# Modèle spectral EDQNM pour les écoulements turbulents fortement anisothermes en convection forcée

# EDQNM spectral model for turbulent highly non-isothermal flows in a forced convection regime

**Léa CHERRY[1*], Gilles FLAMANT[2], Françoise BATAILLE[1]**

[1]PROMES-CNRS (UPR 8521), Université de Perpignan Via Domitia
Rambla de la thermodynamique, 66100 Perpignan (France)
[2] PROMES-CNRS (UPR 8521), 7 rue du Four solaire, 66120 Font-Romeu, France
[*](Corresponding author : lea.cherry@promes.cnrs.fr)

**Résumé -** Les écoulements turbulents au sein des récepteurs solaires à air présentent un couplage fort entre dynamique et thermique, rendant leur modélisation et leur compréhension complexes. Les modèles spectraux de turbulence à deux points permettent d'analyser les mécanismes de transfert d'énergie entre les échelles turbulentes. Dans cet article, nous développons un modèle spectral dans lequel les équations des corrélations doubles de vitesse, de température et des corrélations croisées sont fermées à l'aide d'un modèle de type EDQNM, qui permet de mettre en évidence analytiquement le couplage entre dynamique et thermique.

**Abstract -** Turbulent flows within air-based solar receivers exhibit a strong coupling between dynamics and thermal effects, making their modeling and understanding complex. Two-point spectral turbulence models allow for the analysis of energy transfer mechanisms across turbulent scales. In this paper, we develop a spectral model in which the equations for the velocity double correlation, temperature double correlation and temperature-velocity cross-correlation are closed using an EDQNM-type model, which highlights the coupling between dynamics and thermal effects in the analytical developments.

**Nomenclature**

| | |
|---|---|
| $\boldsymbol{u}$ | Vitesse |
| $\rho$ | Masse volumique |
| $T$ | Température |
| $P$ | Pression mécanique |
| $P_0$ | Pression thermodynamique |
| $\tau_{ij}$ | Tenseur des contraintes visqueuses |
| $Q_l$ | Vecteur densité de flux de chaleur |
| $\gamma$ | Coefficient adiabatique |
| $\mu$ | Viscosité dynamique |
| $\lambda$ | Conductivité thermique |
| $\boldsymbol{x}$ | Position |
| $\boldsymbol{k}$ | Nombre d'onde |
| $r$ | Constante thermodynamique de l'air |
| $E$ | Spectre d'énergie cinétique |
| $\Phi_{ij}$ | Tenseur spectral cinétique |
| $\bar{\cdot}$ / $\langle\cdot\rangle$ | Moyenne de Reynolds (deux notations utilisées indifféremment) |
| $\cdot'$ | Fluctuations de Reynolds |
| $\widehat{\cdot}$ | Transformée de Fourier |

## 1. Introduction

Les écoulements turbulents sont caractérisés par leur forte capacité de mélange, leur comportement chaotique et le grand nombre d'échelles spatiales mises en jeu. Leur forte capa-

https://doi.org/10.25855/SFT2025-086

cité de mélange est très appréciée dans de nombreuses applications industrielles, lorsqu'il est nécessaire d'homogénéiser rapidement un mélange et/ou de de maximiser les transferts thermiques. C'est notamment le cas des récepteurs solaires des tours solaires à concentration, où le rayonnement solaire concentré est dirigé vers des récepteurs solaires dans lequel s'écoule un fluide caloporteur. Ce fluide y est alors soumis à un gradient de température de plusieurs centaines de degrés, ce qui conduit à préférer un régime d'écoulement turbulent. Cependant, le caractère chaotique des écoulements turbulents les rend difficiles à prédir et donc à maîtriser, ce qui est constitue un vrai défi dans la mise en place des applications industrielles.

Il existe néanmoins plusieurs méthodes pour étudier et prédire les écoulements turbulents, dont la Simulation Numérique Directe (SND) [1]. Cette méthode consiste à simuler exactement l'écoulement turbulent, ce qui nécessite d'utiliser un maillage assez fin pour simuler toutes les structures de l'écoulement turbulent. Cette méthode a permis d'obtenir des premiers résultats sur le comportement de la turbulence fortement anisotherme dans la configuration simplifiée d'un canal plan [2].

