

Modélisation des transferts de chaleur pariétaux dans le cas de conditions aux limites variables en temps et en espace

Denis Maillet, Benjamin Rémy, Alain Degiovanni

Université de Lorraine & CNRS, Nancy - France
LEMTA

Journée SFT « Coefficient d'échange convectif en milieu urbain
Mesures et modélisation »

*Groupes « Thermique atmosphérique et adaptation au changement climatique »
et « Génie climatique – Thermique de l'habitat »*

Paris, 5 décembre 2024

Problématique

- Comment modéliser et calculer les températures et densités de flux **locales** et **instantannées** à une interface solide/fluide en **convection forcée** ?

Etat de l'art → 2 méthodes :

- 1) Utilisation d'un **coefficient de transfert de chaleur** (Corrélations sur nombre de Nusselt basées sur expérience ou modélisation dans conditions idéales: température/densités de flux pariétales constantes et uniformes)
- 2) Utilisation code calcul en **transferts de chaleur « conjugués »**, avec résolution conjointe dans solide et fluide

Inconvénients:

- méthode 1: contestable si on n'est pas exactement dans configuration où corrélation a été établie (hypothèses restrictives)
- méthode 2: précise mais intensive en temps et volume de calculs (temps caractéristiques diffusion et advection très différents entre solide et fluide, si ce dernier est un gaz)

Proposition de solution alternative:

- i) Résoudre analytiquement et **indépendamment le transfert** dans le solide et le fluide, en excitant le système côté solide (**source transitoire** volumique ou surfacique **séparable temps/espace**) [1].
- ii) Puis **égaler températures et densité de flux** de chaque côté de l'interface (sauf si source surfacique ou présence résistance d'interface)

Approches présentées ici:

1^{ère} partie : **Concepts** et **structure** de la relation température/densité de flux en paroi

2^{ème} partie: cas 2D permanent ou non, **solutions analytiques** pour le transfert pariétal pour **paroi plane**

1^{ère} partie: relation température/densité de flux en paroi

Spécificités de l'approche :

- Régime transitoire → causalité du transfert et système dynamique convolutif
- Cause : présence unique **source transitoire**:
 - Entrée = **source thermodynamique** (conversion énergie « noble » en chaleur)
(**variation** de puissance thermique ou **variation** de température à $t = 0$ sur support spatial donné)
 - Sortie = **variation de température** (ou de densité de flux conductif) en tout point
= **réponse impulsionnelle** (**RI** = impédance, transmittance ou admittance) convoluée avec **entrée**

NB: **certaines conditions à remplir**

- Utilisation de la transformée de Laplace temporelle
- Régime permanent (résistance ou conductance) se déduit de la **RI**
- Application locale en un point de la paroi : existence d'une expression **intrinsèque** du **coefficient d'échange** en régime permanent

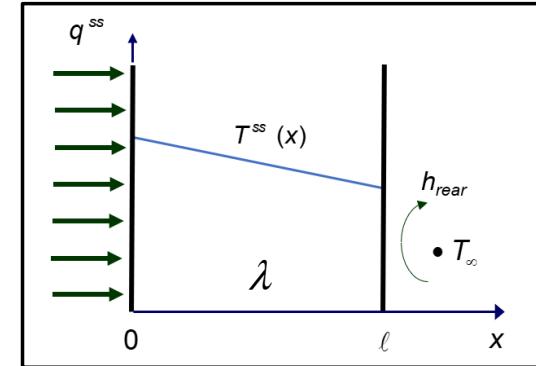
Intérêt du transitoire : configuration = système physique 1D

excitation = variation transitoire d'une source surfacique en face avant

- Si $t \leq 0$ régime permanent (ss) :

$$q^{ss}, T^{ss}, T_{\infty}, \lambda, h_{rear} = \text{constantes} \Rightarrow T^{ss}(x)$$

$$\text{Eq. chaleur: } \frac{\partial^2 T^{ss}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{CL: } \begin{cases} -\lambda \frac{\partial T^{ss}}{\partial x} = q^{ss} & \text{at } x = 0 \\ -\lambda \frac{\partial T^{ss}}{\partial x} = h_{rear} (T^{ss} - T_{\infty}) & \text{at } x = \ell \end{cases}$$

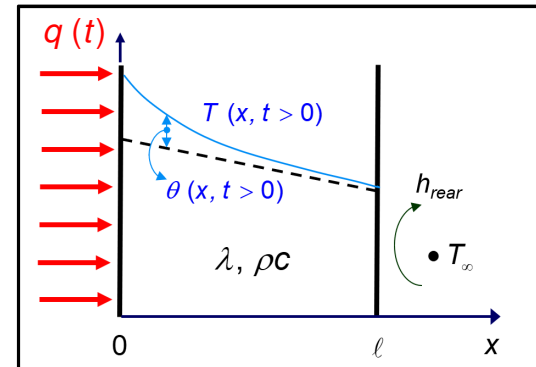


- A l'instant $t = 0^+$, q^{ss} est remplacé par $q(t) = q^{ss} + Q(t)$ avec $Q(0) = 0$

$$\text{Eq. chaleur: } \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{avec } a = \frac{\lambda}{\rho c}$$

$$\text{CI: } T = T^{ss} \text{ à } t = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq \ell$$

$$\text{CL: } \begin{cases} -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q^{ss} + Q(t) & \text{à } x = 0 \text{ pour } t > 0; \\ -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = h_{rear} (T - T_{\infty}) & \text{à } x = \ell \text{ pour } t > 0 \end{cases}$$



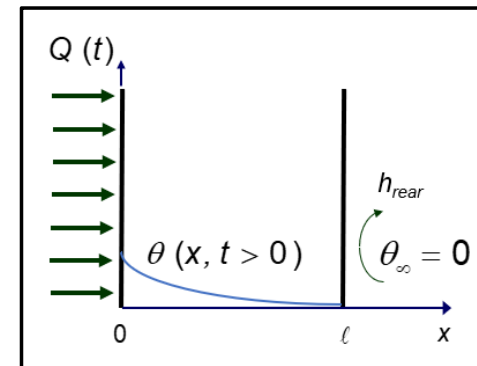
Definitions: variation de **variation de température** $\theta(x, t) = T(x, t) - T^{ss}(x)$ causée par **variation de flux** $Q(t) = q(t) - q^{ss}$

Soustraction des 2 equations & CL → système EDP LTI-PDE reliant $\theta(x, t)$ à $q(t)$

Eq. chaleur : $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t}$ avec $a = \frac{\lambda}{\rho c}$

CI : $\theta = 0$ à $t = 0$ pour $0 \leq x \leq \ell$

CL :
$$\begin{cases} -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial t} = Q(t) & \text{à } x = 0 \\ -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = h_{rear} \theta & \text{à } x = \ell \end{cases}$$



Système linéaire à coefficients Indépendant du temps (LIT), dont la solution sous la forme :

Variation de température en **tout** point P d'abscisse x : $\theta(P, t) = T(P, t) - T_{init}(P)$

Sa transformée de Laplace : $\bar{\theta}(P, p) = \int_0^\infty \exp(-p t) \theta(P, t) dt$

variable de Laplace

Transformée de variation de source : $\bar{Q}(P, p) = \int_0^\infty \exp(-p t) Q(t) dt$

$$\bar{\theta}(P, p) = \bar{z}(P, p) \bar{Q}(p) \Rightarrow \theta(P, t) = (z_p * Q)(t)$$

impédance
opérationnelle

impédance temporelle
réponse impulsionnelle

produit de
convolution
temporel

Hypothèses [2]:

- ❑ Champ de **température initial** ($t = 0$) en régime permanent
- ❑ Système EDP (Equation chaleur, Navier Stokes) **Linéaire** à coefficients **Invariants en Temps** (**Système LTI**)
- ❑ **Pas de variation temporelle** : conditions aux limites / température du fluide externe / température d'entrée fluide interne
- ❑ Une **seule** excitation thermique transitoire définie par son support et **séparable** temps/espace = source de puissance

Configuration : Système physique et excitation thermique interne en puissance volumique

