

Transferts thermo-fluidiques en écoulement alterné incompressible dans un canal régénérateur - Analyse d'échelles et effet annulaire.

Thierry de LAROCHELAMBERT^{1(*)}, Yannick BAILLY¹, Jean-Claude ROY¹, Mickaël PERRIN¹, Ali ISMAIL¹, Thierry BARRIERE¹

¹ Université Marie et Louis Pasteur, CNRS, Institut FEMTO-ST, UMR6174 25000 Besançon, France

(*) thierry.larochelambert@femto-st.fr

Résumé - L'efficacité des transferts thermo-fluidiques par écoulement alterné de fluide caloporteur au sein de régénérateurs à plaques actifs ou passifs dans les nouvelles machines de froid est l'un des verrous les plus difficiles à lever. L'existence d'un *effet annulaire* dans l'écoulement – favorable ou défavorable à ces échanges – est étudiée par résolution analytique des équations thermo-fluidiques adimensionnelles. Une analyse d'échelles approfondie en fonction des nombres de Womersley et de Prandtl de l'écoulement établit leurs *valeurs critiques* et les échelles caractéristiques de l'effet annulaire.

Mots-clés : écoulements alternés, transferts thermo-fluidiques, analyse d'échelle, transformation de Laplace, analyse de Fourier, échelles caractéristiques, effet annulaire, couche limite visqueuse de Stokes, nombres critiques de Womersley.

Nomenclature

a	diffusivité thermique, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	t	temps, s
D_h	diamètre hydraulique, m	T	température, K
C_f	coefficient de friction	u	vitesse axiale, m s^{-1}
e	demi-hauteur de canal, m	x	distance axiale, m
h	coeff. d'échange thermique, $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-1}$	y	distance normale à la paroi, m
L	longueur, m	<i>Symboles grecs</i>	
k	conductivité thermique, $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$	δ	épaisseur caractéristique, m
p	pression, Pa	ν	viscosité cinématique, $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$
q	flux thermique, W	ρ	masse volumique fluide, kg m^{-3}
Po	nombre de Poiseuille	ω	pulsation, rad s^{-1}
Pr	nombre de Prandtl	<i>Indices et exposants</i>	
r	distance au plan de symétrie, m	av	moyenne locale sur la largeur $2e$
Re	nombre de Reynolds	0	statique
Re_ω	nombre de Womersley	RMS	root-mean-square (efficace)
		w	parietal ($r = \pm e$)

1. Introduction

Les progrès récents obtenus dans la modélisation et la simulation numérique des échanges thermo-fluidiques au sein des régénérateurs actifs (magnéto- et électro-caloriques) [1] ou passifs (machines Stirling et thermo-acoustiques) permettent de bien reproduire les résultats expérimentaux obtenus sur bancs d'essais [2][3], de mieux dimensionner les régénérateurs pour accroître leurs performances [4] et d'économiser efficacement matériaux et énergie [5].

Une investigation approfondie des transferts thermo-fluidiques aux parois et dans tout le volume d'écoulement a été effectuée au laboratoire expérimentalement et par simulations numériques [6], et par résolution complète des équations de transfert dans les domaines de Laplace et de Fourier [7], pour obtenir les solutions analytiques de toutes les grandeurs physiques dans

le cas général des écoulements *transitoires quelconques* en régime laminaire (cas le plus fréquent des cycles actifs magnétiques régénératifs AMR). Les équations générales et les conditions aux limites imposées sont présentées en [section 2](#). Les solutions générales en régime *harmonique* sont détaillées en [section 3](#). Les échelles caractéristiques thermiques et dynamiques et les nombres adimensionnels émergeant des équations sont décrits en [section 4](#), ainsi que leur implication dans les transferts thermo-fluidiques et dans l'apparition des effets annulaires.

2. Résolution analytique des équations thermo-fluidiques transitoires

2.1. Équations générales

L'écoulement alterné, de vitesse moyenne u_0 nulle et de pulsation ω , est supposé incompressible et laminaire à tout instant (d'après les critères de Lodahl et al. [8] et Kurzweg et al. [9]). Seuls sont considérés les micro-canaux plans symétriquement chauffés (cas des régénératifs), de sorte que le nombre de Richardson Ri reste inférieur à 0,01 dans les conditions opérationnelles habituelles des régénératifs, rendant négligeable la convection naturelle. La longueur L du canal étant très grande devant sa largeur $2e$, l'écoulement est *pleinement développé*.