Le grand nombre d'échelles spatiales impliquées dans la turbulence rend la SND très coûteuse et limite son application à de faibles nombres de Reynolds. L'étude d'écoulements plus complexes impose donc une réduction de la résolution des simulations, entraînant une perte de données. Pour y remédier, de nombreuses approches privilégient le calcul de grandeurs moyennes sur une échelle temporelle (Reynolds Averaged Navier Stokes) ou spatiale (Large Eddy Simulation). Il devient alors crucial de modéliser l'effet moyen des petites structures sur ces grandeurs. Mathématiquement, ces structures se traduisent par des termes inconnus dans les équations moyennes, comme le tenseur de Reynolds $\overline{u_i'u_j'}$. La résolution des équations moyennées repose alors sur l'expression explicite de ces termes. Parmi les différentes méthodes de fermeture existantes, les approches spectrales cherchent à représenter la cascade d'énergie entre échelles turbulentes afin d'améliorer la compréhension des mécanismes de transfert d'énergie et des interactions multi-échelles [3] pour proposer des modèles basés sur la physique de l'écoulement. Pour cela, les équations turbulentes sont écrites dans l'espace de Fourier et servent de point de départ à l'établissement des équations d'évolution des spectres d'énergie.

Nous nous intéressons dans cet article en particulier aux fermetures spectrales de type EDQNM (Eddy-Damped Quasi-Normal Markovianized). Ces méthodes ont été développées dès les années 1970 pour les écoulements turbulents incompressibles homogènes isotropes [4], donnant des résultats très satisfaisants. Ces avancées ont ensuite permis d'étendre les modèles EDQNM à des écoulements plus complexes, en intégrant de l'anisotropie [5], [6], de la faible compressibilité [7] et, plus récemment, du tirage thermique en convection naturelle [8].

Cet article présente le développement d'un modèle spectral de type EDQNM pour des écoulements turbulents fortement anisothermes en régime de convection forcée tels qu'ils peuvent être trouvés dans des récepteurs solaires à air des tours solaires à concentration. L'objectif de l'étude est de mettre en évidence les mécanismes d'interaction entre fort gradient de température et turbulence. Du fait du régime de convection forcée, cette interaction n'a pas lieu par des mécanismes de flottabilité liés à la gravité. Nous nous concentrons davantage sur les effets liés à la dilatation thermique, ce qui nous conduit à introduire de la compressibilité dans les équations de Navier-Stokes.

Nous partons des équations de Navier-Stokes à faible nombre de Mach. Ces équations sont ensuite écrites dans l'espace spectral grâce à la transformée de Fourier, ce qui permet de mettre en évidence les effets de couplage dynamique-thermique recherchés. Elles servent de point de départ pour l'établissement des équations d'évolution des corrélations double de vitesse, de température et aux corrélations croisées vitesse-température qui caractérisent les échanges d'énergie au sein de la turbulence et entre dynamique et thermique. Les équations d'évolution des corrélations doubles n'étant pas fermées, nous présentons ici le développement d'un modèle EDQNM adapté à notre étude.

## 2. Problème spectral

### 2.1. Equations à faible nombre de Mach

Nous faisons l'approximation d'un régime d'écoulement à faible nombre de Mach, dans la continuité des travaux effectués précédemment sur les récepteurs solaires. La gravité est négligée, et le fluide est supposé être un gaz parfait :

$$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\frac{\partial\rho u_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i}=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)u_i(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)u_i(\boldsymbol{x},t)u_l(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_l}=-\frac{\partial P(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_i}+\frac{\partial\tau_{il}(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_l} \tag{2}$$

$$\frac{\partial\rho(\boldsymbol{x},t)T(\boldsymbol{x},t)}{\partial t}+\gamma\rho(\boldsymbol{x},t)T(\boldsymbol{x},t)\frac{\partial u_l(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_l}=-\frac{\gamma-1}{r}\frac{\partial Q_l(\boldsymbol{x},t)}{\partial x_l} \tag{3}$$

$$T(\boldsymbol{x},t)=\frac{P_0(t)}{\rho(\boldsymbol{x},t)r} \tag{4}$$

Ces équations ont la particularité de décomposer la pression en une partie mécanique $P$ et une partie thermodynamique $P_0$, ce qui permet de découpler les équations de la chaleur et de la quantité de mouvement en termes de pression. Elles sont couplées par la masse volumique, et donc indirectement par la température.