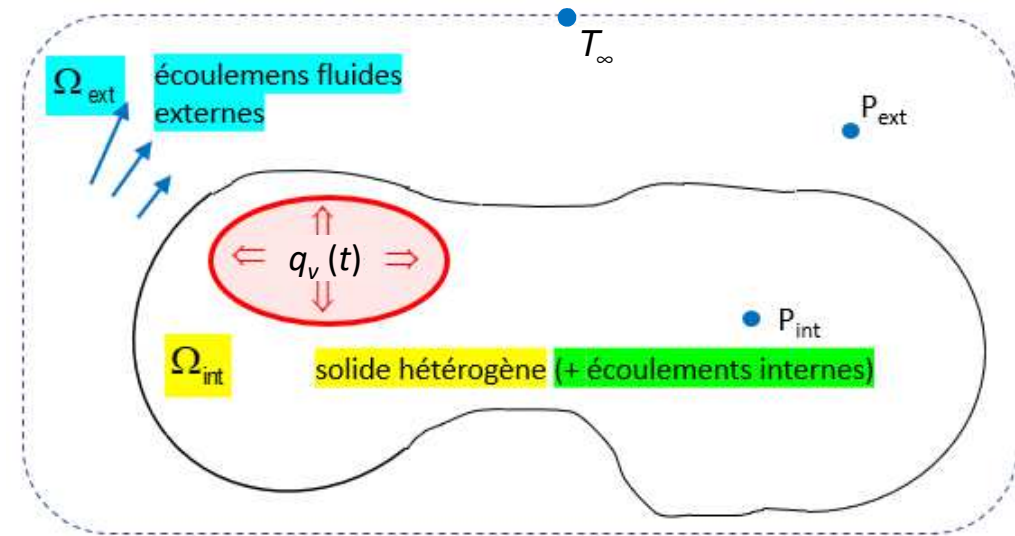
P = point **quelconque** interne au domaine

$$\Omega = \Omega_{\text{int}} \cup \Omega_{\text{ext}} = \mathbb{R}^3$$

CI : $T(P, t) = T^{ss0}(P)$ partout

CL : A l'infini (fluide externe) : $T(P, t) = T_{\infty} = \text{Constante}$

- Equation de la chaleur transitoire dans \mathbb{R}^3 **aux temps** $t \geq 0$



$$\boxed{\rho c(P) \frac{\partial T}{\partial t}(P, t)} + \boxed{\rho c(P) \vec{u}(P) \cdot \vec{\nabla} T(P, t)} = \boxed{\vec{\nabla} \cdot (\lambda(P) \vec{\nabla} T(P, t))} + \boxed{\frac{f(P)}{V_{\text{source}}} q_v(t)} + \boxed{\text{autres sources permanentes préexistantes aux temps } t < 0}$$

Transitoire
Advection
Conduction
support (espace)
intensité source interne

Variation d'intensité de source à l'instant $t = 0^+$:

$$Q_v(t) = q_v(t) - q_v^{ss0}$$

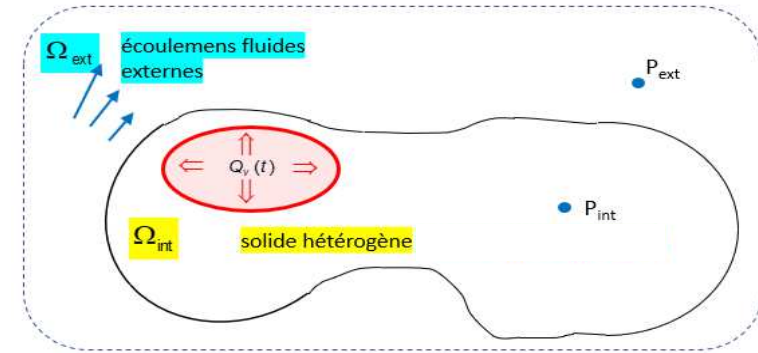
excitation constante à $t < 0$

Variation de température en **tout** point P:

$$\theta(P, t) = T(P, t) - T(P, t = 0)$$

champ de température permanent à $t < 0$

$$\theta(P, t) = T(P, t) - T^{ss0}(P)$$



$$\boxed{\rho c(P) \frac{\partial \theta}{\partial t}(P, t)} + \boxed{\rho c(P) \vec{u}(P) \cdot \vec{\nabla} \theta(P, t)} = \boxed{\vec{\nabla} \cdot (\lambda(P) \vec{\nabla} \theta(P, t))} + \boxed{\frac{f(P)}{V_{\text{source}}} Q_v(t)} + \begin{array}{l} \text{CL: } \theta = 0 \text{ à l'infini} \\ \text{CI: } \theta = 0 \text{ sur } \Omega = \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Transitoire Advection Conduction Source interne

Transformées de Laplace :

$$\bar{\theta}(P, p) = \int_0^\infty \exp(-p t) \theta(P, t) dt$$

variable de Laplace

$$\bar{Q}_v(p) = \int_0^\infty \exp(-p t) Q_v(t) dt$$

Conséquences : Equation de la chaleur transformée (Laplace) \rightarrow dérivée temporelle disparaît [1]

$$\boxed{\rho c(P) p \bar{\theta}(P, p)} + \boxed{\rho c(P) \vec{u}(P) \cdot \vec{\nabla} \bar{\theta}(P, p)} = \boxed{\vec{\nabla} \cdot (\lambda(P) \vec{\nabla} \bar{\theta}(P, p))} + \boxed{\frac{f(P)}{V_{\text{source}}} \bar{Q}_v(p)}$$

Transitoire Advection Conduction Source interne

Equation linéaire avec une seule excitation :

⇒ entrée : $\bar{u}(p) \equiv \bar{Q}_v(p)$

Réponse en **Temperature** ou en **flux**
en un point quelconque P du système

= **produit simple** (espace de Laplace)

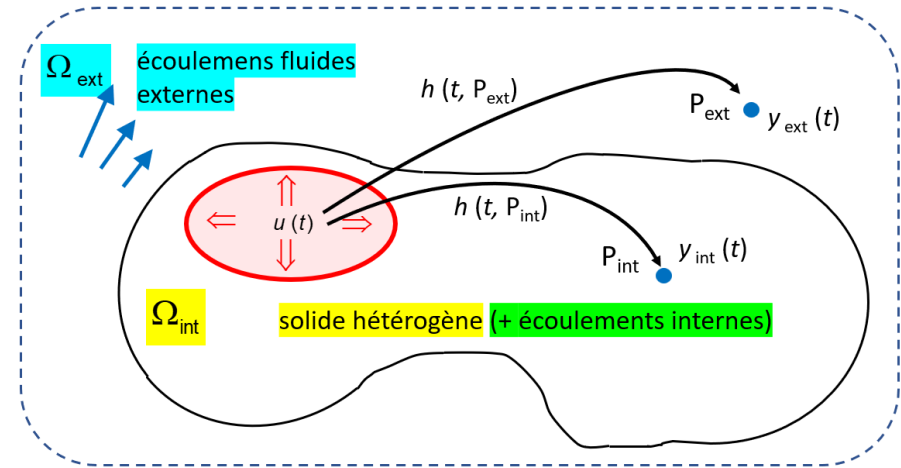
$$\bar{y}(P, p) = \bar{h}(P, p) \bar{u}(p)$$

fonction de transfert (transformée fonction de Green)

ou **produit de convolution** (domaine temporel)

Réponse forcée

$$y(P, t) = h(P, t) * u(t) = \int_0^t h(P, t-t') u(t') dt'$$



Généralisation ⇒

ENTREE = SOURCE u
Variation d'une excitation :
 $u(t) = q_v(t) - q_v^{ss0}$ ou $q_s(t) - q_s^{ss0}$
ou $T_s(t) - T_s^{ss0}(P_s)$ or $T_\infty(t) - T_\infty^{ss0}$
ou $T_b^{in}(t) - T_b^{in,ss0}$

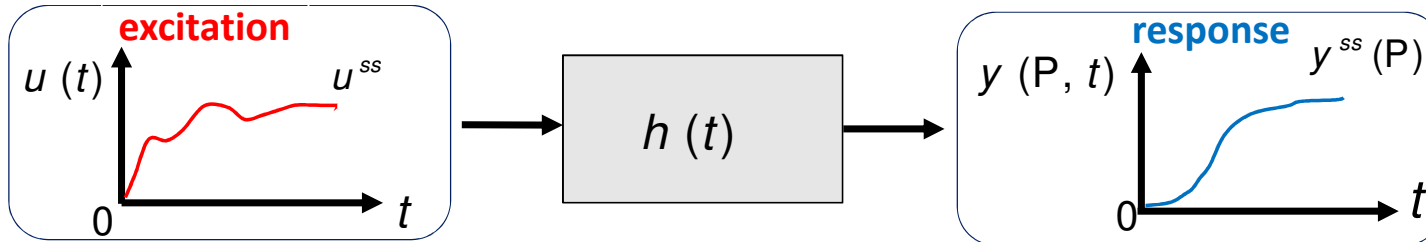
Réponse impulsionnelle
 $h(P, t)$
ss0 = état permanent initial

SORTIE = RESPONSE y
Variation de température à un point P :
 $y(t) = T(P, t) - T_{init}(P)$
ou variation du flux local de Fourier $\phi_x = -\lambda \partial T / \partial x$
 $\phi_x(P, t) = \phi_x(P, t) - \phi_x^{ss0}(P)$ dans toute direction x

