l'obstacle, le profil de la vitesse u tend à retrouver sa forme parabolique.

Toujours pour $Re = 100$, la figure 6 présente le profil de la vitesse v le long de l'axe horizontal du canal ; cette vitesse avant l'obstacle est nulle puisque l'écoulement est unidirectionnel. Cependant, après l'obstacle, des oscillations des vitesses apparaissent. Ces oscillations atteignent un maximum juste après l'obstacle puis ils s'amortissent à cause de la décélération.

3.3. Nombre de Nusselt local et Nombre de Nusselt moyen

La figure 7 présente le nombre de Nusselt local le long de la paroi chaude pour $Re = 30$ et 100 respectivement avec et sans obstacle. La présence de l'obstacle influence considérablement l'écoulement et le transfert thermique dans le canal surtout dans le cas de l'écoulement périodique. En effet, pour l'écoulement symétrique il existe une similitude des courbes sauf que la présence de l'obstacle cause un pic dans la courbe correspondant à ce cas. Cette présence entraîne plusieurs pics secondaires lorsque l'écoulement devient périodique. On note aussi que Nu obtenu dans l'écoulement périodique est supérieur à celui obtenu dans le cas de l'écoulement symétrique.

La figure 8 présente la variation du nombre de Nusselt moyen en fonction du nombre de Reynolds. D'après cette figure, on distingue deux régions : pour $Re < Re_c$, \overline{Nu} n'est pas influencé par la présence de l'obstacle, par contre pour $Re > Re_c$, la présence de l'obstacle entraîne une forte augmentation de \overline{Nu} .

4. Conclusion

Une étude numérique de la convection mixte bidimensionnelle de l'air dans un canal horizontal différentiellement chauffé contenant un obstacle de forme carrée et incliné de 45° par rapport à l'axe horizontal a été présentée. Le schéma numérique est basé sur la méthode de Boltzmann sur réseau couplée avec la méthode des différences finies. Pour la configuration schématisée sur la figure 1, les résultats sont résumés comme suit :

- La transition de l'écoulement symétrique vers l'écoulement périodique est observée pour $Re_c=55$;
- Pour l'écoulement symétrique ($Re < Re_c$), l'obstacle présente un effet local sur le transfert de chaleur et sur l'écoulement ;
- Pour l'écoulement périodique ($Re > Re_c$), le transfert de chaleur augmente considérablement en présence de l'obstacle, cette augmentation atteint un maximum de 50 % pour $Re=180$.

Références

- [1] A. Mezrhab, M. Bouzidi, P. Lallemand, Hybrid lattice Boltzmann finite-difference simulation of convective flows, *Computer and Fluids*, 33, (2004), 623-641.
- [2] M. Bouzidi, M. Firdaouss, P. Lallemand, Momentum transfer of a Boltzmann-lattice fluid with boundaries, *Phys. of Fluids*, vol. 13, No. 11, (2001), 3452-3459.
- [3] P. Bhatnagar, E.P. Gross, M. Krook, *Phys. Rev.*, vol 94, p511, 1954.
- [4] P. Lallemand, L. S. Luo, Theory of the lattice Boltzmann method: dispersion, dissipation, isotropy, galilean invariance and stability, *Phys. Rev.*, E61, (2000), 6546-62.

- [5] H. Abbassi, S. Turki, S. Ben Nasrallah, Numerical investigation of forced convection in a horizontal channel with a built-in triangular prism, *Int. J. Therm. Sci.* (2001) 40, 649–658
- [6] Breuer M, Bernsdorf J, Zeiser T, Durst F. Accurate computations of the laminar flow past a square cylinder based on two different methods: lattice-Boltzmann and finite-volume. *Int J Heat Fluid Flow* 2000;21:186–96.
- [7] Sohankar A., Norberg C., Davidson L., Low-Reynolds-number flow around a square cylinder at incidence: study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition, *Internat. J. Numer. Meth. Fluids* 26 (1998) 39–56.