Nous adoptons par la suite une approche statistique et spectrale. Nous appliquons la moyenne de Reynolds aux équations précédentes, pour en déduire l'évolution des quantités fluctuantes. Nous formulons une série d'hypothèses, dont la linéarisation de la masse volumique : $\rho=\rho_0+\xi_n\frac{\partial T}{\partial x_n}$ où $\rho_0$ est une constante et $\boldsymbol{\xi}$ un vecteur constant. En appliquant la transformée de Fourier aux équations turbulentes, nous obtenons alors les équations d'évolutions spectrales :

$$\mathrm{i}\rho_0 k_l\widehat{u_l'}(\boldsymbol{k})-\xi_n k_l\int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}}q_n\widehat{\overline{T}}(\boldsymbol{q})\widehat{u_l'}(\boldsymbol{p})d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}=0 \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mu}{\rho_0}k^2+\overline{u_l}\mathrm{i}k_l\right)\widehat{u_i'}(\boldsymbol{k})+\rho_0\mathrm{i}k_l\int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}}\widehat{u_l'}(\boldsymbol{p})\widehat{u_i'}(\boldsymbol{q})d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}&\\ -\overline{u_l}\xi_n k_l\int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}}q_n\widehat{u_i'}(\boldsymbol{p})\widehat{\overline{T}}(\boldsymbol{q})d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-\xi_n k_l\int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}}p_n\widehat{\overline{T}}(\boldsymbol{p})\widehat{u_l'}(\boldsymbol{q})\widehat{u_i'}(\boldsymbol{r})d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}d\boldsymbol{r}&\\ =-\frac{\mu}{3}k_ik_l\widehat{u_l'}(\boldsymbol{k})-\overline{u_i'(\boldsymbol{x})u_l'(\boldsymbol{x})}\xi_nk_lk_n\widehat{\overline{T}}(\boldsymbol{k})&\end{aligned} \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\lambda(\gamma-1)}{\rho_0 r}k^2\right)\widehat{T'}(\boldsymbol{k})+\frac{\gamma P_0(t)}{\rho_0}\mathrm{i}k_l\widehat{u_l'}(\boldsymbol{k})=-\frac{\gamma}{\rho_0}\overline{T'(\boldsymbol{x})u_l'(\boldsymbol{x})}\xi_nk_nk_l\widehat{\overline{T}}(\boldsymbol{k}) \tag{7}$$

Ces résultats ont été détaillés lors d'une édition précédente du Congrès Français de thermique [9]. Nous utilisons pour les équations le code couleur suivant : les termes en noir sont les termes que l'on retrouve typiquement dans les cas classiques homogènes isotrope isotherme, les termes en bleu viennent de l'anisotropie en vitesse générée par une vitesse moyenne non nulle (convection forcée), et les termes en rouge sont directement liés à la forte anisothermie. Ces derniers se divisent entre des termes proportionnels à la variation de masse volumique et des termes visqueux.

## 2.2. Corrélations doubles

A partir des équations d'évolution spectrales, nous pouvons obtenir les équations des corrélations doubles spectrales en deux points de la forme $\langle\alpha(\boldsymbol{k})\beta(\boldsymbol{k'})\rangle$ où $\alpha, \beta \in \{\widehat{u_i'}, \widehat{T'}\}$. Ces corrélations donnent accès aux spectres d'énergie en mettant en évidence les interactions entre les échelles turbulentes par leur formulation en deux points.

Nous commençons par écrire l'équation d'évolution pour la corrélation double de vitesse. Pour cela, on utilise l'équation de quantité de mouvement 6 pour $\widehat{u_i'}(\boldsymbol{k})$ puis on la multiplie par $\widehat{u_j'}(\boldsymbol{k'})$, et on additionne cette équation à l'équation 6 écrite pour $\widehat{u_j'}(\boldsymbol{k'})$ et multipliée par $\widehat{u_i'}(\boldsymbol{k})$. Les équations pour la corrélation double de température et pour la corrélation croisée température-vitesse sont obtenues de la même façon :

