

# Simulation numérique du Stirling GPU3 avec gestion améliorée des sauts de section

Israa BARAKAT<sup>1</sup>, Eric ALBIN<sup>2</sup> et Shihe XIN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>INSA Lyon, CNRS, CETHIL, UMR5008, 69621 Villeurbanne, France, israa.barakat@insa-lyon.fr

<sup>2</sup>Université Claude Bernard Lyon 1, CETHIL, UMR5008, CNRS, INSA Lyon, Villeurbanne, F-69100, France, eric.albin@univ-lyon1.fr

**Résumé** - Les machines thermiques régénératives, telles que les machines Stirling, sont couramment utilisées en cryogénie et en cogénération d'énergie avec du potentiel pour des applications de trigénération d'énergie. Cette étude se concentre sur la modélisation d'un moteur Stirling GPU3, configuration documentée par des données expérimentales, avec un modèle numérique de la littérature dont la gestion des sauts de section a été améliorée. Ce modèle unidimensionnel est basé sur la conservation de l'énergie, de la masse et de la quantité de mouvement dans le fluide ainsi que sur la conservation de l'énergie dans les solides (parois et milieux poreux). Une discrétisation par volumes finis est associée à un schéma temporel implicite permettant d'assurer la stabilité. L'amélioration de la gestion de la géométrie est investiguée dans un cas simple de saut de section puis dans le cas du moteur Stirling. Ces simulations confirment l'efficacité de ce modèle à décrire les transferts de chaleur dans ce type de système. Ces outils de modélisation développés constituent une base pour simuler de nouvelles configurations de machines régénératives, ouvrant la voie à des solutions de trigénération d'énergie plus efficaces que la cogénération.

## 1. Introduction

Le moteur Stirling, inventé en 1816, repose sur des cycles de compression et d'expansion de gaz à différents niveaux de température. Bien qu'il ait connu un essor au XIX<sup>e</sup> siècle, son développement a diminué avec l'avènement des moteurs à combustion interne. Cependant, face aux défis énergétiques actuels et à la transition vers des solutions durables, ce moteur suscite un regain d'intérêt grâce son potentiel en cryogénie, pour la conversion de l'énergie solaire et la récupération de chaleur à basse température [1].

Dans le cadre des développements des moteurs Stirling, de nombreux modèles ont été proposés au fil des années, incluant des approches analytiques [1, 2, 3] et numériques [4, 5, 6, 7, 8]. Les modèles analytiques, basée sur l'analyse de Schmidt [1, 4] décomposent le Stirling en cinq zones avec des températures constantes. Bien que ces modèles isothermes soient utiles pour étudier les cycles idéaux, leur précision reste limitée pour des moteurs pratiques en raison des simplifications adoptées. Parmi les modèles numériques, le modèle zonal introduit par Urieli [4] décrit la compression et détente du fluide avec des processus adiabatiques plus réalistes. Les modèles numériques, en particulier les modèles unidimensionnels comme ceux développés par Wang *et al.* [6] et Boroujerdi *et al.* [5], divisent les moteurs Stirling en éléments discrétisés et résolvent les équations de conservation pour chaque élément. Ces modèles sont plus précis pour décrire les transferts thermiques dans les échangeurs et régénérateurs mais les discontinuités géométriques, notamment aux interfaces de ces composants, ne sont pas correctement traitées dans la littérature.

Dans cette étude, nous nous appuyons sur les travaux de Wang *et al.* [6] et Boroujerdi *et al.* [5] en introduisant une méthode améliorée pour gérer les discontinuités géométriques. Contrairement aux approches précédentes, nous modélisons les résistances thermiques aux interfaces, ce qui permet de mieux représenter les transferts de chaleur par conduction à travers

les zones de discontinuité. Ce modèle est validé en comparant les résultats numériques obtenus à partir de notre méthode avec une solution analytique ainsi qu'avec les données expérimentales de Thieme [9].

## 2. Description du modèle

Le moteur étudié est la machine Stirling GPU3 de type Beta, représenté schématiquement sur la figure 1a. Il se compose de plusieurs composants : piston, déplaceur, échangeurs de chaleur, régénérateurs. Le piston de travail renferme l'hélium gazeux et permet d'échanger de l'énergie mécanique avec l'extérieur. Les réchauffeurs et refroidisseurs se composent de nombreux tubes connectés sur huit régénérateurs. La géométrie précise du moteur est détaillée dans [6]. Ce moteur est modélisé par volumes finis avec un maillage 1D tel que schématisé sur la figure 1b. Les surfaces d'échange et sections de passage sont équivalentes à celles de la géométrie réelle. Au passage de la matrice poreuse ou d'un composant à l'autre, un traitement particulier est utilisé pour gérer les sauts de section. La figure 1c illustre un saut de la section de passage du gaz sur l'interface  $f_i$  séparant les cellules  $i$  et  $i - 1$  ( $S_{l,f_i}^g \neq S_{r,f_i}^g$  avec  $l = left$  et  $r = right$ ). Le saut de section implique également des surfaces d'échange ( $A_{f_i}^{o,w}$  et  $A_{f_i}^{g,w}$ ) non-nulles sur l'interface entre l'extérieur ( $o = outside$ ) et la paroi ( $w = wall$ ).

