

Bilans thermodynamiques de la transition mono-multi-cellulaire dans les cavités à grand rapport de forme.

Michel PONS*

Laboratoire d'Informatique pour la Mécanique et les Sciences de l'Ingénieur (CNRS-LIMSI)

UPR3251, BP 133, 91403 Orsay Cedex

*(michel.pons@limsi.fr)

Résumé - Le problème de la cavité différentiellement chauffée de grand rapport de forme (ici 20, emplie d'air), en particulier celui de la transition entre écoulements mono- et multi-cellulaires, est revisité avec le point de vue de la thermodynamique. Il apparaît que les cellules secondaires sont en fait emboîtées par paires les unes dans les autres au lieu de former un chapelet et que la transition se traduit par un net changement dans la répartition des irréversibilités, visqueuse versus conductive.

Nomenclature

A	rapport de forme de la cavité, $A = H/L$.	z	coordonnée verticale adimensionnée
c_p	chaleur massique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$	<u>Symboles grecs</u>	
g	accélération de la gravité, $m.s^{-2}$	α	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
H	hauteur du volume fluide, m	β	coefficient de dilatation du fluide, K^{-1}
L	largeur du volume fluide, m	ΔT	$T_h - T_c$, K
N	nombre adimensionné	ϕ	$[\beta g H T_0 / (c_p \Delta T)]$
Nu	nombre de Nusselt	θ	température adimensionnée
P	pression, Pa	ρ	densité, $kg.m^{-3}$
Pr	nombre de Prandtl	τ	temps adimensionné
q_v	chaleur générée par friction, $W.m^{-3}$	<u>Indices et exposants</u>	
Ra_H	nombre de Rayleigh basé sur la hauteur	0	état de référence (température moyenne)
Ra_L	nombre de Rayleigh basé sur la largeur	c	paroi froide
t	temps, s	h	paroi chaude
T	température, K	I	irréversibilité
u	composante horizontale de vitesse adim.	q	irréversibilité conductive
w	composante verticale de vitesse adim.	v	visqueuse
x	coordonnée horizontale adimensionnée		

1. Introduction

Depuis le texte pionnier de Batchelor [1], les écoulements thermoconvectifs en cavités 2-D de grand rapport de forme A ont été l'objet de nombreuses études, expérimentales, numériques et théoriques. En effet, la configuration présente un certain intérêt pratique dans l'habitat : doubles vitrages ou doubles peaux par exemple. Ont été explorées expérimentalement des liquides visqueux [2], l'air dans des cavités inclinées [3], l'air avec $A = 12$ [4], la turbulence [5], et l'air avec $A = 40$, [6,7]. Les études numériques ont commencé dès les années 70, parfois reprises dans les années 90 [8,9]. Certaines [10] rejoignent les études de stabilité, menées dans les années 60 [11-13]. Batchelor a démontré [1] que, loin des extrémités et pour des Rayleigh suffisamment faibles, l'écoulement de base est stationnaire et monodimensionnel, fonction de la position horizontale uniquement, linéairement pour la température et fonction cubique pour la vitesse verticale. C'est le régime dit *conductif*. Lorsque le Rayleigh est suffisamment fort, les couches limites sont séparées par un cœur stratifié. C'est le régime dit *de couches limites*. Entre ces deux régimes, les modes de

transition sont divers, selon le rapport de forme de la cavité et le Prandtl du fluide. Avec l'air à des températures proches de l'ambiante et pour des rapports de forme de l'ordre de la dizaine, des cellules de recirculation dites *secondaires* apparaissent au sein de l'écoulement principal en régime conductif (l'écoulement est toujours stable) puis disparaissent pour former un régime de couche limite, d'abord stable puis enfin instationnaire. Si le rapport de forme est proche de 100 l'écoulement se déstabilise avant l'apparition des cellules secondaires [13].

Le but du présent travail est d'étudier l'apparition des cellules secondaires au sein du régime conductif, cette fois à partir du point de vue de la thermodynamique : quelles sont les équilibres entre formes d'énergie et surtout entre types d'irréversibilités qui sont modifiés lors de cette transition, et comment ? À part Vest & Arpaci qui mentionnent que le mécanisme de déstabilisation du régime conductif est « purement hydrodynamique » [12], de telles questions ne sont jamais posées.