$$\begin{aligned}
&\rho_0\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mu}{\rho_0}(k^2+k'^2)+\overline{u_l}\mathrm{i}(k_l+k_l')\right)\langle\widehat{u_i'}(\boldsymbol{k})\widehat{u_j'}(\boldsymbol{k'})\rangle\\
&\quad+\rho_0\mathrm{i}k_l'\int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k'}}\langle\widehat{u_l'}(\boldsymbol{p})\widehat{u_j'}(\boldsymbol{q})\widehat{u_i'}(\boldsymbol{k})\rangle d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}+\rho_0\mathrm{i}k_l\int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}}\langle\widehat{u_l'}(\boldsymbol{p})\widehat{u_i'}(\boldsymbol{q})\widehat{u_j'}(\boldsymbol{k'})\rangle d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}\\
&\quad-\overline{u_l}\xi_n k_l\int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}}q_n\widehat{\overline{\overline{T}}}(\boldsymbol{q})\langle\widehat{u_i'}(\boldsymbol{p})\widehat{u_j'}(\boldsymbol{k'})\rangle d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}-\overline{u_l}\xi_n k_l'\int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k'}}q_n\widehat{\overline{\overline{T}}}(\boldsymbol{q})\langle\widehat{u_j'}(\boldsymbol{p})\widehat{u_i'}(\boldsymbol{k})\rangle d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}\\
&\quad-\xi_n k_l\int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}}p_n\widehat{\overline{\overline{T}}}(\boldsymbol{p})\langle\widehat{u_l'}(\boldsymbol{q})\widehat{u_i'}(\boldsymbol{r})\widehat{u_j'}(\boldsymbol{k'})\rangle d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}d\boldsymbol{r}-\xi_n k_l'\int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k'}}p_n\widehat{\overline{\overline{T}}}(\boldsymbol{p})\langle\widehat{u_l'}(\boldsymbol{q})\widehat{u_j'}(\boldsymbol{r})\widehat{u_i'}(\boldsymbol{k})\rangle d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}d\boldsymbol{r}\\
&\quad=-\frac{\mu}{3}\left(k_ik_l\langle\widehat{u_j'}(\boldsymbol{k'})\widehat{u_l'}(\boldsymbol{k})\rangle+k_j'k_l'\langle\widehat{u_i'}(\boldsymbol{k})\widehat{u_l'}(\boldsymbol{k'})\rangle\right)
\end{aligned}\tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\lambda(\gamma-1)}{\rho_0 r}(k^2+k'^2)\right)\langle\widehat{T'}(\boldsymbol{k})\widehat{T'}(\boldsymbol{k'})\rangle+\frac{\gamma P_0(t)}{\rho_0}\mathrm{i}\left(k_l\langle\widehat{u_l'}(\boldsymbol{k})\widehat{T'}(\boldsymbol{k'})\rangle+k_l'\langle\widehat{u_l'}(\boldsymbol{k'})\widehat{T'}(\boldsymbol{k})\rangle\right)=0\tag{9}$$

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\mu}{\rho_0}k^2+\overline{u_l}\mathrm{i}k_l+\frac{\lambda(\gamma-1)}{\rho_0 r}k'^2\right)\langle\widehat{u_i'}(\boldsymbol{k})\widehat{T'}(\boldsymbol{k'})\rangle+\frac{\mu}{3\rho_0}k_lk_i\langle\widehat{u_l'}(\boldsymbol{k})\widehat{T'}(\boldsymbol{k'})\rangle\\
&\quad+\frac{\gamma P_0(t)}{\rho_0}\mathrm{i}k_l'\langle\widehat{u_l'}(\boldsymbol{k'})\widehat{u_i'}(\boldsymbol{k})\rangle-\frac{\overline{u_l}\xi_n k_l}{\rho_0}\int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}}q_n\widehat{\overline{\overline{T}}}(\boldsymbol{q})\langle\widehat{u_i'}(\boldsymbol{p})\widehat{T'}(\boldsymbol{k'})\rangle d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}\\
&\quad=\mathrm{i}k_l\int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}}\langle\widehat{u_l'}(\boldsymbol{p})\widehat{u_i'}(\boldsymbol{q})\widehat{T'}(\boldsymbol{k'})\rangle d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}+\frac{\xi_n k_l}{\rho_0}\int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k}}p_n\widehat{\overline{\overline{T}}}(\boldsymbol{p})\langle\widehat{u_l'}(\boldsymbol{q})\widehat{u_i'}(\boldsymbol{r})\widehat{T'}(\boldsymbol{k'})\rangle d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}d\boldsymbol{r}
\end{aligned}\tag{10}$$

Comme pour les équations turbulentes, on peut ici mettre en évidence les termes traditionnellement homogènes isotropes, les termes anisotropes et les termes anisothermes. Les équations comportent à la fois des termes d'interaction triadique et des termes d'interaction quadratique. On remarque que l'équation de la corrélation double de température est linéaire, ce qui est une conséquence des approximations de faible nombre de Mach.