Excitation u	Response y	Transfer function H
Power source Q (watts)	Temperature difference θ (kelvins)	Impedance Z (K.J ⁻¹)
Temperature difference θ (kelvins)	Temperature difference θ (kelvins)	Transmittance W (s ⁻¹)
Power source Q (watts)	Rate of heat flow Φ (watts)	Transmittance W (s ⁻¹)
Temperature difference θ (kelvins)	Rate of heat flow Φ (watts)	Admittance a_d (W.K ⁻¹ .s ⁻¹)

Version permanente d'une réponses impulsionnelle

$$y(P, t) = h(P, t) * u(t) = \int_0^t h(P, t-t') u(t') dt'$$



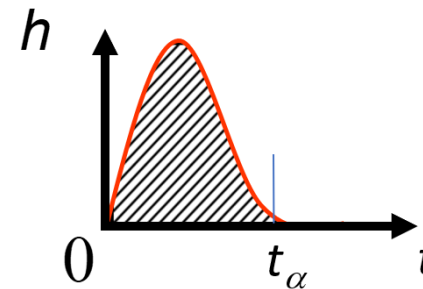
Si $h(t)$ est connue, comment l'utiliser en régime permanent (ss) et écrire :

$$y^{ss} = h^{ss} u^{ss}$$

Quand a t'on le droit d'extrapoler le régime permanent ?

- 1) Si $t > t_\alpha$ où t_α est la « durée de vie » de $h(t)$ au seuil α (pourcentage du cumul total)

$$\Rightarrow h^{ss} = H(\infty) = \int_0^\infty h(t) dt$$



Dose cumulée d'une fonction $x(t)$

$$X(t) \equiv \int_0^t x(t') dt'$$

- 2) Si niveaux asymptotiques atteints (régimes permanents « finaux ») pour $u(t)$ et $y(t)$



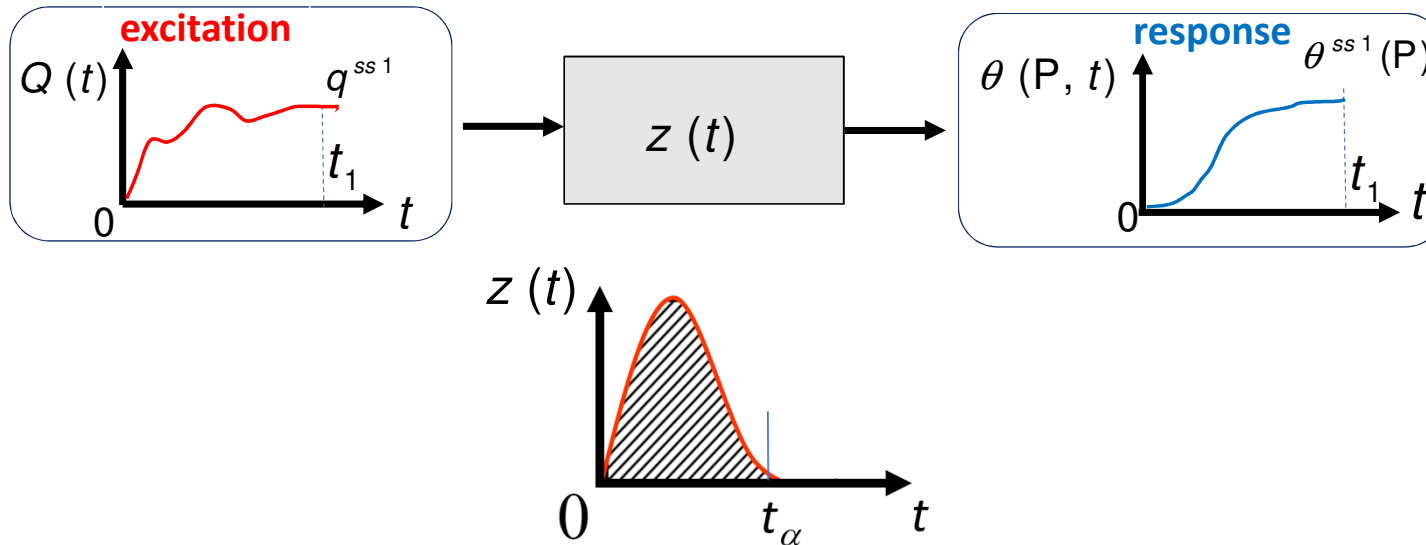
$$h^{ss} = Y(\infty) / U(\infty)$$

- 3) Cas d'un régime glissant: si $Y(t) / U(t) = \text{Cte}$ dès que $t > \text{seuil}$ (advection nécessaire)



$$y(t) = h^{ss} u(t)$$

Cas d'une excitation en puissance $q(t) = q^{ss0} + Q(t)$



$$\theta = z * Q \Rightarrow T(P, t) - T^{ss0}(P) = (z * q)(P, t) - z^{ss0}(P) q^{ss0}$$

$$t = t_1 \Rightarrow T^{ss1}(P) - T^{ss0}(P) = z^{ss}(P) (q^{ss1} - q^{ss0}) \Rightarrow$$

$$\Delta T^{ss}(P) = z^{ss}(P) \Delta q^{ss}$$

résistance généralisée
entre états initial et final

Calcul pratique des sorties: Forme matricielle d'un produit de convolution [3]

Introduction d'une matrice carrée, fonction

$\mathbf{N}(\cdot)$ qui dépend d'un vecteur-colonne \mathbf{x} :

$\mathbf{N}(\mathbf{x})$ est **une Matrice Triangulaire Inférieure de Toeplitz (MTIT)**
 (l'ensemble des MTIT = anneau commutatif*)

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} x_1 & & & & \\ x_2 & x_1 & & & 0 \\ x_3 & x_2 & x_1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_k & x_{k-1} & x_{k-2} & \cdots & x_1 \end{bmatrix}$$

Domaine temporel continu:

$$y(t) = (h * u)(t)$$

Domaine de Laplace :

$$\bar{y}(p) = \bar{h}(p) \bar{u}(p)$$

Forme vectorielle discrète :

$$y = \mathbf{M}(u) \quad h = \mathbf{M}(h) u$$

modèle pour
identifier $h(t)$

modèle pour
estimer $u(t)$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\mathbf{x}) &\equiv \mathbf{N}^2(\mathbf{f}) \mathbf{N}(\mathbf{x}) \\ \text{avec } \mathbf{f} &= \frac{1}{2} [1 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T \\ \text{NB : } \mathbf{M}(\mathbf{x}) &= \Delta t \mathbf{N}(\tilde{\mathbf{x}}) \\ \text{avec } \tilde{x}_i &= \frac{1}{4} (x(t_{i-2}) + 2x(t_{i-1}) + x(t_i)) \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}} \\ &\quad \text{3 valeurs présentes et passées} \end{aligned}$$

Loi thermique au point P_{wall} de la paroi

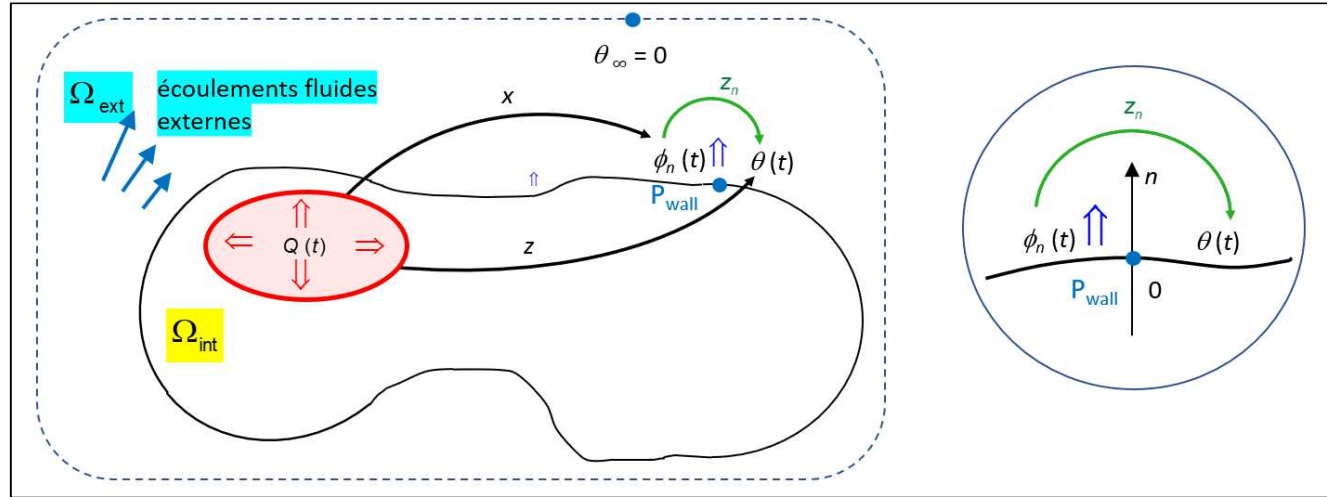
$$\left. \begin{aligned} \bar{\theta} &= \bar{z} \bar{Q} \\ \bar{\phi}_n &= -\lambda_{\text{wall}} \frac{\partial \bar{z}}{\partial n}(0^-) \bar{Q} = \bar{x} \bar{Q} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \bar{\theta} = \bar{z}_n \bar{\phi}_n$$

où $\bar{z}_n = \bar{z} / \bar{x} = - \left(\lambda_{\text{wall}} \frac{\partial \ln \bar{z}}{\partial n}(0^-) \right)^{-1}$

$$T(t) \triangleq T^{\text{ss0}} + \theta(t)$$

$$\phi_n(t) \triangleq \phi_n^{\text{ss0}} + \phi_n(t)$$

$$\theta(t) \triangleq T - T^{\text{ss0}} = z_n * (\phi_n - \phi_n^{\text{ss0}})$$