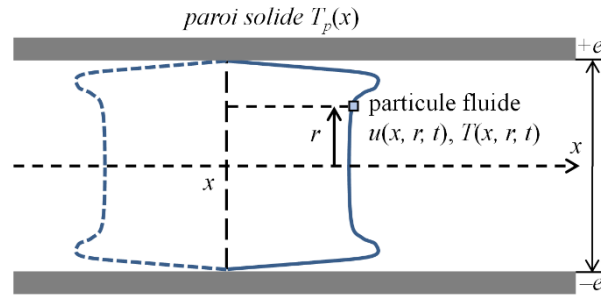


Figure 1 : Coordonnées fluidiques sur profil dynamique ou thermique en écoulement alterné.

Négligeant les termes de dissipation visqueuse et de dilatation, les équations générales de continuité (1a), d'impulsion (1b) et d'enthalpie (1c) sont réduites à

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \text{ (a)}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \text{ (b)}; \quad \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \text{ (c)}, \quad (1)$$

avec $v(x, r, t) = 0$ par invariance dynamique en x et antisymétrie normale à l'écoulement. Les variables locales liées au fluide sont décomposées en une partie moyenne constante (indice 0) et une partie fluctuante (prime) :

$$p(x, t) = p_0(x) + p'(x, t); \quad T(x, r, t) = T_0(x) + T'(x, r, t); \quad u(r, t) = u'(r, t), \quad (2)$$

l'équation (1a) impliquant l'invariance en x de la vitesse axiale u' . La vitesse axiale moyenne u_0 étant nulle, le gradient axial de la pression axiale ($\partial p_0 / \partial x$) l'est aussi, et le gradient des fluctuations $|\partial T' / \partial x|$ est négligeable devant $|\partial T_0 / \partial x|$. Les équations (1b) et (1c) se réduisent donc à :

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u'}{\partial r^2} \text{ et } \frac{\partial T'}{\partial t} + u'(r, t) \frac{\partial T_0}{\partial x} \approx a \frac{\partial^2 T'}{\partial r^2} \quad (3)$$

2.2. Conditions aux limites de la résolution analytique

Les conditions de *non-glissement* aux parois $\{u' = 0 \text{ en } r = \pm e\}$ et de *symétrie* par rapport au plan central $\{\partial u' / \partial r = 0 \text{ en } r = 0\}$ sont imposées dans tout l'écoulement du micro-canal. L'écoulement est supposé *établi*, avec une vitesse moyenne imposée de pulsation ω et de module U_0 .

Le gradient axial constant de température moyenne $\partial T_0 / \partial x$ est supposé indépendant du temps et imposé par un flux thermique pariétal variable et spatialement uniforme $q_w(t)$, ce qui est approximativement le cas dans la plupart des études expérimentales et théoriques sur les régénérateurs magnétocaloriques dans les cycles AMR [10][11]. Les fluctuations de température vérifient les conditions $\{\partial T' / \partial r = 0 \text{ en } r = 0 ; T' = 0 \text{ en } r = \pm e\}$.

2.3. Échanges thermo-fluidiques en écoulements alternés

Dans les écoulements transitoires, et dans les écoulements alternés symétriques de pulsation ω où la vitesse est périodiquement nulle et où température et flux sont déphasés, les définitions usuelles des coefficients de frottement et d'échange thermique ne sont plus valides. En posant $T'_{av}(x, t) = T_{av}(x, t) - T_w(x)$, puisque $T(x, \pm e, t) = T_0(x) + T'(x, \pm e, t) = T_w(x) = T_0(x)$, nous proposons dans notre étude [7] de définir ces coefficients et leurs valeurs efficaces par :

$$C_f(t) = \frac{-v \frac{\partial u'}{\partial r} \Big|_w}{\frac{1}{2} |U'|^2} \text{ et } C_{fRMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} C_f^2(\omega t) d(\omega t)} \quad (4a)$$

$$h_{av}(t) = k \frac{-\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_w}{T'_{avRMS}} \text{ et } T'_{avRMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} T'^2_{av}(\omega t) d(\omega t)}, \quad (4b)$$