Les équations d'évolution de la corrélation double de vitesse et de la corrélation croisée vitesse-température ne sont pas fermées à cause de la présence de termes de corrélations triples $\langle uuu \rangle$ ou $\langle uuT \rangle$. Si l'on écrit les équations des corrélations triples de la même manière que l'équation des corrélations doubles, alors cette équation fera intervenir les corrélations quadruples. Par un raisonnement analogue, on en déduit que cette chaîne liant les moments d'ordre $n$ aux moments d'ordre $n+1$ est infinie. Pour exprimer les corrélations doubles, il est donc nécessaire d'écrire une relation de fermeture, qui exprime un moment d'ordre n en fonction d'un moment d'ordre inférieur. Pour cela, on utilise la méthode EDQNM qui fait l'objet du paragraphe suivant.

## 3. Fermeture EDQNM

La méthode EDQNM consiste à considérer les quantités fluctuantes comme des variables aléatoires, et à approximer leur loi de probabilité. La première hypothèse de l'EDQNM consiste donc à supposer que les quantités fluctuantes suivent une loi quasi-normale, ce qui se traduit par une relation de la forme $\langle uuuu \rangle = \Sigma \langle uu \rangle$ entre moments d'ordre deux et moments d'ordre quatre. Cette relation permet de donner une expression explicite pour les corrélations triples de vitesse. Les hypothèses d'amortissement tourbillonnaire et de markovianisation sont ensuite ajoutées pour corriger l'écart entre la distribution quasi-normale et la distribution réelle des variables fluctuantes.

Les deux équations comportant des termes inconnus sont l'équation pour la corrélation double de vitesse et l'équation pour la corrélation croisée vitesse-température. Nous commencerons donc par présenter la fermeture EDQNM pour la corrélation double de vitesse puis pour la corrélation croisée vitesse-température. Pour effectuer la fermeture EDQNM, il est nécessaire de dériver les équations d'évolution pour les corrélations triples de vitesse. Nous ne donnerons pas ici les expressions complètes des corrélations triples de vitesse mais seulement leur forme générale. Les équations complètes peuvent être trouvées dans [10].

### 3.1. Corrélation double de vitesse

Nous commençons par écrire l'équation d'évolution pour les corrélations triples de vitesse. Celle-ci est de la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k'}, \boldsymbol{k''})\right) \langle \widehat{u'_i}(\boldsymbol{k}) \widehat{u'_j}(\boldsymbol{k'}) \widehat{u'_m}(\boldsymbol{k''}) \rangle = S_{ijm}(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k'}, \boldsymbol{k''}, t) \tag{11}$$

$\Omega$ est un scalaire qui ne dépend que des vecteurs d'onde $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{k'}, \boldsymbol{k''}$ et $S_{ijm}$ est le second membre de l'équation différentielle. Il comporte des termes non linéaires dépendant des corrélations quadruples tels que $\rho_0 \mathrm{i} k'_l \int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k'}} \langle \widehat{u'_l}(\boldsymbol{p}) \widehat{u'_j}(\boldsymbol{q}) \widehat{u'_i}(\boldsymbol{k}) \widehat{u'_m}(\boldsymbol{k''}) \rangle d\boldsymbol{p} d\boldsymbol{q}$, des termes non linéaires dépendant des corrélations triples tels que $-\overline{u_l} \xi_n k''_l \int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k''}} q_n \widehat{\overline{T}}(\boldsymbol{q}) \langle \widehat{u'_m}(\boldsymbol{p}) \widehat{u'_j}(\boldsymbol{k'}) \widehat{u'_i}(\boldsymbol{k}) \rangle d\boldsymbol{p} d\boldsymbol{q}$, des termes linéaires qui dépendent des corrélations doubles tels que
$-\overline{u'_m(\boldsymbol{x}) u'_l(\boldsymbol{x})} \xi_n k''_l k''_n \widehat{\overline{T}}(\boldsymbol{k''}) \langle \widehat{u'_i}(\boldsymbol{k}) \widehat{u'_j}(\boldsymbol{k'}) \rangle$ et des termes visqueux $-\frac{\mu}{3} k_n k_i \langle \widehat{u'_n}(\boldsymbol{k}) \widehat{u'_j}(\boldsymbol{k'}) \widehat{u'_m}(\boldsymbol{k''}) \rangle$.