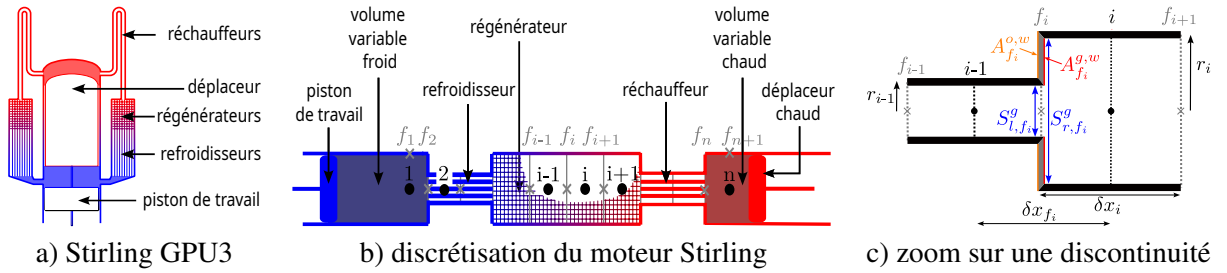


Figure 1 : Schémas de principe représentant la discrétisation du moteur Stirling GPU3.

### 2.1. Gestion de la discontinuité de paroi

Contrairement aux approches classiques dans la littérature, la paroi ( $w$  pour *wall*) et la matrice poreuses ( $m$  pour *matrix*) sont ici distinguées et possèdent des équations indépendantes. Sans discontinuité, l'équation de conservation de l'énergie dans la paroi s'écrit :

$$\frac{\partial m_i^w c_{v,i}^w T_i^w}{\partial t} = k_{f_{i+1}}^w S_{f_{i+1}}^w \frac{T_{i+1}^w - T_i^w}{\partial x_{f_{i+1}}} - k_{f_i}^w S_{f_i}^w \frac{T_i^w - T_{i-1}^w}{\partial x_{f_i}} + \sum_{j \in \{g,m,o\}} \alpha_i^{w,j} A_i^{w,j} (T_i^j - T_i^w) \quad (1)$$

Cette équation est alors écrite sous la forme d'un système tridiagonal avec un schéma implicite du second ordre en temps ( $\frac{\partial \Psi_i}{\partial t} \approx \frac{a_k}{\delta t} \Psi_i^k + \frac{a_{k-1}}{\delta t} \Psi_i^{k-1} + \frac{a_{k-2}}{\delta t} \Psi_i^{k-2}$ ) pour être résolu :

$$a_{1,i}^w \cdot T_{i-1}^{w,k} + a_{2,i}^w \cdot T_i^{w,k} + a_{3,i}^w \cdot T_{i+1}^{w,k} = b_i^w \quad (2)$$

$$\text{avec} \begin{cases} a_{1,i}^w = -\frac{k_{f_i}^{w,k} S_{r,f_i}^w}{\delta x_{f_i}^k} \\ a_{2,i}^w = \frac{a_k}{\delta t} \cdot m^w c_v^w + \frac{k_{f_{i+1}}^{w,k} S_{l,f_i}^w}{\delta x_{f_{i+1}}^k} + \frac{k_{f_i}^{w,k} S_{r,f_i}^w}{\delta x_{f_i}^k} + \sum_{j \in \{g,m,o\}} \alpha_i^{w,j,k} A_i^{w,j} \\ a_{3,i}^w = -\frac{k_{f_{i+1}}^{w,k} S_{l,f_i}^w}{\delta x_{f_{i+1}}^k} \\ b_i^w = -\frac{a_{k-1}}{\delta t} (m^w c_v^w T^w)_i^{k-1} + \frac{a_{k-2}}{\delta t} (m^w c_v^w T^w)_i^{k-2} + \sum_{j \in \{g,m,o\}} \alpha_i^{w,j,k} A_i^{w,j} T_i^{j,k} \end{cases}$$

La résolution de cette équation, couplée à celles des températures du gaz et de la matrice poreuse, se fait de manière itérative jusqu'à convergence.