2. Le modèle numérique utilisé : Boussinesq Thermodynamique

Des études récentes démontrent les incohérences entre la thermodynamique et le modèle de Boussinesq habituellement utilisé pour simuler la convection naturelle [14-17]. Ces incohérences avaient été pressenties par Mihaljan [18]. Pour les résoudre, il suffit d'utiliser le modèle dit *Boussinesq Thermodynamique (BT)* introduit par Spiegel & Veronis [19]. La différence entre les deux est que, dans le modèle *BT*, l'équation de la chaleur intègre le travail des forces de pression ainsi que la chaleur générée par dissipation visqueuse :

$$\frac{DT}{Dt} = \alpha_0 \nabla^2 T + \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial(\rho^{-1})}{\partial T} \right)_P \frac{DP}{Dt} + \frac{q_v}{\rho c_p} \quad (1)$$

Pour adimensionner les équations, nous prenons comme références : la hauteur H pour les distances, $(\alpha \sqrt{Ra_H})/H$ pour les vitesses, et $(T_h - T_c)$ pour les écarts à la température moyenne T_0 . Les autres grandeurs de référence (temps, pression) en découlent. En supposant que les variations de la pression moyenne sont négligeables (ce qui est forcément vrai à l'état stationnaire), la forme adimensionnée de l'équation (1) est :

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{Ra_H}} \nabla^2 \theta - \phi w + \frac{\beta g H}{c_p} \left(\frac{\Phi}{\sqrt{Ra_H}} - \theta w \right) \quad (2)$$

où ϕ égale $[(\beta g H T_0)/(c_p \Delta T)]$, qui est le gradient adiabatique de température $[\beta g T_0/c_p]$ adimensionné par le gradient vertical de température dans le problème étudié $[\Delta T/H]$ [20]. Le nombre $[\beta g H/c_p]$, en facteur du dernier terme, est habituellement très petit. En revanche, le terme $(-\phi w)$, qui vient du travail des forces de pression et que nous nommerons désormais ainsi, n'est pas nécessairement négligeable puisque ϕ peut assez facilement être de l'ordre de l'unité [15]. La base numérique de notre modèle a été décrite par Gadoin *et coll.* [21]. Le maillage décalé est régulier ; les flux diffusifs et convectifs sont discrétisés par différences centrées ; le schéma en temps, d'ordre deux, est résolu par la méthode des pas fractionnés ; le couplage vitesse-pression est résolu en deux étapes, prédiction puis projection.

Nous nous intéressons ici à la cavité différentiellement chauffée 2-D emplie d'air à 300 K ($Pr = 0,71$) avec parois horizontales adiabatiques et de rapport de forme $A = 20$. La vitesse est

nulle sur toutes les parois, et c'est la paroi de gauche ($x = 0$) qui est chauffée ($\theta = +0,5$), celle de droite ($x = 1/A$) étant refroidie ($\theta = -0,5$). Le maillage est de 128×512 . Nous avons choisi cette résolution, beaucoup plus fine que celles utilisées jusqu'ici (33×33 [10], 24×120 [8]), et un maillage régulier, ce qui assure une résolution suffisante au centre de la cavité, là où les cellules secondaires apparaissent.

Si le Rayleigh basé sur la hauteur, Ra_H , est le principal paramètre de contrôle en régime de couches limites (raison pour laquelle notre adimensionnement se base sur Ra_H), toute la bibliographie indique qu'en régime conductif, c'est le Rayleigh basé sur la largeur Ra_L qui est le plus pertinent. C'est donc ce dernier que nous utiliserons par la suite.

La présence du facteur ϕ dans le modèle BT fait que le Rayleigh seul ne suffit pas pour définir une configuration. Nous définissons donc deux cavités de hauteurs différentes, une « petite » cavité où le travail des forces de pression n'aura quasiment pas d'effet ($\phi \ll 1$), et une cavité dite « grande » où ce travail ne sera pas négligeable (ϕ de l'ordre de 1). Le Tableau 1 décrit ces cavités. La première peut ressembler à une fenêtre, la seconde est plutôt de l'ordre de la hauteur d'un étage. Au-delà de 5000, le Rayleigh est augmenté en augmentant le ΔT seul, ce qui diminue ϕ proportionnellement.