Les termes inconnus sont les termes qui comportent des corrélations quadruples de vitesse. Nous utilisons donc l'approximation quasi-normale pour les exprimer en fonction des corrélations doubles de vitesse :

$$\langle \widehat{u'_l}(\boldsymbol{p})\widehat{u'_j}(\boldsymbol{q})\widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\widehat{u'_m}(\boldsymbol{k''})\rangle = \langle \widehat{u'_l}(\boldsymbol{p})\widehat{u'_j}(\boldsymbol{q})\rangle\langle \widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\widehat{u'_m}(\boldsymbol{k''})\rangle + \langle \widehat{u'_l}(\boldsymbol{p})\widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\rangle\langle \widehat{u'_j}(\boldsymbol{q})\widehat{u'_m}(\boldsymbol{k''})\rangle + \langle \widehat{u'_l}(\boldsymbol{p})\widehat{u'_m}(\boldsymbol{k''})\rangle\langle \widehat{u'_j}(\boldsymbol{q})\widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\rangle \tag{12}$$

Nous négligeons les contributions anisotropes aux corrélations triples de vitesse, c'est à dire les termes qui comportent des corrélations triples autres que $\langle \widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\widehat{u'_j}(\boldsymbol{k'})\widehat{u'_m}(\boldsymbol{k''})\rangle$. En conséquence, $S_{ijm}$ ne dépend plus que des corrélations doubles de vitesse, et devient indépendant du membre de droite dans l'équation 15. Celle-ci se réduit alors à une équation différentielle ordinaire du premier ordre, pouvant être résolue explicitement. En supposant qu'au temps initial les corrélations triples sont nulles, on obtient l'expression suivante pour les corrélations triples de vitesse :

$$\langle \widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\widehat{u'_j}(\boldsymbol{k'})\widehat{u'_m}(\boldsymbol{k''})\rangle = \int_0^t S_{ijm}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},\boldsymbol{k''},\tau)e^{-\Omega(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},\boldsymbol{k''})(t-\tau)}d\tau \tag{13}$$

Les fermetures spectrales reposant uniquement sur la quasi-normalité ayant montré un éloignement notable au comportement attendu notamment dans la zone inertielle, de nouvelles approximations ont été introduites : l'amortissement tourbillonnaire et la markovianisation.

L'amortissement tourbillonnaire (ou eddy-damping) consiste à modifier le temps caractéristique de relaxation $1/\Omega$, ce qui permet en pratique d'ajuster les contributions des corrélations triples dans les corrélations doubles. Originellement, dans le cas de la turbulence homogène isotrope, la forme du terme d'amortissement tourbillonnaire a été déterminée par analyse dimensionnelle, pour obtenir le comportement attendu du spectre d'énergie $E$ dans la zone inertielle du spectre d'énergie ainsi que le sens de variation attendu avec le nombre d'onde $\boldsymbol{k}$, pour être de la forme $\eta(k) \propto (\int_0^k p^2E(p)dp)^{1/2}$. Dans le cas de la turbulence anisotherme que nous étudions ici, nous ne connaissons pas a priori la forme du spectre d'énergie. Nous choisissons cependant de garder un terme d'amortissement tourbillonaire de la même forme que la turbulence homogène isotrope, comme cela a été fait dans des études précédentes anisotropes ou faiblement compressibles [6, 8]. La forme du terme d'amortissement tourbillonaire est donc $\zeta(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},\boldsymbol{k''},t) = \Omega(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},\boldsymbol{k''}) + \eta_{kpq}(t)$. Ici,

$$\eta_{kpq}(t) = a_k\left(\int_0^k x^2E(x,t)dx\right)^{\frac{1}{2}} + a_p\left(\int_0^p x^2E(x,t)dx\right)^{\frac{1}{2}} + a_q\left(\int_0^q x^2E(x,t)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

Les $a_i$ sont des constantes arbitraires qui peuvent être ajustées pour ajuster les spectres obtenus. $E$ est le spectre d'énergie, et son expression est donnée par l'intégration de la trace du tenseur spectral cinétique $\Phi_{ij}$ sur la sphère de rayon $k$ (notée $\Sigma_k$) : $E(k,t,t') = \frac{1}{2}\int_{\Sigma_k}\Phi_{ii}(\boldsymbol{k},t,t')d\boldsymbol{k}$

Enfin, l'étape de markovianisation consiste à supposer que $S_{ijm}$ varie selon un temps caractéristique supérieur à $t$, ce qui permet de simplifier l'expression des corrélations triples comme suit :

$$\boxed{\langle\widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\widehat{u'_j}(\boldsymbol{k'})\widehat{u'_m}(\boldsymbol{k''})\rangle = \frac{1-e^{-\zeta(k,k',k'',t)}}{\zeta(k,k',k'',t)}S_{ijm}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},\boldsymbol{k''},t)} \tag{14}$$