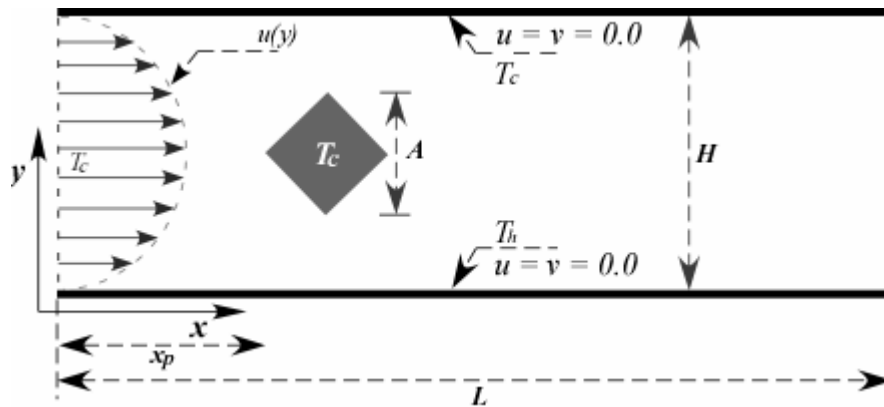


Figure 1 : Configuration étudiée

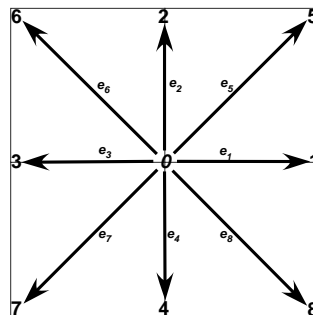


Figure 2 : Modèle D2Q9

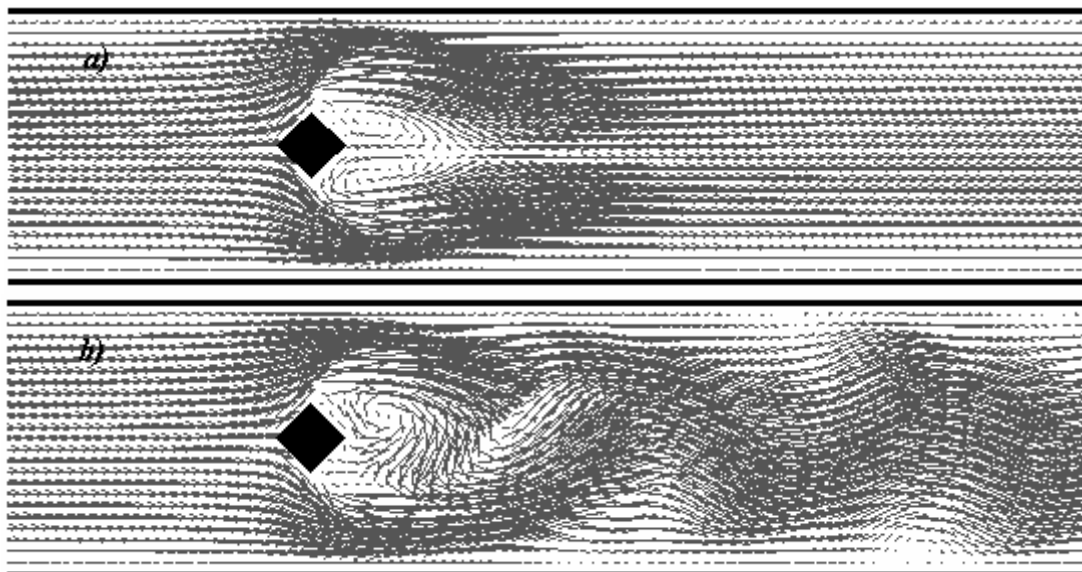


Figure 3 : Distribution des vitesses ; a) $Re=30$, b) $Re=100$

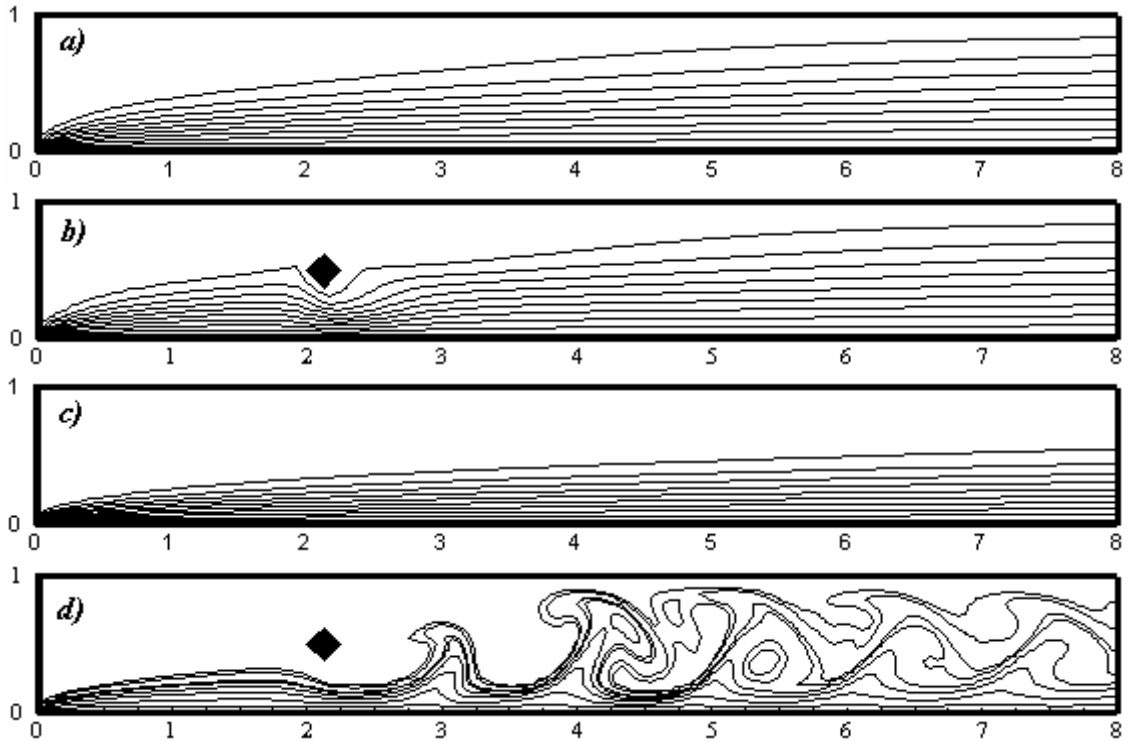


Figure 4 : Les isothermes ; a), b) $Re=30$ et c), d) $Re=100$