Cavité	H [m]	ϕ	ΔT [K]
« petite »	0,808	0,01	0,789
« grande »	2,032	0,4	0,0496

Tableau 1 : Définition des deux configurations étudiées (valeurs de ϕ et ΔT données pour $Ra_L = 5000$).

3. Flux de chaleur total et irréversibilités globales

Le Nusselt est le rapport du flux de chaleur effectivement échangé à celui qui serait échangé dans un système purement conductif. Le même système purement conductif sert de référence pour adimensionner les productions d'entropie et donner les « nombres d'irréversibilité » N_I [14]. L'expression du Nusselt est bien connue [$Nu = A^{-1} \int_0^1 (\partial\theta/\partial x) dz$], celles des nombres d'irréversibilité conductive et visqueuse le sont un peu moins :

$$N_{Iq} = \frac{1}{A} \int_{cavité} \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial z} \right)^2 \right] \cdot \left(1 + \theta \frac{\Delta T}{T_0} \right)^{-2} dx dz \quad (3)$$

$$N_{Iv} = \frac{\phi}{A} \int_{cavité} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \cdot \left(1 + \theta \frac{\Delta T}{T_0} \right)^{-1} dx dz \quad (4)$$

Noter la présence du facteur ϕ dans l'expression de N_{Iv} . À l'état stationnaire, le nombre de Nusselt et le nombre d'irréversibilité totale doivent être égaux (voir la réf. [14]) :

$$N_{I_{tot}} = N_{Iq} + N_{Iv} = Nu \quad (5)$$

Les Figures 1 et 2 montrent l'évolution du Nusselt (et donc de l'irréversibilité totale) et de l'irréversibilité visqueuse N_{Iv} , en fonction de Ra_L et pour chacune des deux cavités. Sur chaque courbe, les différents symboles indiquent le nombre de cellules secondaires de

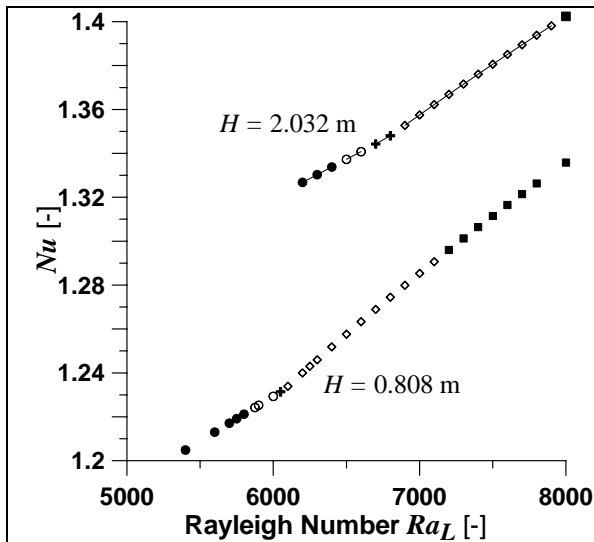


Figure 1 : Nusselt (et donc aussi nombre d'irréversibilité totale) en fonction du Rayleigh, pour les deux cavités.

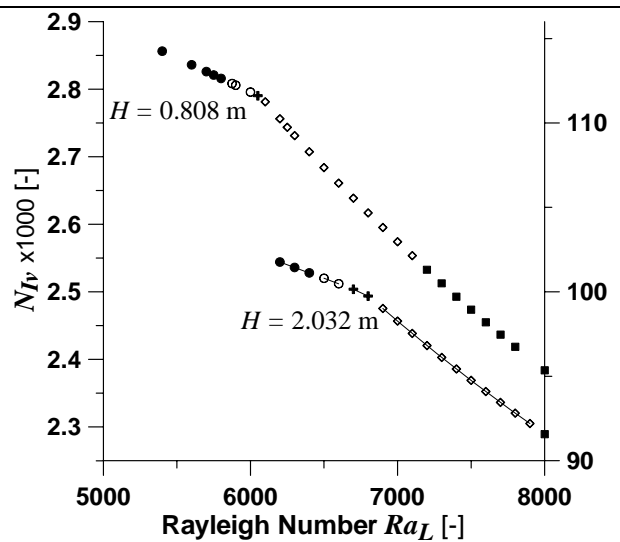


Figure 2 : Nombre d'irréversibilité visqueuse en fonction du Rayleigh, pour les deux cavités (échelle de droite pour la grande cavité).