En remplaçant les corrélations triples par leur expression fermée dans l'équation des corrélations doubles 8, on obtient donc une expression fermée pour les corrélations doubles, que l'on peut ensuite exploiter pour obtenir des spectres d'énergie. On peut noter que l'expression fermée des corrélations triples ci-dessus comporte à la fois des contributions thermiques et dynamiques dans le terme $S_{ijm}$. En conséquence, le couplage dynamique-thermique dans l'équation des corrélations doubles ne s'exprime pas seulement par des termes anisothermes mais aussi par tous les termes comportant des corrélations triples. Cela laisse penser que l'anisothermie influence fortement le transfert d'énergie entre les différentes échelles de la turbulence.

### 3.2. Corrélation croisée vitesse-température

Afin de fermer l'équation de corrélation croisée vitesse-température, nous suivons une méthode similaire à la méthode utilisée dans le cas des corrélations de vitesse. Nous commençons donc par écrire l'équation d'évolution des corrélations triples vitesse-vitesse-température qui sont les inconnues de l'équation d'évolution des corrélations croisées vitesse-température 10. L'équation des corrélations triples est de la forme :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \Omega^T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},\boldsymbol{k''})\right)\langle\widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\widehat{u'_j}(\boldsymbol{k'})\widehat{T'}(\boldsymbol{k''})\rangle = S^T_{ijm}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},\boldsymbol{k''},t) \tag{15}$$

De même que pour l'équation des corrélations de vitesse, $\Omega^T$ dépend exclusivement de $\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},\boldsymbol{k''}$. $S^T_{ijm}$ comporte des termes de corrélation triple de la forme $-\frac{\xi_n}{\rho_0}k'_l\int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}+\boldsymbol{r}=\boldsymbol{k'}} p_n\widehat{\widehat{\overline{T}}}(\boldsymbol{p})\langle\widehat{u'_l}(\boldsymbol{q})\widehat{u'_j}(\boldsymbol{r})\widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\widehat{T'}(\boldsymbol{k''})\rangle d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}d\boldsymbol{r}$, des termes de corrélation quadruple de la forme $\mathrm{i}k_l\int_{\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}}\langle\widehat{u'_l}(\boldsymbol{p})\widehat{u'_i}(\boldsymbol{q})\widehat{u'_j}(\boldsymbol{k'})\widehat{T'}(\boldsymbol{k''})\rangle d\boldsymbol{p}d\boldsymbol{q}$, des termes visqueux similaires aux termes visqueux de l'équation 14, et des termes de dilatation tels que $-\frac{\gamma}{\rho_0}\overline{T'(\boldsymbol{x})u'_l(\boldsymbol{x})}\xi_n k''_n k''_l\widehat{\widehat{\overline{T}}}(\boldsymbol{k''})\langle\widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\widehat{u'_j}(\boldsymbol{k'})\rangle$ qui ne dépendent que des corrélations doubles. Tous les termes de corrélation pure de vitesse étant connus grâce aux opérations du paragraphe précédent, nous nous concentrons sur les termes de corrélations croisées. Les termes inconnus sont donc ici les termes comportant des corrélations quadruples de la forme $\langle uuuT\rangle$. Nous commençons donc par appliquer une forme d'approximation quasi-normale pour exprimer les corrélations quadruples en fonction des corrélations doubles :

$$\begin{aligned}\langle\widehat{u'_l}(\boldsymbol{p})\widehat{u'_j}(\boldsymbol{q})\widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\widehat{T'}(\boldsymbol{k''})\rangle &= \langle\widehat{u'_l}(\boldsymbol{p})\widehat{u'_j}(\boldsymbol{q})\rangle\langle\widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\widehat{T'}(\boldsymbol{k''})\rangle + \langle\widehat{u'_l}(\boldsymbol{p})\widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\rangle\langle\widehat{u'_j}(\boldsymbol{q})\widehat{T'}(\boldsymbol{k''})\rangle \\ &+ \langle\widehat{u'_l}(\boldsymbol{p})\widehat{T'}(\boldsymbol{k''})\rangle\langle\widehat{u'_j}(\boldsymbol{q})\widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\rangle\end{aligned} \tag{16}$$