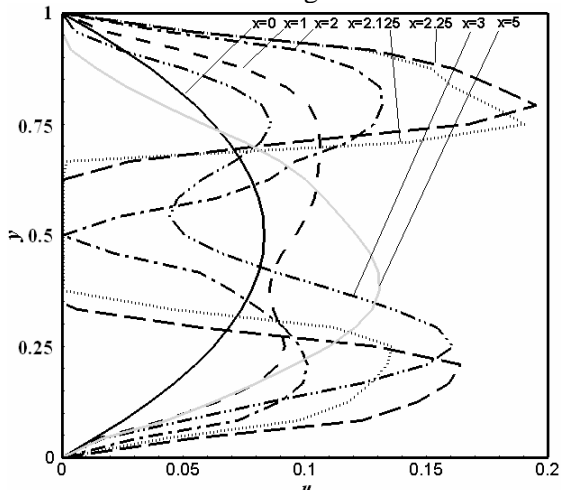


Figure 5 : u en fonction de y pour $Re=100$

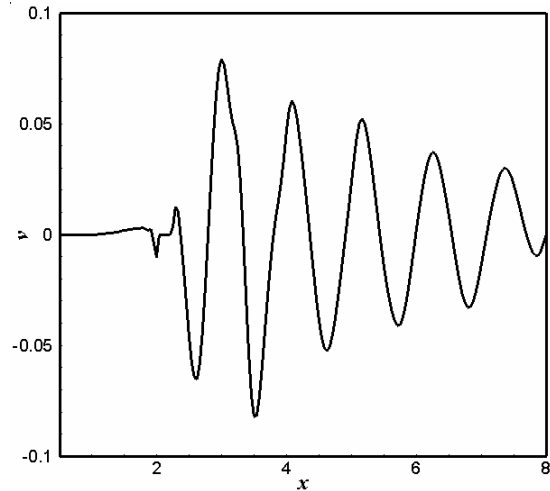


Figure 6 : v en fonction de x pour $Re=100$

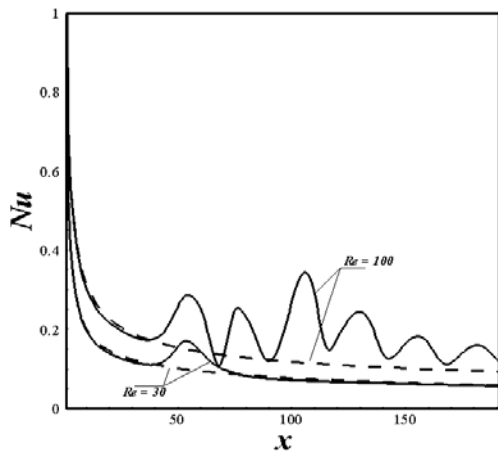


Figure 7 : Nombre de Nusselt local le long du mur chaud

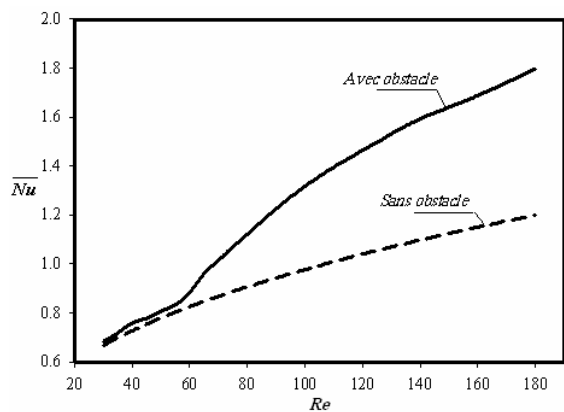


Figure 8 : Nombre de Nusselt moyen en fonction du Re