Hypothèse supplémentaire: aux temps négatifs, la seule source permanente qui s'exerce sur le système est q^{ss0} (même support spatial).

Modèle aux temps négatifs résolu en $\beta(P) = T^{\text{ss0}}(P) - T_\infty \rightarrow$ même EDP et CL que pour q en permanent :

$$\left. \begin{aligned} \beta &= z^{\text{ss}} q^{\text{ss0}} \\ \phi_n^{\text{ss0}} &= x^{\text{ss}} q^{\text{ss0}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \beta = T^{\text{ss0}} - T_\infty = z_n^{\text{ss}} \phi_n^{\text{ss0}}$$

où: $z_n^{\text{ss}} = z^{\text{ss}} / x^{\text{ss}}$

$$T_{\text{wall}} - T_\infty = z_n * \phi_n$$

transitoire

$$T_{\text{wall}}^{\text{ss}} - T_\infty = z_n^{\text{ss}} \phi_n^{\text{ss}}$$

permanent

- Coefficient d'échange par convection forcée externe (permanent, une seule source) :

$$h_{\text{conv}} = 1 / z_n^{\text{ss}} = - \left(\lambda_{\text{wall}} \int_0^\infty \frac{\partial \ln z}{\partial n}(P_{\text{wall}}^-, t) dt \right)^{-1}$$

- h_{conv} dépend du support géométrique de la source

- Impédance de paroi z_n et produit de convolution sont intrinsèques

- Ne pas écrire: $\phi_n(P, t) = h(t) (T_{\text{wall}}(P, t) - T_\infty)$

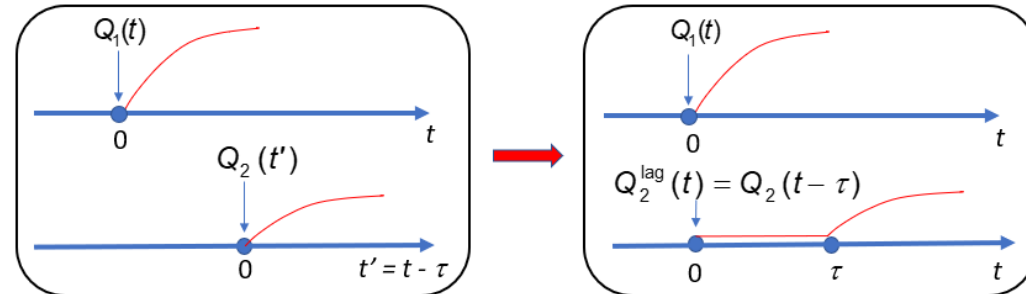
Cas de 2 sources (composantes transitoires) : temps initiaux et supports différents (non-séparabilité)

1) Synchronisation origines des temps

$$Q_2^{\text{lag}}(p) = \exp(-p\tau) Q_2(p)$$

$$\theta^{\text{lag}(2)}(p) = \exp(-p\tau) \theta^{(2)}(p)$$

$$\phi^{\text{lag}(2)}(p) = \exp(-p\tau) \theta^{(2)}(p)$$



2) Superposition des réponses en variation (température et densité de flux pariétales) pour 2 sources

$$\eta^{(1)} \triangleq T_{\text{wall}}^{(1)} - T_{\infty} = z_n^{(1)} * \phi_n^{(1)}$$

$$\eta^{\text{lag}(2)} \triangleq T_{\text{wall}}^{(2)} - T_{\infty} = z_n^{(2)} * \phi_n^{\text{lag}(2)}$$

$$\phi_n^{(1+2)} \triangleq \phi_n^{(1)} + \phi_n^{\text{lag}(2)}$$

$$\eta^{(1+2)} \triangleq T_{\text{wall}}^{(1+2)} - T_{\infty} = \eta^{(1)} + \eta^{\text{lag}(2)} \Rightarrow T_{\text{wall}}^{(1+2)} - T_{\infty} \triangleq z_n^{(1+2)} * \phi_n^{(1+2)}$$

$$\bar{z}_n^{(1+2)} = \frac{\bar{\phi}_n^{(1)}}{\bar{\phi}_n^{(1+2)}} \bar{z}_n^{(1)} + \frac{\bar{\phi}_n^{\text{lag}(2)}}{\bar{\phi}_n^{(1+2)}} \bar{z}_n^{(2)}$$

transitoire

- Impédance pariétale ≠ addition de 2 produits de convolution
- Cette écriture n'est pas intrinsèque
SAUF si $t >$ durée de vie de $z_n^{(1)}(t)$

- Pas d'addition des coefficients d'échange dus à chaque source
- Utilisation d'un coefficient d'échange unique → pas d'intérêt (simulation de transferts conjugués)

$$\phi_n^{ss(1+2)} = h_{\text{conv}} (T_{\text{wall}}^{ss(1+2)} - T_{\infty}) \quad \text{avec} \quad h_{\text{conv}} = 1 / \bar{z}_n^{(1+2)}(p=0)$$

permanent

Conclusions (1ère partie)

Analyse **conceptuelle** des transferts thermiques basée sur l'existence de fonctions de Green temporelles sur l'**ensemble** d'un système **fluide/solide** en convection forcée **externe** :

- **Approche transitoire** → permet d'identifier les causes du transfert (**sources**)
- Si présence **source transitoire unique et séparable**, avec système **EDP linéaire à coeff. invariants en temps**
 - existence d'une relation **intrinsèque** entre différence locale de température/flux pariétal local (NB: température de référence invariante en temps)
 - un produit de **convolution** temporel
 - basé sur une **réponse impulsionnelle** (impédance ici) qui dépend de la **structure du** système et du **support spatial de la source**.
 - la relation locale d'interface en **régime permanent** se déduit de cette impédance transitoire si elle est connue **analytiquement** (difficile) **ou estimée expérimentalement** (problème inverse)
- Si plusieurs sources transitoires, synchrones ou non et actives sur l'horizon temporel considéré, on ne peut rien dire **a priori** sur la validité de cette relation d'interface (problème des **temps de relaxation**)

Deuxième partie : Exemples de solution analytiques pour le calcul du coefficient d'échange en convection forcée externe

- ❑ Question: Peut-on disposer d'un modèle alternatif plus adapté que le coefficient d'échange pour décrire le transfert de chaleur pour un écoulement établi sur une plaque plane, pour des conditions d'interface solide/fluide variables en temps et en espace ?

- ❑ Cas « classique » : transfert de chaleur 1D permanent et uniforme en espace, on définit le coefficient d'échange :

$$\varphi = h (T_{wall} - T_{f\infty})$$

- ❑ Par extension, on peut toujours définir un coefficient d'échange variable en espace et en temps dans un cas 2 ou 3D :

$$\varphi(x,t) = h(x,t) (T_{wall}(x,t) - T_{f\infty})$$

Problème : la fonction $h(x,t)$ n'est pas intéressante car non intrinsèque au fluide pour décrire l'échange pariétal car elle dépend des propriétés de la paroi, des conditions aux limites thermiques et du support spatial des sources à l'origine du transfert.