Cela permet de donner une expression explicite pour les corrélations triples croisées, car les corrélations quadruples ne dépendent plus que des corrélations doubles croisées et des corrélations doubles de vitesse :

$$\langle\widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\widehat{u'_j}(\boldsymbol{k'})\widehat{T'}(\boldsymbol{k''})\rangle = \int_0^t S_{ij\theta}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},\boldsymbol{k''},\tau)e^{-\Omega^T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},\boldsymbol{k''})(t-\tau)}d\tau \tag{17}$$

De même que dans le paragraphe précédent, on introduit ensuite de l'amortissement tourbillonnaire $\zeta^T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},\boldsymbol{k''},t) = \Omega^T(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},\boldsymbol{k''}) + \eta_{kpq}(t)$ où $\eta_{kpq}$ est donné par la même expression que dans le paragraphe précédent. Enfin, l'étape de markovianisation permet d'obtenir la forme finale des corrélations triples croisées :

$$\boxed{\langle \widehat{u'_i}(\boldsymbol{k})\widehat{u'_j}(\boldsymbol{k'})\widehat{T'}(\boldsymbol{k''})\rangle = \frac{1-e^{-\zeta^T(k,p,q,t)}}{\zeta^T(k,p,q,t)} S_{ij\theta}(\boldsymbol{k},\boldsymbol{k'},\boldsymbol{k''},t)} \tag{18}$$

Cette expression permet ensuite de déduire une expression fermée pour les corrélations doubles croisées température-vitesse. Tout comme pour l'équation des corrélations doubles de vitesse, l'expression explicite des corrélations triples mêle dynamique et thermique et fait intervenir les corrélations doubles de vitesse.

## 4. Conclusion

Dans cet article, nous avons développé un modèle spectral de type EDQNM pour les écoulements turbulents fortement anisothermes en régime de convection forcée. En nous appuyant sur des travaux antérieurs, nous avons établi les équations d'évolution pour les corrélations doubles de vitesse, température et corrélation croisées vitesse-température, qui caractérisent les échanges d'énergie au sein de la turbulence. Nous avons ensuite utilisé un modèle de type EDQNM pour fermer les équations obtenues, ce qui a permis de mettre en évidence le couplage entre dynamique et thermique dans les corrélations doubles mais aussi les corrélations triples. Le jeu d'équations obtenu pourra ensuite permettre d'obtenir numériquement des spectres d'énergie. Ces spectres d'énergie serviront de base à la validation du modèle développé.

**Références**


[1] Ohkitani, K., Kida, S., 1992. Triad interactions in a forced turbulence. Physics of Fluids A : Fluid Dynamics 4, 794–802.

[2] Toutant, A., Bataille, F., 2013. Turbulence statistics in a fully developed channel flow submitted to a high temperature gradient. International Journal of Thermal Sciences 74, 104–118.

[3] Yoshizawa, A., 1986. Statistical theory for compressible turbulent shear flows, with the application to subgrid modeling. Physics of Fluids 29, 2152–2164

[4] Orszag, S.A., 1970. Analytical theories of turbulence. Journal of Fluid Mechanics 41, 363–386.

[5] Herr, S., Wang, L.P., Collins, L.R., 1996. Edqnm model of a passive scalar with a uniform mean gradient. Phys. Fluids 8, 247–262.

[6] Cambon, C., Jeandel, D., Mathieu, J., 1981. Spectral modelling of homogeneous non-isotropic turbulence. J. Fluid Mech. 104, 247–262.

[7] Bertoglio, J.P., Bataille, F., Marion, J.D., 2001. Two-point closures for weakly compressible turbulence. Physics of Fluids 13, 290–310

[8] Burlot, A., Gréa, B.J., Godeferd, F.S., Cambon, C., Griffond, J., 2015. Spectral modelling of high reynolds number unstably stratified homogeneousturbulence. Journal of Fluid Mechanics 765, 17–4

[9] Cherry, L., Flamant, G., Bataille, F., 2024. Modélisation spectrale des écoulements fortement anisothermes au sein des récepteurs solaires. *Société Française de Thermique* (Strasbourg, 4-7 juin 2024).

[10] Cherry, L., Flamant, G., Bataille, F., 2025. Analytical developments for turbulent flows subjected to strong temperature gradients. International Communications in Heat and Mass Transfer 162, 108550



**Remerciements**

Ce travail a été soutenu par le programme français « Investissements d'Avenir » géré par l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) sous le contrat ANR-10-LABX-22-01 (labex SOLSTICE).