Les nombres de Poiseuille (perte visqueuse) et Nusselt (transfert thermique) s'en déduisent :

$$Po(t) = Re_{\max} C_f(t) \text{ et } Po_{RMS} = Re_{\max} C_{fRMS}, \text{ avec } Re_{\max} = \frac{|U'| D_h}{\nu} \quad (|U'| = U_0) \quad (5a)$$

$$Nu_{av}(t) = \frac{h_{av}(t) D_h}{k}, \quad Nu_{RMS} = \frac{h_{RMS} D_h}{k} \text{ où } h_{RMS} = k \frac{\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{wRMS}}{T'_{avRMS}} = k \frac{\sqrt{\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \Big|_w \right)^2 dt}}{T'_{avRMS}}. \quad (5b)$$

3. Champs et transferts complexes en régime harmonique établi

Les champs dynamique et thermique en *régime harmonique transitoire* obtenus par transformation de Laplace [7] font apparaître une inversion des profils de vitesse et de température et des déphasages entre vitesse, contrainte visqueuse, température, flux thermique quand ω augmente. L'analyse d'échelle est menée à partir des équations (3-4) et des solutions adimensionnelles en *régime harmonique établi* de vitesse moyenne imposée $\underline{U}'(t) = U_0 e^{i\omega t}$, avec :

$$r^* = \frac{r}{e}, \quad \theta = \omega t, \quad u'^* = \frac{u'}{U_0}, \quad \Theta = \frac{T' \nu}{U_0 e^2 (dT_0 / dx)}, \quad (6)$$

$$\text{et } u'(r^*, \theta) = \underline{u}'(r^*) e^{i\theta}; \quad p(x, \theta) = p_0(x) + \underline{p}'(x) e^{i\theta}; \quad T(x, r^*, \theta) = T_0(x) + \underline{T}'(x, r^*) e^{i\theta}, \quad (7)$$

$$\text{d'où } \begin{cases} (a) & i \underline{u}'(r^*) = -\frac{1}{U_0 \rho \omega} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{4}{Re_\omega^2} \frac{\partial^2 \underline{u}'(r^*)}{\partial r^{*2}} \\ (b) & i \underline{\Theta}(r^*) + \frac{4 \underline{u}'(r^*)}{Re_\omega^2} = \frac{4}{Pr Re_\omega^2} \frac{\partial^2 \underline{\Theta}(r^*)}{\partial r^{*2}} \end{cases} \text{ avec } (c) Re_\omega = 2e \sqrt{\frac{\omega}{\nu}} = \frac{D_h}{2} \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}. \quad (8)$$

Re_ω est le nombre adimensionnel de Womersley [12], qui détermine l'écoulement avec le nombre de Prandtl $Pr = \nu/a$. Comme $\underline{u}_{av}^* = 1$, la vitesse complexe, solution de (20a), s'écrit :

$$\underline{u}^*(r^*, \theta) = \frac{Re_\omega}{Re_\omega + 2i^{3/2} \tanh(Re_\omega \sqrt{i}/2)} \left(1 - \frac{\cosh(Re_\omega \sqrt{i} r^*/2)}{\cosh(Re_\omega \sqrt{i}/2)} \right) e^{i\theta}, \quad (9)$$

et conduit aux nombres de Poiseuille complexe et efficace :

$$\underline{Po}(\theta) = -8 \frac{\partial \underline{u}^*}{\partial r^*} \Big|_1 = \frac{4Re_\omega^2 \sqrt{i}}{Re_\omega + 2i^{3/2} \tanh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i}}{2}\right)} \tanh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i}}{2}\right) e^{i\theta} \text{ et } Po_{RMS} = \frac{|Po(\theta)|}{\sqrt{2}}. \quad (10)$$

En introduisant la solution (9) dans l'équation (8b), on obtient la température complexe et les nombres de Nusselt complexe et efficace pour $Pr \neq 1$:

$$\underline{\Theta}(r^*, \theta) = \underline{\Theta}_p \left(1 + \frac{Pr}{1-Pr} \frac{\cosh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i} r^*}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i}}{2}\right)} - \frac{1}{1-Pr} \frac{\cosh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i} Pr r^*}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i} Pr}{2}\right)} \right) e^{i\theta} \quad (11)$$

$$\underline{Nu}(\theta) = \frac{4 \frac{\partial \underline{\Theta}}{\partial r^*} \Big|_1}{-\underline{\Theta}_{av}} = \frac{-2Re_\omega \sqrt{i} \left(\frac{Pr}{1-Pr} \tanh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i}}{2}\right) - \frac{\sqrt{Pr}}{1-Pr} \tanh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i} Pr}{2}\right) \right) e^{i\theta}}{1 + \frac{Pr}{1-Pr} \frac{2}{Re_\omega \sqrt{i}} \tanh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i}}{2}\right) - \frac{1}{1-Pr} \frac{2}{Re_\omega \sqrt{i} Pr} \tanh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i} Pr}{2}\right)} \quad (12)$$