La discontinuité en  $f_i$  génère une résistance supplémentaire à la conduction. Pour en tenir compte, une cellule fictive de température  $T_{f_i}^w$  est introduite. Les bilans sur les cellules  $i$ ,  $f_i$  et  $i-1$  s'écrivent alors :

$$\frac{\partial m_{i-1}^w c_{v,i-1}^w T_{i-1}^w}{\partial t} = \frac{T_{f_i}^{w,k} - T_{i-1}^{w,k}}{Re_{l,f_i}} - k_{f_{i-1}}^{w,k} S_{f_{i-1}}^w \frac{T_{i-1}^{w,k} - T_{i-2}^{w,k}}{\partial x_{f_{i-1}}^k} + \sum_{j \in \{g,m,o\}} \alpha_{i-1}^{w,j,k} A_{i-1}^{w,j} (T_{i-1}^{j,k} - T_{i-1}^{w,k}) \quad (3a)$$

$$\frac{\partial m_{f_i}^w c_{v,f_i}^w T_{f_i}^w}{\partial t} = \frac{T_i^{w,k} - T_{f_i}^{w,k}}{R_{r,f_i}} - \frac{T_{f_i}^{w,k} - T_{i-1}^{w,k}}{R_{l,f_i}} + \sum_{j \in \{g,m,o\}} \alpha_{f_i}^{g,w,k} A_{f_i}^{g,w} (\theta_{f_i}^{g,k} - T_{f_i}^{w,k}) \quad (3b)$$

$$\frac{\partial m_i^w c_{v,i}^w T_i^w}{\partial t} = k_{f_{i+1}}^{w,k} S_{f_{i+1}}^w \frac{T_{i+1}^{w,k} - T_i^{w,k}}{\partial x_{f_{i+1}}^k} - \frac{T_i^{w,k} - T_{f_i}^{w,k}}{Re_{r,f_i}} + \sum_{j \in \{g,m,o\}} \alpha_i^{w,j,k} A_i^{w,j} (T_i^{j,k} - T_i^{w,k}) \quad (3c)$$

en faisant appel aux résistances de convection  $R_{l,f_i} = \frac{\delta x_{i-1}/2}{k_{i-1} \cdot S_{i-1}^w} + \frac{|\ln r_{moy}/r_{i-1}|}{2\pi k_{i-1} \cdot e}$  et  $R_{r,f_i} = \frac{\delta x_i/2}{k_i \cdot S_i^w} + \frac{|\ln r_i/r_{moy}|}{2\pi k_i \cdot e}$  avec  $r_{moy} = \frac{r_{i-1}+r_i}{2}$  et l'épaisseur  $e$  de la discontinuité. La paroi verticale en  $f_i$  échange de la chaleur avec le gaz à la température  $T_i^g$  si la discontinuité est croissante, à  $T_{i-1}^g$  si elle est décroissante, et n'échange pas de chaleur si aucune discontinuité n'est présente. Le coefficient d'échange est approximé par  $\alpha_{f_i}^{g,w} = (\alpha_{i-1}^{g,w} + \alpha_i^{g,w})/2$ . Le bilan (3b) est utilisé pour exprimer la température moyenne de la discontinuité à partir des températures des cellules adjacentes  $i$  et  $i-1$  :

$$T_{f_i}^{k,w} = \frac{\frac{T_i^{w,k}}{R_{r,f_i}} + \frac{T_{i-1}^{w,k}}{R_{l,f_i}} + N_{f_i}^w}{D_{f_i}^w} \quad (4)$$

$$\text{avec} \begin{cases} D_{f_i}^w = \frac{1}{R_{l,f_i}} + \frac{1}{R_{r,f_i}} + \sum_{j \in \{g,m,o\}} \alpha_{f_i}^{g,w,k} A_{f_i}^{g,w} + \frac{a_k}{\Delta t} (m^w c_v^w)_{f_i}^k \\ N_{f_i}^w = \sum_{j \in \{g,m,o\}} \alpha_{f_i}^{g,w,k} A_{f_i}^{g,w} \theta_{f_i}^{g,k} - \frac{a_{k-1}}{\delta t} (m^w c_v^w T^w)_{f_i}^{k-1} - \frac{a_{k-2}}{\delta t} (m^w c_v^w T^w)_{f_i}^{k-2} \end{cases}$$

En injectant l'expression (4) de  $T_{f_i}^w$  dans les équations (3a) et (3c),  $T_{f_i}$  est éliminé afin de conserver la même dimension du système linéaire à résoudre, que ce soit en présence ou en absence de discontinuité. Les bilans sur les cellules  $i-1$  et  $i$  peuvent alors être formulés sous la forme de systèmes tridiagonaux modifiés :

$$a_{1,i-1}^{w,*} \cdot T_{i-2}^{w,k} + a_{2,i-1}^{w,*} \cdot T_{i-1}^{w,k} + a_{3,i-1}^{w,*} \cdot T_i^{w,k} = b_{i-1}^{w,*} \quad \text{et} \quad a_{1,i}^{w,*} \cdot T_{i-1}^{w,k} + a_{2,i}^{w,*} \cdot T_i^{w,k} + a_{3,i}^{w,*} \cdot T_{i+1}^{w,k} = b_i^{w,*} \quad (5)$$