Les symboles représentent le nombre de cellules secondaires : ● : pas de cellule secondaire, ○ : 2 cellules secondaires, + : 4, ◇ : 6 et ■ : 7 cellules secondaires.

recirculation observées. Comparons d'abord les valeurs absolues de ces données entre les deux cavités. Le Nusselt est de quelques pourcents plus fort dans la grande cavité que dans la petite (+5 à 7 %, dans la gamme explorée). Pour l'irréversibilité visqueuse, si la proportionnalité entre N_{Ir} et ϕ était respectée les deux courbes seraient confondues (les graduations des axes sont dans le même rapport que les valeurs de ϕ). Ces deux figures montrent bien qu'utiliser le modèle de Boussinesq usuel pour simuler la grande cavité conduirait à sous-estimer le Nusselt et l'irréversibilité totale tout en surestimant l'irréversibilité visqueuse. La distribution entre les deux types d'irréversibilité serait donc complètement erronée.

Observons maintenant la transition de l'écoulement monocellulaire à l'écoulement multicellulaire. Les premières prévisions de cette transition ont été obtenues par étude de stabilité linéaire prenant comme base un champ de température strictement linéaire en x et un

écoulement strictement vertical tel que défini en [1] : $w(x,y) = \frac{\sqrt{Ra}}{6A^2} Ax(Ax - 0,5)(Ax - 1)$.

Les différentes évaluations du Rayleigh critique par cette méthode se situent entre 5600 et 5700 [11-13,22,23]. Les premières études numériques font apparaître des valeurs supérieures : 6030 [24], 6500 [9], voire 7500 [10] très probablement sous-résolu. Ces valeurs ne peuvent concerner ici que la petite cavité.

Dans nos calculs, deux cellules de recirculation apparaissent vers $Ra_L = 5850$ pour la petite cavité, et $Ra_L = 6450$ pour la grande cavité. Cependant, il faut noter sur les Figures 1 et 2 que cette transition n'affecte notablement le transfert de chaleur et les irréversibilités que lors de l'apparition des 6 cellules de recirculation, soit pour $Ra_L = 6080$ et 6850 respectivement.

4. Les effets thermodynamiques de la transition

Il a souvent été mentionné [6] que cette transition a pour effet d'augmenter le flux de chaleur *relativement à l'augmentation qu'aurait donnée l'extrapolation du régime monocellulaire* [7,10,9,13] ; c'est ce qui sera dénommé dans la suite par *augmentation relative*. La Figure 1 indique bien cette tendance, avec toutefois une *augmentation relative* moins marquée pour la grande cavité.

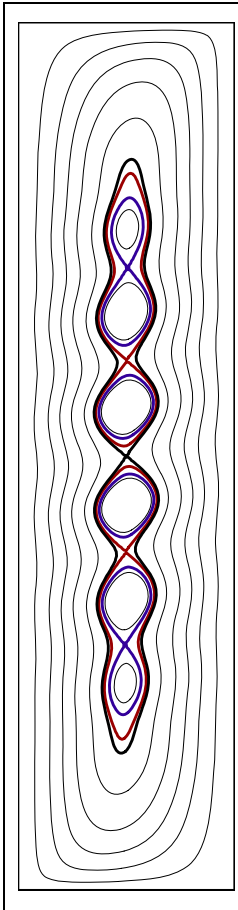
Apparemment, il n'avait pas encore été remarqué que cette transition se traduit aussi par une nette *diminution relative* (c.-à-d. par rapport à l'extrapolation du régime mono-cellulaire) de l'irréversibilité visqueuse, voir Figure 2. Il est clair qu'au centre de la cavité des rouleaux, même corotatifs, opposent moins de résistance que le cisaillement des deux couches limites à contre-courant. La résistance est d'autant diminuée que les rouleaux prennent ici une conformation particulière, montrée sur la Figure 3 : les six rouleaux forment, non pas un chapelet les uns à la suite des autres tel que décrit par les études de stabilité linéaire [12,23] mais un emboîtement. En effet, la première ligne de courant qui soit sub-divisée, $\psi = -2,052 \times 10^{-3}$, ne forme que deux grandes sous-cellules ; à l'intérieur de chaque sous-cellule, la ligne de courant $\psi = -2,088 \times 10^{-3}$ n'est de nouveau sub-divisée qu'en deux cellules. C'est au troisième niveau de sub-division ($\psi = -2,154 \times 10^{-3}$) qu'apparaissent les six cellules. Un des effets de cette conformation est que chaque cellule de recirculation ne partage un point à vitesse nulle qu'avec *une* seule de ses voisines, et que de l'autre côté elle est en fait entraînée par la cellule de niveau supérieur. Cela diminue d'autant la friction entre cellules corotatives et participe à la diminution relative de l'irréversibilité visqueuse. Quelques études numériques avaient déjà montré des écoulements présentant cette conformation [8,10,24] mais aucune ne l'avait commentée.