avec $\underline{\Theta}_p = \frac{4i}{Re_\omega \left(Re_\omega + 2i^{3/2} \tanh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i}}{2}\right) \right)}$ et $Nu_{RMS}(Pr, Re_\omega) = 4 \frac{\left| \frac{\partial \underline{\Theta}}{\partial r^*} \Big|_1 \right|}{|-\underline{\Theta}_{av}|}, \quad (13)$

et les solutions pour $Pr = 1$ (même expression de $\underline{\Theta}_p$) :

$$\underline{\Theta}_1(r^*, \theta) = \underline{\Theta}_p \left(\frac{1 - \frac{\cosh(Re_\omega \sqrt{i} r^*/2)}{\cosh(Re_\omega \sqrt{i}/2)} \left(1 - \frac{Re_\omega \sqrt{i}}{4} \tanh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i}}{2}\right) \right) + \frac{Re_\omega \sqrt{i} r^*}{4} \frac{\sinh(Re_\omega \sqrt{i} r^*/2)}{\cosh(Re_\omega \sqrt{i}/2)}}{1} \right) e^{i\theta} \quad (14)$$

$$\underline{Nu}_1(\theta) = \frac{4 \frac{\partial \underline{\Theta}_1}{\partial r^*} \Big|_1}{-\underline{\Theta}_{1av}} = \frac{-Re_\omega \sqrt{i} \left(\frac{Re_\omega \sqrt{i}}{2} - \tanh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i}}{2}\right) \left(1 + \frac{Re_\omega \sqrt{i}}{2} \tanh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i}}{2}\right) \right) \right)}{\frac{3}{2} - \frac{1}{Re_\omega \sqrt{i}} \tanh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i}}{2}\right) \left(3 + \frac{Re_\omega \sqrt{i}}{2} \tanh\left(\frac{Re_\omega \sqrt{i}}{2}\right) \right)}. \quad (15)$$

Les profils dynamiques de l'écoulement (Fig. 2a, b, c, d), typiquement paraboliques (écoulement de Poiseuille) aux bas nombres de Womersley, subissent une inversion proche des parois de plus en plus marquée au-dessus de $Re_\omega \sim 3$, caractéristique de l'*effet annulaire dynamique* [12]. Les profils thermiques (Fig. 3a, b, c, d) voient aussi apparaître un *effet annulaire thermique*, mais à partir de valeurs de Re_ω d'autant plus élevées que le nombre de Prandtl du fluide est petit. Dans ces huit figures, les profils successifs $u^*(r^*)$ et $\Theta^*(r^*)$ sont montrés à des angles de phase θ croissant de 0 à π , pour visualiser leur déformation au cours d'une demi-alternance.