$$\text{avec} \begin{cases} a_{1,i-1}^{w,*} = a_{1,i-1}^w \\ a_{2,i-1}^{w,*} = a_{2,i-1}^w - \frac{\delta x_{f_i}}{k_{f_i} S_{f_i}^w} + \frac{1}{R_{l,f_i}} \left(1 - \frac{1}{R_{l,f_i}} \frac{1}{D_{f_i}^w}\right) \\ a_{3,i-1}^{w,*} = a_{3,i-1}^w + \frac{\delta x_{f_i}}{k_{f_i} S_{f_i}^w} - \frac{1}{R_{r,f_i}} \frac{1}{R_{l,f_i}} \frac{1}{D_{f_i}^w} \\ b_{i-1}^{w,*} = b_{i-1}^w + \frac{1}{R_{l,f_i}} \frac{N_{f_i}^w}{D_{f_i}^w} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_{1,i}^{w,*} = a_{1,i}^w + \frac{\delta x_{f_i}}{k_{f_i} S_{f_i}^w} - \frac{1}{R_{r,f_i}} \frac{1}{R_{l,f_i}} \frac{1}{D_{f_i}^w} \\ a_{2,i}^{w,*} = a_{2,i}^w - \frac{\delta x_{f_i}}{k_{f_i} S_{f_i}^w} + \frac{1}{R_{r,f_i}} \left(1 - \frac{1}{R_{r,f_i}} \frac{1}{D_{f_i}^w}\right) \\ a_{3,i}^{w,*} = a_{3,i}^w \\ b_i^{w,*} = b_i^w - \frac{1}{R_{r,f_i}} \frac{N_{f_i}^w}{D_{f_i}^w} \end{cases}$$

Les coefficients du système tridiagonal sont donc corrigées comme indiqué en (5) sur les cellules adjacentes aux discontinuités sur les faces  $f_i$ .

## 2.2. Discrétisation des autres équations de conservation

La matrice poreuse ne présente aucune discontinuité, la conservation de l'énergie se traduit par l'équation (6) qui est similaire à celle de la paroi (1). Les températures de la matrice sont alors résolues sous la forme du système tridiagonal (2) où l'indice  $w$  est remplacé par  $m$ .

$$\frac{\partial m_i^m c_{v,i}^m T_i^m}{\partial t} = \left[ k^m S^m \frac{\partial T^{m,k}}{\partial x} \right]_{f_i}^{f_{i+1}} + \sum_{j \in \{g, w, o\}} \alpha_i^{m,j,k} A_i^{m,j} (T_i^{j,k} - T_i^{m,k}) \quad (6)$$

La masse d'hélium varie dans chaque cellule  $i$  selon l'équation (7a) avec  $[\dot{m}]_{f_i}^{f_{i+1}} = \dot{m}_{f_{i+1}}^k - \dot{m}_{f_i}^k$  étant la différence des débits massiques de gaz sur chaque face, ce qui assure la conservation de la masse dans le moteur. La conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie dans le gaz sont décrits par les équations (7b) et (7c). La friction dans la cellule  $f_i$  est calculée par  $C_{f_i}^F \cdot V_{f_i} = C_{f_i}^{F,l} V_{f_i}^l + C_{f_i}^{F,r} V_{f_i}^r$  en distinguant la friction dans le volume de gauche  $V_{f_i}^l = \pi r_{i-1}^2 \cdot \delta x_{f_i}/2$  et celui de droite  $V_{f_i}^r = \pi r_i^2 \cdot \delta x_{f_i}/2$  au niveau des discontinuités. Les coefficients de friction  $C_{f_i}^F$  et d'échange convectif  $\alpha_i^{g,j}$  sont définis par des corrélations décrites dans [5, 6].

$$\frac{\partial m_i^g}{\partial t} + [\dot{m}]_{f_i}^{f_{i+1}} = 0 \quad (7a)$$

$$\frac{\partial (mu)_{f_i}^g}{\partial t} + [\dot{m}u]_{f_i}^{f_{i+1}} = (p_i - p_{i-1}) \frac{V_{f_i}}{\delta x_{f_i}} + C_{f_i}^F V_{f_i} \dot{m}_{f_i} \quad (7b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial m_i^g \left( \frac{u_i^2}{2} + c_{v,i} T_i^g \right)}{\partial t} + \left[ \dot{m} \left( \frac{u^2}{2} + c_P^g T^g \right) \right]_{f_i}^{f_{i+1}} &= \left[ k^g S^g \frac{\partial T^g}{\partial x} \right]_{f_i}^{f_{i+1}} + \sum_{j \in \{m, w, o\}} \alpha_i^{g,j} A_i^{g,j} (T_i^j - T_i^g) \\ &+ \alpha_{f_i}^{g,w,j} A_{f_i}^{g,w} (T_{f_i}^w - T_i^g) \delta_{f_i}^+ + \alpha_{f_{i+1}}^{g,w,j} A_{f_{i+1}}^{g,w} (T_{f_{i+1}}^w - T_i^g) \delta_{f_{i+1}}^- \end{aligned} \quad (7c)$$

La loi des gaz parfaits décrit l'état thermodynamique de l'hélium et permet de fermer ce système :

$$p_i = m_i^g r T_i^g / V_i^g \quad (8)$$

où  $r$  la constante des gaz parfaits.