Solution: Utilisation d'une impédance généralisée $Z(\omega, p)$

$$\omega = 2 \pi f_x : \text{pulsation spatiale (m}^{-1}\text{)} ; p : \text{variable de Laplace (s}^{-1}\text{)}$$

Problème générique (1/2)

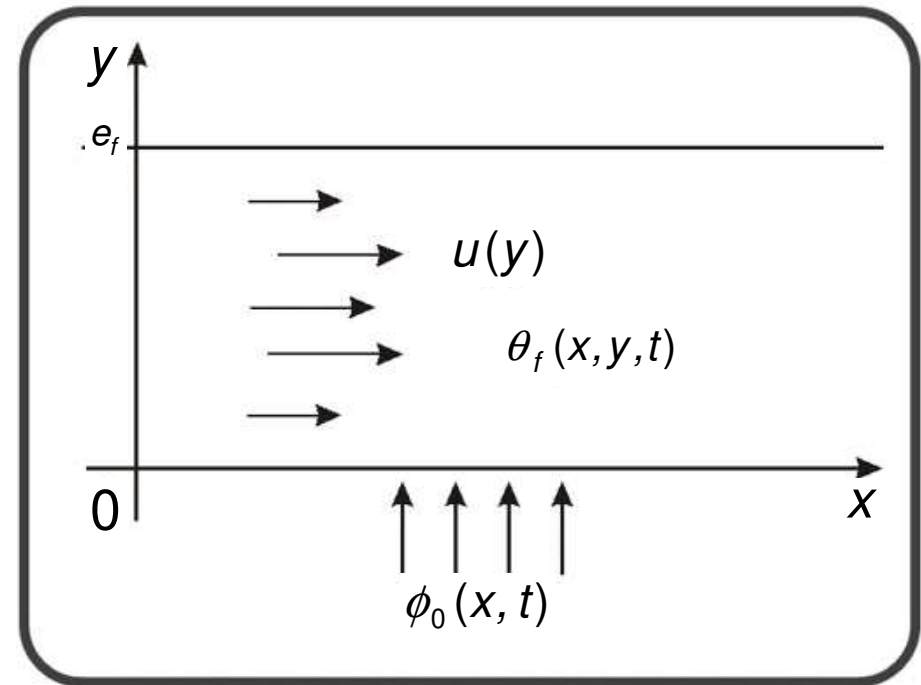
- Écoulement établi $u(y)$ entre deux plans $y = 0$ et $y = e_f$
- densité de flux imposée en $y = 0$
- domaine considéré : couche fluide

Eq. chaleur :
$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{u(y)}{a} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} = 0$$

CL $\left\{ \begin{array}{l} \text{en } x = \pm \infty : \quad \theta = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0 \\ \text{en } y = e_f : \quad \theta = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0 \\ \text{en } y = 0 : \quad -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial y} = \phi_0(x, t) \quad \text{ou} \quad \theta = \theta_0(x, t) \end{array} \right.$

CI à $t = 0$: $\theta = 0$

propriétés : $\phi_0(x, t=0) = 0$ ou $\theta_0(x, t=0)$



Problème générique (2/2)

La solution générique de ce problème est donné par transformations intégrales :

$$\bar{\psi}(x, y, p) = \int_0^{\infty} \psi(x, y, t) \exp(-pt) dt$$

Laplace temporel

pour $\psi = \theta$ ou ϕ

$$\tilde{\psi}(\omega, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x, y, t) \exp(-i\omega x) dx$$

Fourier spacial

Après double transformation, l'équation de la chaleur devient :

$$\frac{\partial^2 \tilde{\theta}}{\partial y^2} = \left(\frac{p}{a} + \omega^2 + i\omega \frac{u(y)}{a} \right) \tilde{\theta}$$

La solution générale s'écrit (forme quadripolaire) :

$$\begin{bmatrix} \tilde{\theta}(\omega, 0, p) \\ \tilde{\phi}(\omega, 0, p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(\omega, p) & B(\omega, p) \\ C(\omega, p) & D(\omega, p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta} \\ \tilde{\phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(\omega, e_f, p) \\ \tilde{\phi}(\omega, e_f, p) \end{bmatrix}$$

➤ Si $\theta = 0$ en $y = e_f$:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(\omega, 0, p) &= \frac{B(\omega, p)}{D(\omega, p)} \tilde{\phi}(\omega, 0, p) \\ &= \tilde{Z}_{\theta}(\omega, p) \tilde{\phi}(\omega, 0, p) \end{aligned}$$

➤ Si $\frac{\partial \theta}{\partial y} = 0$ en $y = e_f$:

$$\begin{aligned} \tilde{\theta}(\omega, 0, p) &= \frac{A(\omega, p)}{C(\omega, p)} \tilde{\phi}(\omega, 0, p) \\ &= \tilde{Z}_{\phi}(\omega, p) \tilde{\phi}(\omega, 0, p) \end{aligned}$$

\tilde{Z}_{θ} et \tilde{Z}_{ϕ} : impédances (opérationnelles) généralisées

Notion d'impédance pour modéliser le transfert de chaleur pariétal

- Il apparaît naturellement que l'approche la plus adaptée pour décrire les transferts à la paroi est d'introduire une impédance généralisée $\tilde{Z}(\omega, p)$.

- Par généralisation de l'approche classique, on peut définir un coefficient d'échange instantané et local :

$$\hat{h}(x, t) = L^{-1} \left[F^{-1} \left[1 / \tilde{Z}(\omega, p) \right] \right]$$

mais dans ce cas, l'écriture de la condition limite pariétale $\phi(x, 0, t) = \hat{h}(x, t) \theta(x, 0, t)$ est erronée.

- On devrait écrire plutôt :

$$\phi(x, 0, t) = \hat{h}(x, t) \otimes \theta(x, 0, t) \quad (\text{double produit de convolution})$$

$$\text{avec } (a \otimes b)(x, t) \triangleq \int_0^\infty \int_{x'=-\infty}^\infty a(x', t') b(x-x', t-t') dx' dt'$$

- Pour être utile, $\hat{h}(x, t)$ doit être estimé. Cependant, pour des raisons de causalité et de thermodynamique, ce n'est pas possible (problème inverse mal-posé).
- En pratique, seul l'original $z(x, t)$ de l'impédance généralisée $\tilde{Z}(\omega, p)$ peut être déterminé analytiquement ou numériquement (fonction continue à expression analytique).

Transfert de chaleur pariétal pour plaque plane en **régime transitoire** et écoulement piston semi-infini

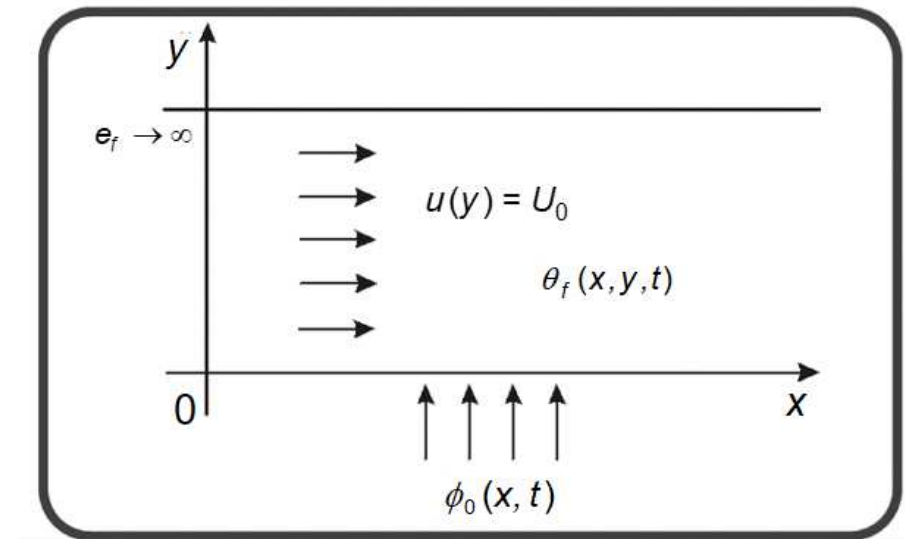
$$\theta(x, 0, t) = z(x, t) \otimes \phi(x, 0, t) \quad \text{avec} \quad z(x, t) = L^{-1} \left[F^{-1} \left[\tilde{z}(\omega, p) \right] \right]$$

Cas particulier: $u(y) = U_0$ pour $y > 0$ et $e_f \rightarrow \infty$

valeurs explicites des 4 coefficients
quadripolaires A , B , C et D

→ même expression pour $\theta_\infty = 0$ ou $\frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=\infty}$:

$$\tilde{z}_\infty = \frac{1}{\lambda_f \alpha} = \frac{1}{\lambda_f \sqrt{\omega^2 + \frac{p}{a_f} + \frac{U_0}{a_f} i \omega}}$$