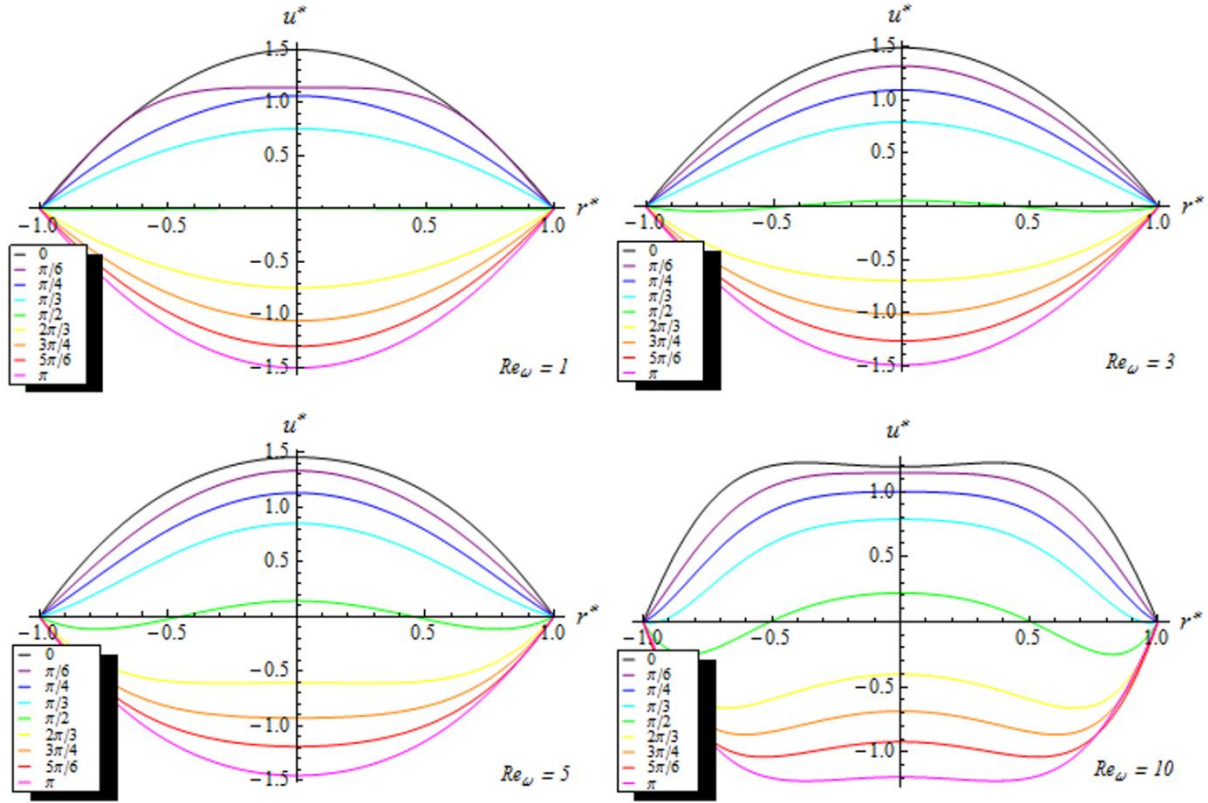


Figure 2 : Déformation du profil dynamique d'écoulement laminaire harmonique avec Re_ω .

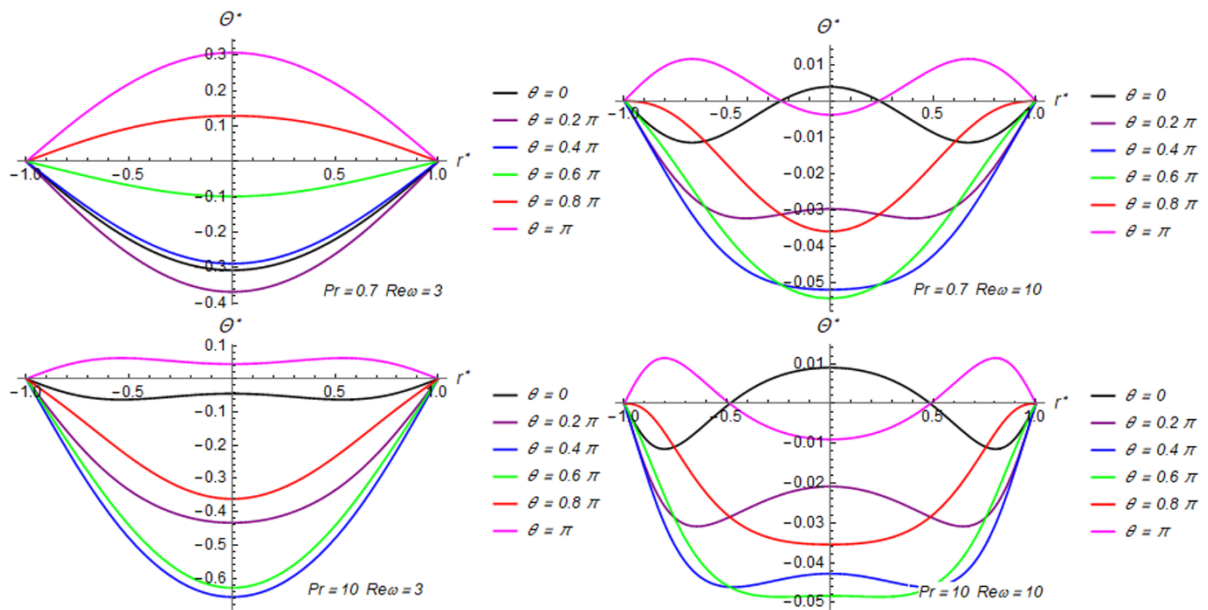


Figure 3 : Déformation du profil thermique d'écoulement laminaire harmonique avec Pr et Re_ω .