Le système d'équation (7) est résolu avec un schéma décentré d'ordre 2 pour les flux de vitesse ( $\dot{m}u$ ) et d'enthalpie ( $\dot{m}c_p T^g$ ) :

$$(\dot{m}u)_i^k = \max(u_i^k, 0) (G_{1,i} \dot{m}_{f_i}^k - G_{2,i} \dot{m}_{f_{i-1}}^k) + \min(u_i^k, 0) (G_{3,i} \dot{m}_{f_{i+1}}^k - G_{4,i} \dot{m}_{f_{i+2}}^k) \quad (9a)$$

$$(\dot{m}h)_{f_i}^k = \max(\dot{m}_{f_i}^k c_{p,f_i}^k, 0) (G_{1,f_i} T_{i-1}^{g,k} - G_{2,f_i} T_{i-2}^{g,k}) + \min(\dot{m}_{f_i}^k c_{p,f_i}^k, 0) (G_{3,f_i} T_i^{g,k} - G_{4,f_i} T_{i+1}^{g,k}) \quad (9b)$$

avec les coefficients géométriques d'interpolation :

$$G_{1,i} = \frac{\delta x_i^k + 2\delta x_{i-1}^k}{2\delta x_{i-1}^k}, \quad G_{2,i} = \frac{\delta x_i^k}{2\delta x_{i-1}^k}, \quad G_{3,i} = \frac{\delta x_i^k + 2\delta x_{i+1}^k}{2\delta x_{i+1}^k}, \quad G_{4,i} = \frac{\delta x_i^k}{2\delta x_{i+1}^k} \quad (10a)$$

$$G_{1,f_i} = \frac{\delta x_{f_i}^k + 2\delta x_{f_{i-1}}^k}{2\delta x_{f_{i-1}}^k}, \quad G_{2,f_i} = \frac{\delta x_{f_i}^k}{2\delta x_{f_{i-1}}^k}, \quad G_{3,f_i} = \frac{\delta x_{f_i}^k + 2\delta x_{f_{i+1}}^k}{2\delta x_{f_{i+1}}^k}, \quad G_{4,f_i} = \frac{\delta x_{f_i}^k}{2\delta x_{f_{i+1}}^k} \quad (10b)$$

La conservation de la masse (7a) est couplée à celle de la quantité de mouvement (7b) grâce à la loi des gaz parfaits (8), ce qui aboutit au système pentadiagonal suivant :

$$a_{1,f_i}^g \cdot \dot{m}_{f_{i-2}}^k + a_{2,f_i}^g \cdot \dot{m}_{f_{i-1}}^k + a_{3,f_i}^g \cdot \dot{m}_{f_i}^k + a_{4,f_i}^g \cdot \dot{m}_{f_{i+1}}^k + a_{5,f_i}^g \cdot \dot{m}_{f_{i+2}}^k = b_{f_i}^g \quad (11)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,f_i}^g = G_{2,i-1} \cdot \max(u_{i-1}^k, 0) \\ a_{2,f_i}^g = -G_{1,i-1} \cdot \max(u_{i-1}^k, 0) - G_{2,i} \cdot \max(u_i^k, 0) - \frac{V_{f_i}^k}{\delta x_{f_i}^k} \frac{\delta t}{a_k} \frac{r T_{i-1}^k}{V_{i-1}^{k,g}} \\ a_{3,f_i}^g = -G_{3,i-1} \cdot \min(u_{i-1}^k, 0) + G_{1,i} \cdot \max(u_i^k, 0) + a_k \frac{\delta x_{f_i}^k}{\Delta t} + \frac{V_{f_i}^k}{\delta x_{f_i}^k} \frac{r \delta t}{a_k} \left( \frac{T_i^k}{V_i^{k,g}} + \frac{T_{i-1}^k}{V_{i-1}^{k,g}} \right) - C_{f_i}^F V_{f_i}^{g,k} \\ a_{4,f_i}^g = G_{4,i-1} \cdot \min(u_{i-1}^k, 0) + G_{3,i} \cdot \min(u_i^k, 0) - \frac{V_{f_i}^k}{\delta x_{f_i}^k} \frac{\delta t}{a_k} \frac{r T_i^k}{V_i^{k,g}} \\ a_{5,f_i}^g = -G_{4,i} \cdot \min(u_i^k, 0) \\ b_{f_i}^g = \left\{ \left( \frac{a_{k-1}}{a_k} \frac{p_{i-1}^{k-1} V_{i-1}^{k-1}}{T_{i-1}^{k-1}} + \frac{a_{k-2}}{a_k} \frac{p_{i-1}^{k-2} V_{i-1}^{k-2}}{T_{i-1}^{k-2}} \right) \frac{T_{i-1}^k}{V_{i-1}^k} + \left( \frac{a_{k-1}}{a_k} \frac{p_i^{k-1} V_i^{k-1}}{T_i^{k-1}} + \frac{a_{k-2}}{a_k} \frac{p_i^{k-2} V_i^{k-2}}{T_i^{k-2}} \right) \frac{T_i^k}{V_i^k} \right\} \cdot \frac{V_{f_i}^{g,k}}{\delta x_{f_i}^k} \\ - \frac{a_{k-1}}{\delta t} \delta x_{f_i}^{k-1} \dot{m}_{f_i}^{k-1} - \frac{a_{k-2}}{\delta t} \delta x_{f_i}^{k-2} \dot{m}_{f_i}^{k-2} \end{array} \right.$$