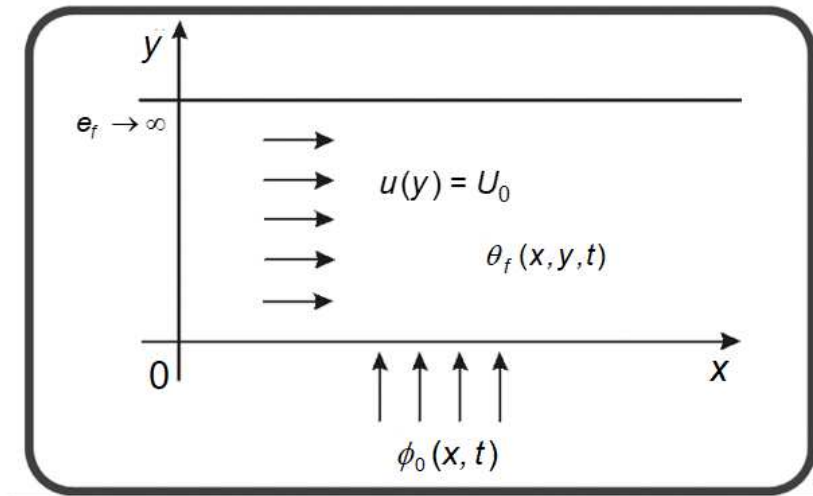
- NB: □ \tilde{z}_∞ est une fonction décroissante de p et a donc un original(et non $1 / \tilde{z}_\infty$)
 □ \tilde{z}_∞ ne dépend pas de la condition limite en $y = 0$

Transfert de chaleur pariétal pour plaque plane en **régime permanent** et écoulement piston semi-infini (1/2)

$$\cancel{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} - \frac{u(y)}{a} \frac{\partial \theta}{\partial x} - \cancel{\frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t}} = 0$$

U_0

- Régime permanent, écoulement piston, conduction en x négligée
- Transformée de Laplace en x avec s = variable de Laplace



$$\frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial y^2} = \frac{U_0}{a_f} (s \bar{\theta} - \cancel{\theta(y, 0)}) \Rightarrow \bar{\theta}(y, s) = k \exp\left(-\sqrt{\frac{U_0 s}{a_f}} y\right)$$

$$\Rightarrow \bar{\theta}(s, y=0) = \bar{z}(s) \bar{\phi}(s, y=0)$$

Impédance opérationnelle de Laplace en paroi:

où $b_f = \sqrt{\lambda_f \rho c_f}$: effusivité thermique

$$\bar{z}(s) = \frac{1}{b_f \sqrt{U_0 s}} \Rightarrow z(x) = \frac{1}{b_f \sqrt{U_0} \sqrt{\pi x}}$$

Transfert de chaleur pariétal pour plaque plane en **régime permanent** et écoulement piston semi-infini (1/2)

$$\phi(x, y=0) = h(x) \theta(x, y=0)$$

définition de $h(x)$

$$\theta(x, y=0) = (z * \phi)(x, y=0) = \int_0^x z(x') \phi(x - x', y=0) dx'$$

modèle exact d'interface

- Température imposée uniforme en $y=0$: $\theta = \theta_0$

$$h(x) = \frac{b_f \sqrt{U_0}}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

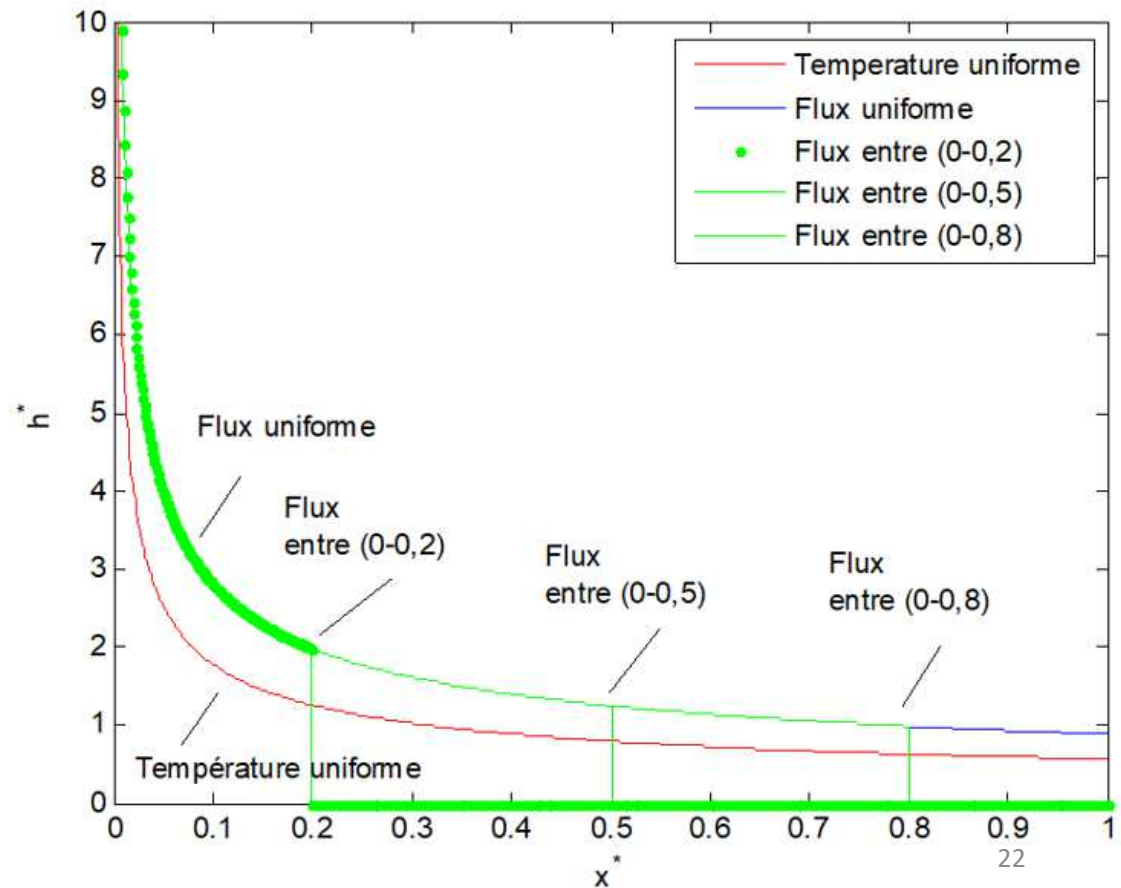
- Densité de flux uniforme en $y=0$: $\phi = \phi_0$

$$h(x) = \frac{b_f \sqrt{U_0} \sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

- Densité de flux uniforme entre $x=a$ et $x=b$

$$h(x) = \frac{b_f \sqrt{U_0} \sqrt{\pi}}{2} \frac{\gamma(x-a) - \gamma(x-b)}{\gamma(x-a) \sqrt{x-a} - \gamma(x-b) \sqrt{x-b}}$$