Le graphe $Po_{RMS}(Re_\omega)$ présente une rupture de pente à $Re_\omega \sim 5$ entre les asymptotes $\{Po_{RMS}(Re_\omega \rightarrow 0) = 24/\sqrt{2} ; Po_{RMS}(Re_\omega \rightarrow \infty) = 2\sqrt{2}Re_\omega\}$ (Fig. 4 gauche), alors que les graphes $Nu_{RMS}(Pr, Re_\omega)$ montrent un comportement plus complexe suivant les plages de Pr (Fig. 4 droit) où l'accroissement asymptotique rapide de Nu_{RMS} se produit à une valeur Re_ω d'autant plus faible que Pr est élevé, avec une éventuelle baisse de Nu_{RMS} dans une plage $Pr \{0,14 - 7,2\}$ [7], entre asymptotes $\{Nu_{RMS}(Re_\omega \rightarrow 0) = 10\}$ et $\{Nu_{RMS}(Re_\omega \rightarrow \infty) = 2Re_\omega\sqrt{Pr} / (1 + \sqrt{Pr})\}$.

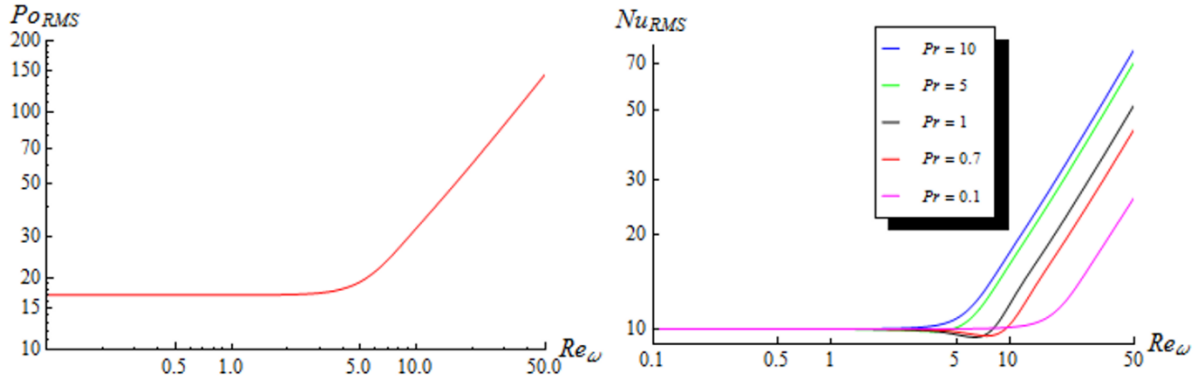


Figure 4 : Evolution des pertes visqueuses (gauche) et transferts thermiques (droite) avec Re_ω .

4. Échelles et nombres caractéristiques des écoulements alternés

4.1. Couche limite visqueuse de Stokes et effet annulaire dynamique

En posant $x^* = x/(2e)$ et $p'^* = 2ep' / (\rho v U_0)$, l'équation adimensionnelle (8a) s'écrit :

$$\frac{4}{Re_\omega^2} \frac{\partial^2 \underline{u}'^*(r^*)}{\partial r^{*2}} - i \underline{u}'^*(r^*) = \frac{1}{Re_\omega^2} \frac{\partial p'^*}{\partial x^*}. \quad (16)$$

La solution homogène de cette équation peut se mettre sous la forme mathématique :

$$\underline{u}'(r^*, \theta) = \underline{u}'(r^*) e^{i\theta} = \underline{u}_0 \exp\left(i\theta + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{Re_\omega}{2} r^*\right) = \underline{u}_0 \exp\left(\frac{r^*}{\delta_v^*}\right) \exp\left(i\left[\theta + \frac{r^*}{\delta_v^*}\right]\right), \quad (17)$$

caractéristique d'une onde progressive harmonique, amortie exponentiellement des parois vers le centre du canal sur une distance caractéristique adimensionnelle δ_v^* où δ_v est l'épaisseur de la couche visqueuse de Stokes [13], avec une célérité c_v dans un temps visqueux de Stokes caractéristique de la traversée de l'onde à travers tout le canal :

$$\delta_v^* = \frac{2\sqrt{2}}{Re_\omega} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{2v}{\omega}} = \frac{\delta_v}{e} \text{ et } c_v = \omega \delta_v = \sqrt{2\omega v} \text{ et } \tau_v = \frac{2e}{c_v} = e \sqrt{\frac{2}{\omega v}} \quad (18)$$