Par rapport à la littérature, le terme en facteur du gradient de pression ( $V_{f_i}/\delta x_{f_i}$ ) est modifié avec  $V_{f_i} = V_{f_i}^l + V_{f_i}^r$ . Sans discontinuité, ce terme est équivalent à la section de passage qui est classiquement utilisé dans la littérature.

La conservation de l'énergie (7c) aboutit également à un système pentadiagonal :

$$a_{1,i}^g T_{i-2}^{g,k} + a_{2,i}^g T_{i-1}^{g,k} + a_{3,i}^g T_i^{g,k} + a_{4,i}^g T_{i+1}^{g,k} + a_{5,i}^g T_{i+2}^{g,k} = b_i^g, \quad (12)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{1,i}^g = G_{2,f_i} \cdot \max(\dot{m}_{f_i}^k c_{p,f_i}^k, 0) \\ a_{2,i}^g = -G_{1,f_i} \cdot \max(\dot{m}_{f_i}^k c_{p,f_i}^k, 0) - G_{2,f_{i+1}} \cdot \max(\dot{m}_{f_{i+1}}^k c_{p,f_{i+1}}^k, 0) - \frac{k_{f_i}^{g,k} S_{r,f_i}^g}{\delta x_{f_i}^k} \\ a_{3,i}^g = -G_{3,f_i} \cdot \min(\dot{m}_{f_i}^k c_{p,f_i}^k, 0) + G_{1,f_{i+1}} \cdot \max(\dot{m}_{f_{i+1}}^k c_{p,f_{i+1}}^k, 0) + \frac{k_{f_i}^{g,k} S_{r,f_i}^g}{\delta x_{f_i}^k} + \frac{k_{f_{i+1}}^{g,k} S_{l,f_i}^g}{\delta x_{f_{i+1}}^k} + \frac{a_k}{\delta t} m^g c_v^g + \sum_{j \in \{m,w,o\}} (\alpha_i^{g,j})^k A_i^{g,j} \\ a_{4,i}^g = G_{4,f_i} \cdot \min(\dot{m}_{f_i}^k c_{p,f_i}^k, 0) + G_{3,f_{i+1}} \cdot \min(\dot{m}_{f_{i+1}}^k c_{p,f_{i+1}}^k, 0) - \frac{k_{f_{i+1}}^{g,k} S_{l,f_{i+1}}^g}{\delta x_{f_{i+1}}^k} \\ a_{5,i}^g = -G_{4,f_{i+1}} \cdot \min(\dot{m}_{f_{i+1}}^k c_{p,f_{i+1}}^k, 0) \\ b_i^g = -\left(\dot{m} \frac{u^2}{2}\right)_{f_{i+1}}^{g,k} - \left(\dot{m} \frac{u^2}{2}\right)_{f_i}^{g,k} - \frac{a_k}{\delta t} \left(\frac{m u^2}{2}\right)_i^{g,k} + \frac{a_{k-1}}{\delta t} \left(m c_v T + \frac{m u^2}{2}\right)_i^{g,k-1} + \frac{a_{k-2}}{\delta t} \left(m c_v T + \frac{m u^2}{2}\right)_i^{g,k-2} + \sum_{j \in \{m,w,o\}} (\alpha_i^{g,j})^k A_i^{g,j} T_i^{j,k} \end{array} \right.$$

Si le système ne présente pas de discontinuité, il reste inchangé; en revanche, en présence d'une discontinuité croissante sur la face  $f_i$  ou décroissante sur la face  $f_{i+1}$ , il est nécessaire de modifier les coefficients  $a_{3,i}^g$  et  $b_i^g$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{3,i}^g = a_{3,i}^g + \alpha_{f_i}^{g,w} A_{f_i}^{g,w} \delta_{f_i}^+ + \alpha_{f_{i+1}}^{g,w} A_{f_{i+1}}^{g,w} \delta_{f_{i+1}}^- \\ b_i^g = b_i^g + \alpha_{f_i}^{g,w} A_{f_i}^{g,w} \delta_{f_i}^+ T_{f_i}^w + \alpha_{f_{i+1}}^{g,w} A_{f_{i+1}}^{g,w} \delta_{f_{i+1}}^- T_{f_{i+1}}^w \end{array} \right. \quad (13)$$

### 3. Résultats

Les conditions de fonctionnement de la simulation sont définies avec une pression moyenne de 28 bar, des températures de paroi respectives de 923 K pour le chauffage et 300 K pour le refroidissement, et une fréquence de fonctionnement de 50 Hz. La simulation a été réalisée sur 2000 cycles pour assurer la convergence des puissances mécanique et thermique.