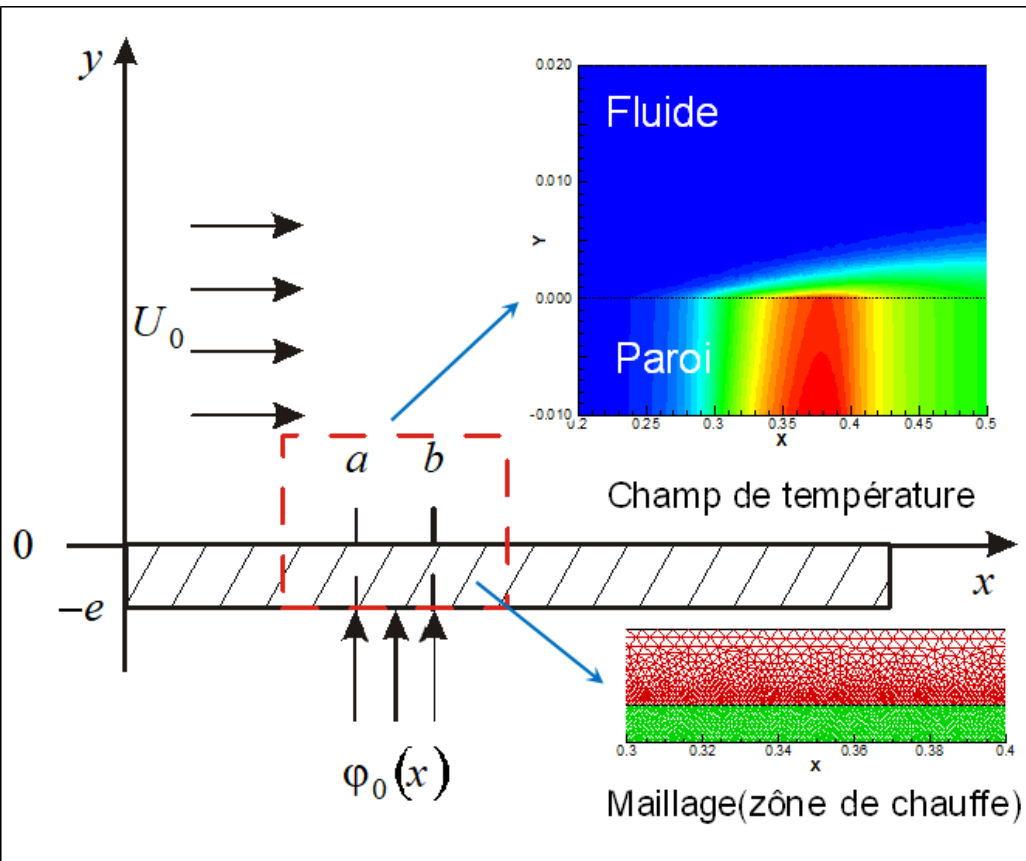
$\gamma(x)$: fonction de Heaviside



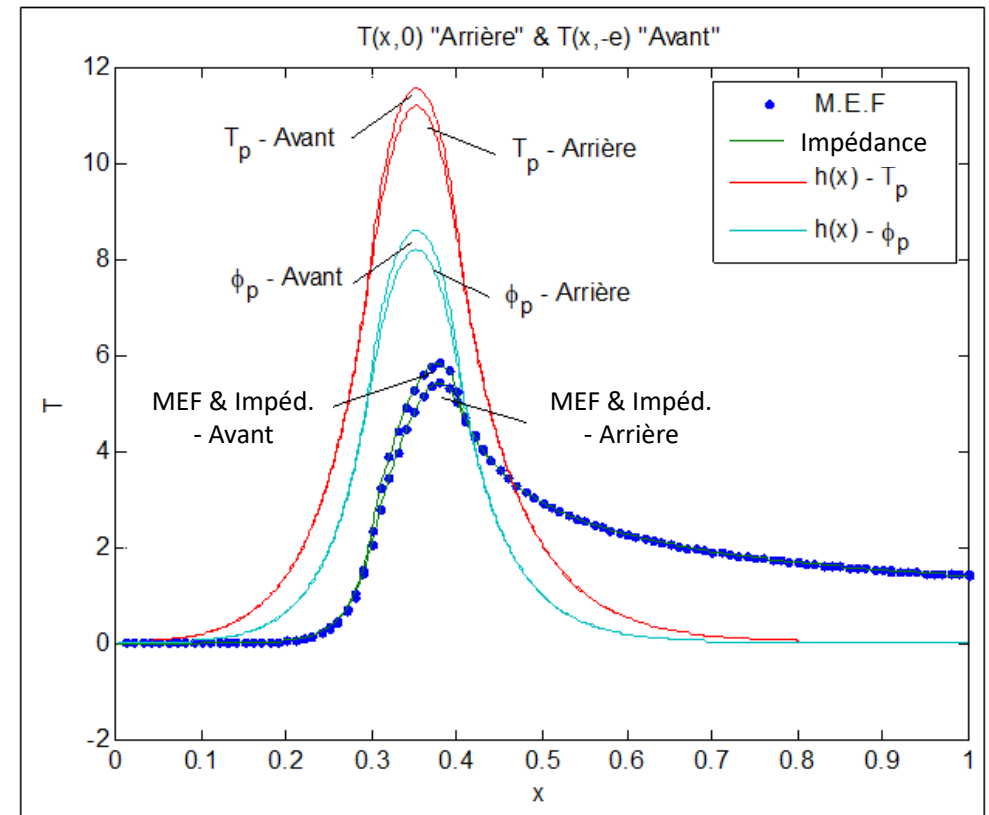
Transfert conjugué : couplage fluide / plaque plane épaisse

Dans le cas général, les températures sur les faces supérieure ($y = 0$) et inférieure du solide ($y = -e$) peuvent être calculées :

1) par un **calcul numérique** sur le domaine complet (fluide et plaque) par MEF, ou 2) en utilisant l'**impédance d'interface $z(x)$** , ici en Laplace spatial








Couplage thermique fluide - paroi



Comparaison des profils de température de la plaque en "Face-arrière" $T(x,0)$ et "Face-avant" $T(x,-e)$

Conclusion (2^{ème} partie)

Nous avons montré que le modèle le plus adapté pour décrire les échanges pariétaux consiste à introduire la notion d'impédance généralisée $Z(w, p)$ plutôt qu'un coefficient d'échange variable en espace et en temps $h(x, t)$.

-  Il est intrinsèque au fluide et en particulier, il ne dépend pas des conditions aux limites thermiques et des propriétés thermiques du solide.
-  Sa mise en œuvre est simple car il apparaît comme un simple produit de convolution dans les conditions limites thermiques de la paroi.
-  Un exemple a été donné en régime permanent mais le résultat est identique pour les problèmes transitoires.
-  Pour des cas plus complexes, cette impédance ne peut plus être calculée analytiquement comme cela a été fait ici. Cependant, elle peut être estimée expérimentalement par technique inverse à partir de mesures thermographiques par exemple (dans ce cas, il vaut mieux rechercher à identifier l'impédance plutôt que le coefficient d'échange).
-  Une seule expérience est "théoriquement" requise pour identifier l'impédance du système qui peut être ensuite utilisée pour simuler la réponse de ce même système à toutes autres conditions aux limites thermiques.

REFERENCES

- [1] A. Degiovanni, B. Rémy, An alternative to heat transfer coefficient: a relevant model of heat transfer between a developed fluid flow and a non-isothermal wall in the transient regime, *International Journal of Thermal Sciences*, Volume 102, April 2016, Pages 62–77.
- [2] W. Al Hadad, D. Maillet, Y. Jannot, Modeling unsteady diffusive and advective heat transfer for linear dynamical systems: A transfer function approach, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 115 (2017) 304–313.
- [3] H. Dogan, K. A. Khalil, L. R. Suarez, Some results on the ideals of real-valued lower triangular Toeplitz matrices, *Turk. J. Math. Comput. Sci.* vol. 9, pp. 50–54, 2018.

Convection interne

- [A] El Maakoul, A., Degiovanni, A., Impedance identification in a hydrodynamically developed flow, *International Journal of Thermal Sciences*, 2019, 135, pp. 148–162.

Conduction

- [B] El Maakoul, A., Moyne, C., Degiovanni, A. A, general approach to solve heat conduction problems with internal heat sources using resistance and quadrupole concepts, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2019, 129, pp. 793–800.
- [C] Degiovanni, A., Pradere, C., Ruffio, E., Battaglia, J.-L., Advanced thermal impedance network for the heat diffusion with sources, *International Journal of Thermal Sciences*, 2018, 130, pp. 518–524.

Thermal Quadrupoles

- [D] H.S. Carslaw & J.C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford U. Press, 1947
- [E] L. A. Pipes, *Matrix analysis of heat transfer problems*, *Journal of the Franklin Institute*, vol. 263, n° 3, pp. 195-205, 1957
- [F] D. Maillet, S. André, J.C. Batsale, A. Degiovanni, C. Moyne, *Thermal Quadrupoles – Solving the heat equation through integral transforms*, Wiley, 2000.

Conduction + advection interne

[G] W. Al Hadad, D. Maillet, Y. Jannot, Experimental transfer functions identification: Thermal impedance and transmittance in a channel heated by an upstream unsteady volumetric heat source, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 116 (2018) 931–939.

[H] W. Al Hadad, Y. Jannot, V. Schick, B. Rémy, D. Maillet, Transient characterization of a heat exchanger through identification of its transfer functions, Paper IHTC16-21381, *Proceedings of the International Heat Transfer Conference (IHTC-16)*, Beijing, August 10-15, 2018

[I] W. Al Hadad, V. Schick, D. Maillet, Fouling detection in a shell and tube heat exchanger using variation of its thermal impulse responses: Methodological approach and numerical verification, *Applied Thermal Engineering*, Volume 155 (2019) 612–619.

[J] W. Al Hadad, B. Pfortner, W. Al Hadad, V. Schick, D. Maillet, C. Zacharie, B. Remy , Transient detection of either maldistribution or flowrate change in a counter-current plate-fin heat exchanger using an ARX model, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Volume 182 (January 2022) 121987, DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2021.121987>

Conduction + rayonnement

[K] Thomas Loussouarn, Denis Maillet, Benjamin Remy, Diane Dan, Model reduction for experimental thermal characterization of a holding furnace, *Heat and Mass Transfer*, Volume 54, Issue 8, 1 (2018), Pages 2443-2452, DOI 10.1007/s00231-017-2156-7.

Convection forcée turbulente et transfert de masse

[L] F. Chata, E. Belut, D. Maillet, F.X. Keller, A. Taniere, Estimation of an aerosol source in forced ventilation through prior identification of a convolutive model, *International Journal of Heat and Mass Transfer* 108 (2017) 1623–1633.