La couche visqueuse de Stokes ne peut exister et se maintenir que si l'onde a le temps de traverser le canal pendant le quart de la période, d'où le nombre critique de Womersley :

$$\frac{T}{4} < \tau_v \Leftrightarrow \frac{\pi}{2\omega} < e \sqrt{\frac{2}{\omega v}} \Leftrightarrow Re_\omega > \frac{\pi}{\sqrt{2}} = Re_{\omega cv}. \quad (19)$$

Physiquement, le nombre de Womersley peut être considéré comme la mesure du rapport entre le temps de diffusion visqueux $\tau_{dv} = (2e)^2/v$ et le temps visqueux de Stokes τ_v :

$$\frac{\tau_{dv}}{\tau_v} = 2e\sqrt{\frac{2\omega}{\nu}} = Re_\omega\sqrt{2}. \quad (20)$$

4.2. Couche limite thermique de Stokes et effet annulaire dynamique

La température étant une grandeur scalaire passive dans l'écoulement forcé alternatif, son statut physique ne peut être similaire à celui de la vitesse ou de la pression, qui peuvent toutes deux être considérées comme des grandeurs physiques actives. Par conséquent, le processus de transfert conduisant à l'émergence d'une couche de Stokes thermique pour la température résulte à la fois des mécanismes de diffusion thermique et d'advection.

L'équation adimensionnelle de la température (8b), écrite sous la forme :

$$\frac{4}{Pr Re_\omega^2} \frac{\partial^2 \underline{\Theta}(r^*)}{\partial r^{*2}} - i \underline{\Theta}(r^*) = \frac{4u^*(r^*)}{Re_\omega^2} \quad (21)$$

a pour solution homogène la température adimensionnelle d'expression :

$$\underline{\Theta}(r^*, \theta) = \underline{\Theta}(r^*) e^{i\theta} = \underline{\Theta}_0 \exp\left(i\theta + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{Pr Re_\omega}}{2} r^*\right) = \underline{\Theta}_0 \exp\left(\frac{r^*}{\delta_a^*}\right) \exp\left(i\left[\theta + \frac{r^*}{\delta_a^*}\right]\right), \quad (22)$$

caractéristique d'une onde thermique progressive amortie exponentiellement sur une distance caractéristique adimensionnelle δ_a^* où δ_a peut être considérée comme l'épaisseur d'une *couche thermique de Stokes*, avec une célérité c_a :

$$\delta_a^* = \frac{2\sqrt{2}}{Re_\omega \sqrt{Pr}} = \frac{1}{e} \sqrt{\frac{2a}{\omega}} = \frac{\delta_a}{e} = \frac{\delta_v^*}{\sqrt{Pr}} \text{ et } c_a = \omega \delta_a = \sqrt{2\omega a} = \frac{c_v}{\sqrt{Pr}} \quad (23)$$

dans un *temps thermique de Stokes* τ_a caractéristique de la traversée de l'onde à travers tout le canal, d'où une *valeur critique thermique* $Re_{\omega ca}$ cohérente avec la [figure 4](#) :

$$\tau_a = \frac{2e}{c_a} = e\sqrt{\frac{2}{\omega a}} = \tau_v \sqrt{Pr} \text{ et } Re_{\omega ca} = \frac{\pi}{\sqrt{2Pr}} = \frac{Re_{\omega cv}}{\sqrt{Pr}}. \quad (24)$$

Cette approche isolée ne tient toutefois pas compte de l'advection qui régit la propagation des ondes thermiques, de sorte que les échelles thermiques et visqueuses de Stokes sont nécessairement imbriquées dans les flux alternés entre les plaques parallèles chauffées alternativement : le transfert de chaleur entre les parois et le fluide résulte de la compétition entre ondes thermiques transversales et mouvement axial d'advection. Ainsi, l'équation (16) de la vitesse complexe doit être intégrée au terme d'advection de l'équation (21) qui devient :

$$\frac{16}{Pr Re_\omega^4} \frac{\partial^4 \underline{\Theta}(r^*)}{\partial r^{*4}} - \frac{4i}{Re_\omega^2} \left(1 + \frac{1}{Pr}\right) \frac{\partial^2 \underline{\Theta}(r^*)}{\partial r^{*2}} - \underline{\Theta}(r^*) = \frac{4}{Re_\omega^4} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = -\Theta_p \quad (25)$$