Une des actions de ces rouleaux est de faire recirculer du fluide *relativement* froid vers la paroi chaude, et *vice-versa*. C'est bien ce qui augmente le gradient de température à la paroi et donc le transfert de chaleur global. Parallèlement, cela diminue la température moyenne dans la couche limite montante et l'augmente dans la couche limite descendante. Ces modifications des températures moyennes ont pour autre effet de réduire l'intensité de la force de flottabilité (le terme de forçage de l'équation du moment) et donc aussi la dynamique du système. Ces deux mécanismes conjuguent leurs effets sur le travail moteur dans la cavité, $w\theta$, qui affiche une très nette transition lors de l'apparition des six cellules, voir Figure 4.

Cette analyse thermodynamique montre que la présence des cellules secondaires tend à diminuer cela même qui les génère, à savoir l'intensité du cisaillement entre les deux couches limites. On comprend donc qu'elles ne puissent exister en deçà d'une certaine intensité de convection.

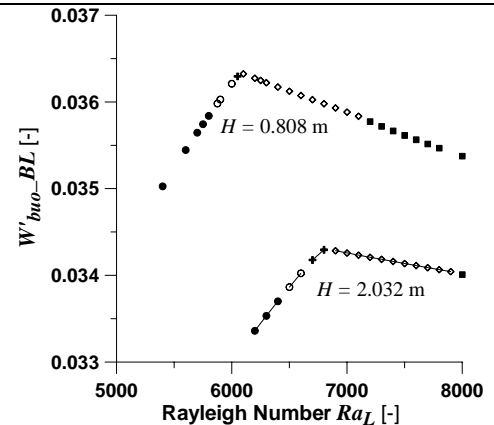
5. Conclusion

L'influence du travail des forces de pression, et donc de la hauteur de la cavité, sur l'écoulement n'est pas toujours négligeable, quantitativement et qualitativement. Les cellules secondaires de recirculation prennent une conformation emboîtée qui réduit la friction. Leur présence réduit l'énergie motrice de l'écoulement qui est à leur origine, d'où l'existence du seuil.



←Figure 3 : Lignes de courant avec $Ra_L = 5850$ (petite cavité). Valeurs de -1000ψ : lignes fines de 0,2 à 2,2 par pas de 0,4 ; lignes épaisses pour 2,0520 , 2,088 et 2,154. (Figure dilatée d'un facteur 5 horizontalement).

Figure 4 : Travail des forces de flottabilité ($w\theta$) en fonction du Rayleigh, pour les deux cavités. (mêmes légendes que Fig. 1 & 2)->