Convection naturelle

[M] G. Maranzana, S. Didierjean, B. Rémy, D. Maillet, Experimental estimation of the transient natural convection heat transfer coefficient on a vertical flat plate *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 45, n° 16, pp. 3413 – 3427, 2002.

Planches complémentaires

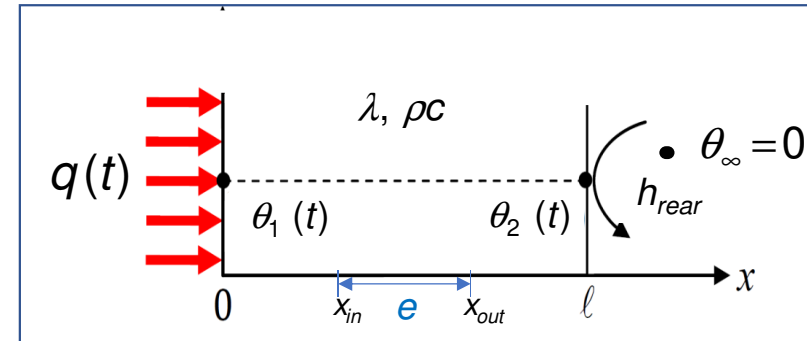
Résolution Quadripolaire 1D et réponse impulsionnelles

Equation de la chaleur(1) $\left\{ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial \theta}{\partial t} \right.$

Condition initiale (2) $\left\{ \theta = 0 \text{ at } t = 0 \text{ for } 0 \leq x \leq \ell \right.$

Conditions limites (3) $\left\{ \begin{array}{l} \phi = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial t} = q(t) \text{ at } x = 0 \text{ for } t > 0 ; \\ \phi = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial t} = h_{rear} \theta \text{ at } x = \ell \text{ for } t > 0 \end{array} \right.$

$$\theta(t) = T(x, t) - T(x, t=0)$$



Utilisation: **Thermal Quadrupole** Method [D, E, F]

Laplace transform

$$\bar{\psi}(x, p) \equiv \int_0^t \psi(x, t) \exp(-pt) dt \text{ for } \psi = \theta \text{ or } \phi$$

Variation de température Densité de flux

$$\begin{array}{c} \text{inconnue} \\ \downarrow \\ \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1(p) \\ \bar{q}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_\ell(p) & B_\ell(p) \\ C_\ell(p) & D_\ell(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_2(p) \\ \bar{\phi}_2(p) \end{bmatrix} \end{array}$$

↑ **donnée** **matrice QP** ↑ **inconnue**

and (3b) \Rightarrow $\begin{bmatrix} \bar{\theta}_2(p) \\ \bar{\phi}_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/h_{rear} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{\phi}_2(p) \end{bmatrix}$ **matrice QP**

3 équations
3 inconnues

Impédances, transmittances et causalité

Produit de matrices \rightarrow

$$\begin{bmatrix} \bar{\theta}_1(p) \\ \bar{q}(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A(p) & B(p) \\ C(p) & D(p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\theta}_2(p) \\ 0 \end{bmatrix}$$

1 entrée (source réelle) – 3 sorties

Solution dans domaine de Laplace \rightarrow $\bar{\theta}_1 = \frac{A}{C} \bar{q}$; $\bar{\theta}_2 = \frac{1}{C} \bar{q}$; $\bar{\phi}_2 = \frac{h}{C} \bar{q}$

impédance impédance transmittance

Autre technique: utilisation produit de convolution

$$\bar{\theta}_1 = \bar{Z}_1 \bar{q} ; \bar{\theta}_2 = \bar{Z}_2 \bar{q} ; \bar{\phi}_2 = \bar{w}_{flux} \bar{q}$$

impédances Transmittance
(pour flux arrière)

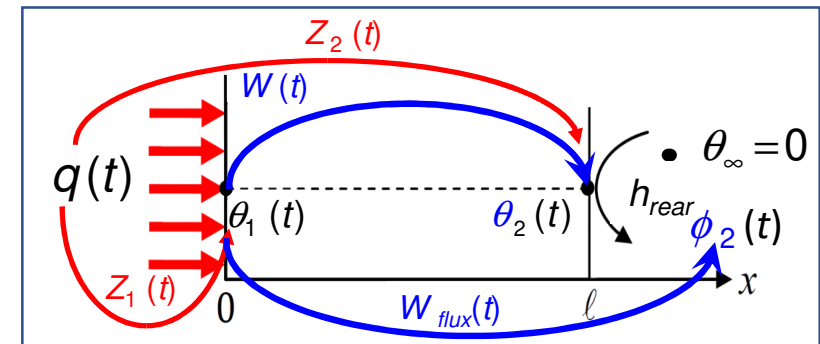
$$\bar{\theta}_2 = \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1} \bar{\theta}_1 = \bar{w} \bar{\theta}_1$$

Transmittance (température)

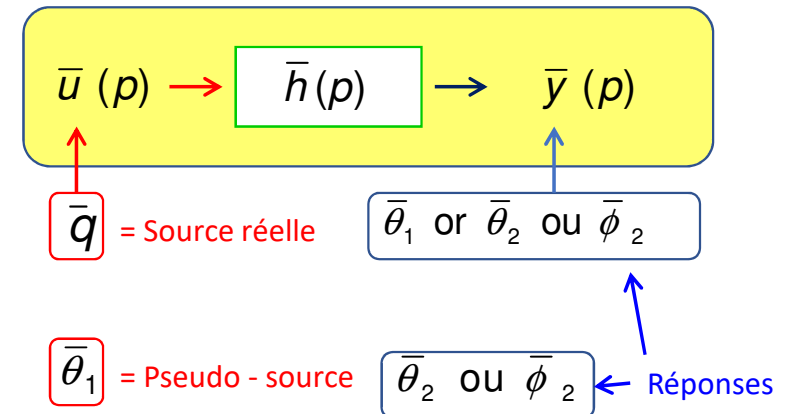
$$\bar{\phi}_2 = \frac{\bar{w}_{flux}}{\bar{Z}_1} \bar{\theta}_1 = \bar{a}_d \bar{\theta}_1$$

Admittance

Causalité : $\mathcal{L}^{-1} [\bar{Z}_1 / \bar{Z}_2]$ n'existe pas



1 entrée (pseudo-source) – 2 sorties

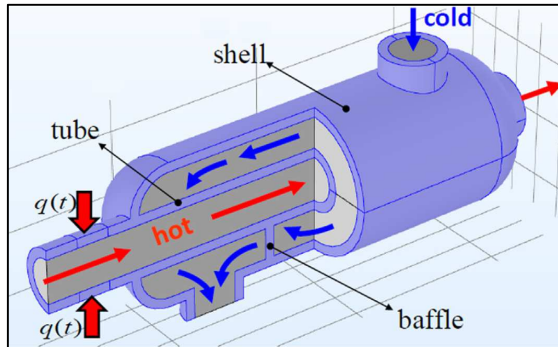


Inversion de la transformée de Laplace

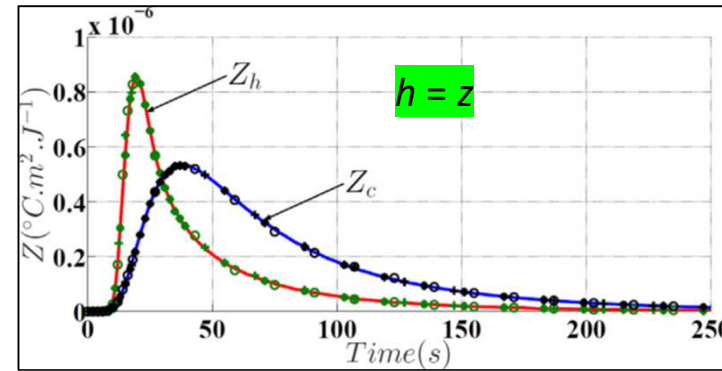
- Retour dans domaine temporel: inversion de transformée de Laplace = problème mal-posé
- **Cas simples** → Solutions analytiques:
 - Tables de transformées de Laplace
 - Fractions rationnelles (zéros/poles)
- **Cas général:**
 - Intégrale de **Broomwich** (involved technique)
 - Inversion numérique : 1) Algorithme de **Gaver Stehfest** (très simple)
 - 2) via la transformation de **Fourier**
 - 3) Algorithme de **de Hoog** (Invlap sous MATLAB), de **den Iseger**, ...

Forme des réponses impulsionnelles en conduction/advection interne transitoire: $y(t) = (h * u)(t)$

Identification d'impédances $z(t)$ (échangeur à plaques et coque) : **réduction de modèle numérique [H]**



2 entrées $q(t)$ différentes (échelon et rampe)



Identification (calibration expérimentale) d'une transmittance (échangeur à plaque et ailettes – courants //) [I]