La solution homogène de l'équation (25) est donc une combinaison linéaire de deux ondes transversales progressives caractérisées par leurs propres profondeurs de pénétration δ_v^* et δ_a^* :

$$\underline{\Theta}(r^*, \theta) = \underline{\Theta}_{01} \exp\left(\frac{r^*}{\delta_a^*}\right) \exp\left(i\left[\theta + \frac{r^*}{\delta_a^*}\right]\right) + \underline{\Theta}_{02} \exp\left(\frac{r^*}{\delta_v^*}\right) \exp\left(i\left[\theta + \frac{r^*}{\delta_v^*}\right]\right), \quad (26)$$

avec, d'après l'analyse d'échelles de la partie réelle de (25),

$$\delta_a^* \sim \frac{2}{Re_\omega \sqrt{Pr}} \rightarrow \Theta_{01} \sim \Theta_p \frac{1}{1-Pr} \text{ et } \delta_v^* \sim \frac{2}{Re_\omega} \rightarrow \Theta_{02} \sim \Theta_p \frac{Pr}{Pr-1}, \quad (27)$$

conformément à l'expression (11) et au comportement complexe de Nu avec Pr (Fig. 4a).

5. Conclusion

L'analyse d'échelles de l'effet annulaire dans les écoulements alternés permet d'en déterminer les causes physiques, les conditions d'apparition et les conséquences sur les transferts de quantité de mouvement et de chaleur aux parois des micro-canaux plans en fonction des nombres de Womersley et de Prandtl. Elle complète utilement les résolutions analytique et numérique des écoulements alternés pour optimiser les régénérateurs actifs et passifs des machines thermodynamiques. Elle doit encore être étendue aux échanges enthalpiques complets des micro-échangeurs pour déterminer les avantages et inconvénients des effets annulaires.

Références

- [1] Silva DJ, Ventura J, Araújo JP. Caloric devices: A review on numerical modeling and optimization strategies, *Int. J. Energy Res.* 45 (2021) 18498-18539.
- [2] A. Plait, T. de Larochelambert, S. Giurgea, C. Espanet, Experimental validation of a multiphysics modeling for a magnetocaloric bench, *Appl. Thermal Eng.*, 211 (2022) 118415.
- [3] M. Perrin, T. de Larochelambert, Y. Bailly, J.C. Roy, A. Ismail, Simulation numérique 3D de l'intensification des échanges thermo-fluidiques dans un micro-canal d'échangeur thermique par micro-structuration des surfaces d'échange, *32^{ème} Congrès Français de Thermique*, 3-6 juin 2025, Chambéry, France.
- [4] A. Ismail, M. Perrin, S. Giurgea, Y. Bailly, J.C. Roy, T. Barriere, Multiphysical and multidimensional modelling of Parallel-Plate active magnetic regenerator, *Appl. Energy*, 314 (2022) 118963.
- [5] H. Ucar, D. Paudyal, O. Boyraz, Using numerical methods to screen magnetocaloric materials in an active magnetic regenerative cycle, *Int. J. Refrig.*, 120 (2020) 50-57.
- [6] M. Perrin, T. LI, A. Ismail, A. Meunier, Y. Bailly, L. Girardot, D. Ramel, J.C. Roy, T. De Larochelambert, S. Giurgea, Numerical and experimental investigations for annular effect in a regenerator-exchanger of magnetocaloric heat pump, *The 12th Pacific Symposium on Flow Visualization and Image Processing* (New Taipei City, Taiwan, 19-22 November, 2019).
- [7] T. de Larochelambert, Heat and momentum transfer in regenerator parallel plates with transient and steady alternating incompressible flows – I. Analytical solutions; II. Scale analysis and annular effects (en soumission).
- [8] C.R. Lodahl, B.M. Sumer, J. Fredsøe, Turbulent combined oscillatory flow and current in a pipe, *J. Fluid Mech.* 373 (1998) 313-348.
- [9] U.H. Kurzweg, E.R. Lindgren, B. Lothrop, Onset of turbulence in oscillating flow at low Womersley number, *Phys. Fluids A* 1 (12) (1989) 1972-1975.
- [10] Zhang, M., Abdelaziz, O., Momen, A.M. et al., A numerical analysis of a magnetocaloric refrigerator with a 16-layer regenerator. *Sci Rep* 7 (2017).
- [11] J. Liang, M. Masche, K. Engelbrecht, C.R.H. Bahl, Harmonic analysis of temperature profiles of active caloric regenerators, *Int. J. Heat Mass Transfer* 190 (2022) 122694.
- [12] J.R. Womersley, Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscosity drag in arteries when the pressure gradient is known, *J. Physiol.* 127 (1955) 553-563.
- [13] G. G. Stokes, On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* 9 II (1856) 8-106.