#### 3.1. Température dans les solides

Les températures des parois solides et de la matrice poreuse dans le régénérateur sont calculées le long du moteur Stirling GPU3 sans hélium (conduction pure) ou avec convection, puis comparées à la solution analytique du cas sans convection (cf. Figure 2). Dans le cas de la conduction pure, la température de paroi se déduit analytiquement du flux de conduction qui s'établit entre le réchauffeur et le refroidisseur :  $\Phi = (T_{chaud} - T_{froid})/R_{tot}$ , avec la résistance

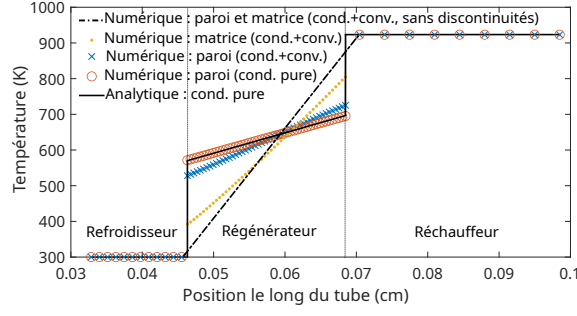


Figure 2 : Distribution des températures dans les parois ou la matrice poreuse du GPU3.

thermique totale étant la somme des résistances thermiques des 2 discontinuités ( $\frac{\ln(r_2/r_1)}{2\pi\lambda e}$  où  $r_1$  et  $r_2$  sont les rayons moyens des sections adjacentes et  $e$  l'épaisseur) et de celle du régénérateur ( $\frac{L_{\text{régé}}}{\lambda S_{\text{régé}}^w}$ ).

L'accord entre la solution analytique et la solution numérique de la température de paroi en conduction pure valide la prise en compte correcte des discontinuités de paroi entre les échangeurs et le régénérateur. Les discontinuités génèrent des sauts importants de température. Sans traitement particulier, la température des éléments solides évolue de manière linéaire sans aucun saut, ce qui n'est pas physique. Le traitement particulier des discontinuités doit être pris en compte puisque les sauts de température sont encore bien visibles en présence de convection sur les profils de température de la paroi et de la matrice poreuse, ce qui impacte les transferts thermiques avec le gaz dans le régénérateur puis entre le gaz et les échangeurs.

### 3.2. Pression-Volume

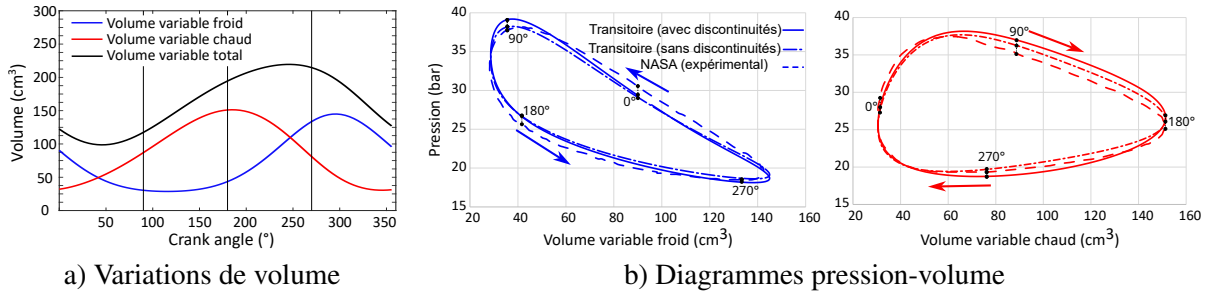


Figure 3 : Évolution de la pression et du volume au cours du cycle convergé.

La figure 3a montre les variations périodiques des volumes dans les espaces de compression (coté froid) et de détente (coté chaud) ainsi que le volume variable total sur un cycle complet. Ces variations entraînent des oscillations régulières de la pression, comme montré par les diagrammes PV de la figure 3b. L'hélium subit une compression relativement isochore entre 0 et 90° car il est chassé de l'espace froid vers l'espace chaud en gardant le volume total relativement constant. En se trouvant principalement dans le réchauffeur, l'augmentation du volume total cause une détente du gaz à haute température, ce qui fait chuter la pression entre 90 et 180°. L'hélium continue sa détente de manière isochore entre 180 et 270° : il stocke sa chaleur dans le régénérateur en se déplaçant de l'espace chaud vers l'espace froid, ce qui fait chuter la pression et absorbe des calories sur le réchauffeur. Le gaz se situe majoritairement dans la zone froide entre 270 et 360° où il subit une compression à basse température.