Références

- [1] G. K. Batchelor, Heat transfer by free convection across a closed cavity between vertical boundaries at different temperatures, *Quarterly of Applied Mathematics*, 12-3 (1954), 209-233.
- [2] J. W. Elder, Laminar free convection in a vertical slot, *J. Fluid Mech.*, 23-1 (1965), 77-98.
- [3] S. M. ElSherbiny, G. D. Raithby, and K. G. T. Hollands, Heat transfer by natural convection across vertical and inclined air layers, *J. Heat Transfer*, 104-1 (1982), 96-102.
- [4] A. Chikhaoui, J. F. Marcillat, and R. L. Sani, Successive transitions in thermal convection within a vertical enclosure, *Natural Convection in Enclosures-HTD-99*, ASME, (1988), 29-35.
- [5] P. L. Betts and I. H. Bokhari, Experiments on turbulent natural convection in an enclosed tall cavity, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, 21-6 (2000), 675-683.
- [6] B. Lartigue, S. Lorente, & B. Bourret, Multicellular natural convection in a high aspect ratio cavity: experimental and numerical results, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 43-17 (2000), 3157-3170.
- [7] J. L. Wright, H. Jin, K. G. T. Hollands, and D. Naylor, Flow visualization of natural convection in a tall, air-filled vertical cavity, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 49-5-6 (2006), 889-904.
- [8] P. Le Quéré, A note on multiple and unsteady solutions in two-dimensional convection in a tall cavity, *J. Heat Transfer*, 112-4 (1990), 965-974.
- [9] Y. Zhao, D. Curcija, and W. P. Goss, Prediction of the multicellular flow regime of natural convection in fenestration glazing cavities, *ASHRAE Transactions*, 103-1 (1997), 1-12.
- [10] Y. Lee and S. A. Korpela, Multicellular natural convection in a vertical slot, *J. Fluid Mech.*, 126 (1983), 91-121.
- [11] R. V. Birikh, On small perturbations of a plane parallel flow with cubic velocity profile, *Applied Mathematics and Mechanics*, 30 (1966), 432-438.
- [12] C. M. Vest and V. S. Arpaci, Stability of natural convection in a vertical slot, *J. Fluid Mech.*, 36-1 (1969), 1-15.
- [13] R. F. Bergholz, Instability of steady natural convection in a vertical fluid layer, *J. Fluid Mech.*, 84-4 (1978), 743-768.
- [14] M. Pons and P. Le Quéré, An example of entropy balance in natural convection, Part 1: the usual Boussinesq equations, *Comptes Rendus Mécanique*, 333-2 (2005), 127-132. & Part 2: the thermodynamic Boussinesq equations, *idem*, (2005), 133-138.
- [15] M. Pons and P. Le Quéré, Modelling natural convection with the piston effect, a thermodynamic necessity, Proc. 4th Int. Conf. Computational Heat and Mass Transfer, (Paris, 2005), 1-6.
- [16] M. Pons and P. Le Quéré, Influence of the pressure stress work on heat transfer and flow in the differentially heated cavity, Proc. 13th Int. Heat Transfer Conf., 13-18 August 2006, Sydney, (Australia, Aug. 2006), réf. NCV-32, 12 p.
- [17] V. A. F. Costa, Thermodynamics of natural convection in enclosures with viscous dissipation, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 48-11 (2005), 2333-2341.
- [18] J. M. Mihaljan, A rigorous exposition of the Boussinesq approximations applicable to a thin layer of fluid, *Astrophys. J.*, 136-3 (1962), 1126-1133.
- [19] E. A. Spiegel and G. Veronis, On the Boussinesq approximation for a compressible fluid, *Astrophys. J.*, 131 (1960), 442-447.
- [20] D. J. Tritton, *Physical fluid dynamics*, 2nd Ed., Oxford University Press, Oxford, (1988).
- [21] E. Gadoin, P. Le Quéré, and O. Daube, A general methodology for investigating flow instabilities in complex geometries: application to natural convection in enclosures, *Int. J. for Numerical Methods in Fluids*, 37-2 (2001), 175-208.
- [22] R. V. Birikh, G. Z. Gershuni, E. M. Zhukhovitskii, and R. N. Rudakov, Stability of the steady convective motion of a fluid with a longitudinal temperature gradient, *Applied Mathematics and Mechanics*, 33 (1969), 937-947.
- [23] A. Chait and S. A. Korpela, The secondary flow and its stability for natural convection in a tall vertical enclosure, *J. Fluid Mech.*, 200 (1989), 189-216.
- [24] B. Roux, J. C. Grondin, P. Bontoux, and G. De Vahl Davis, Reverse transition from multicellular to monocellular motion in vertical fluid layer, *Europhysics Conference Abstracts*, (Geneva, Switzerland, 1980), 292-297.

Remerciements : Les calculs numériques ont été réalisés sur le NEC-SX8 du CNRS-IDRIS, Orsay.