La figure 1 illustre l'influence de la gestion des discontinuités sur le modèle transitoire en comparant les résultats obtenus avec et sans gestion des sauts de section aux données expérimentales de Thieme [9]. La gestion de la discontinuité et la distinction entre paroi et matrice poreuse influence la pression dans le système. Les tendances sont bien reproduites par le modèle et la cohérence avec les données expérimentales traduit une capture correcte de la physique par ces modèles. Les différences résiduelles peuvent s'expliquer par diverses raisons : les corrélations décrivant les transferts convectifs ainsi que les pertes de charge dans les différents composants, les effets multi-dimensionnels non pris en charge dans le modèle, la mauvaise connaissance de certains paramètres expérimentaux ou de la géométrie, la non prise en compte des frottements du piston, etc.

Étude	Travail de compression [J]	Travail de détente [J]
NASA [9] (expérimental)	108	-156
modèle transitoire sans gestion des discontinuités	89	-157
modèle transitoire avec gestion des discontinuités	97	-161

Tableau 1 : Comparaison des travaux de compression et détente obtenus par différentes approches.

L'aire entourée dans les diagrammes PV représentent les travaux mécaniques échangés par les forces de pression avec l'extérieur au niveau des pistons. L'aire de l'espace de compression correspond au travail consommé, tandis que celle de l'espace de détente correspond au travail produit. Les travaux obtenus sont comparés et résumés dans le tableau 1. Les résultats montrent que le modèle avec gestion des discontinuités prédit un travail de compression plus proche des données expérimentales comparé au modèle sans gestion. Les travaux de détente sont similaires pour les deux modèles sans gestion et avec gestion, indiquant que l'impact des discontinuités est plus marqué sur la compression. De manière générale, la gestion des discontinuités améliore la précision du modèle.

### 3.3. Température

La Figure 4 illustre les fluctuations des températures du gaz dans les volumes variables (chaud et froid) ainsi que dans les échangeurs thermiques (réchauffeur et refroidisseur), mesurées à trois positions distinctes (gauche, milieu et droite) au cours d'un cycle.

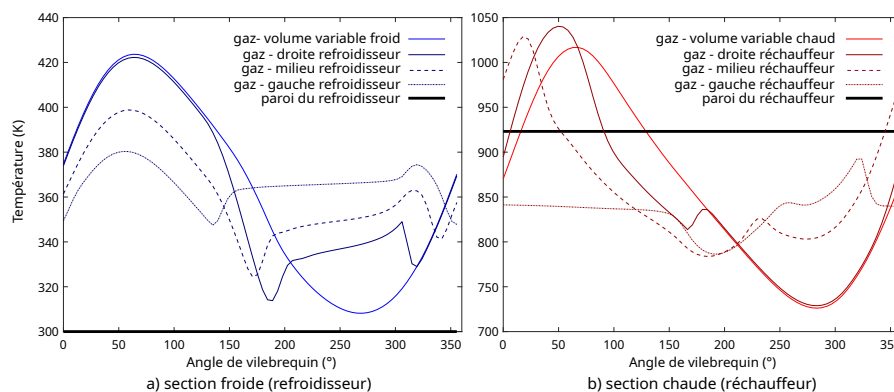


Figure 4 : Comparaison des fluctuations de température du gaz dans les sections chaude et froide.

Les températures du gaz montrent des oscillations périodiques dans l'ensemble du système. Les fluctuations de température aux positions gauche, milieu et droite révèlent une non-uniformité spatiale dans le transfert de chaleur à l'intérieur des échangeurs chaud et froid. Cette non-uniformité est plus prononcée dans le réchauffeur, en raison de sa taille plus importante que celle du refroidisseur. Dans la section froide, les températures du gaz restent supérieures à celle de la paroi, indiquant un transfert de chaleur constant et efficace du gaz de travail vers la paroi.

Dans la section froide (Fig. 4b), la température de la paroi est globalement supérieure à celle du gaz, ce qui traduit un apport de calories de l'extérieur au gaz de travail. Elle est toujours supérieure sur la partie gauche du réchauffeur, près du régénérateur. À la fin de la compression du gaz (entre 0 et 100°), le gaz est parfois légèrement plus chaud que la paroi, diminuant ainsi les puissances échangées au cours du cycle sur cet échangeur. De plus, on remarque que la température du gaz dans les échangeurs à proximité immédiate des volumes variables reste proche de celle du gaz dans ces volumes lorsque le gaz provient de l'échangeur, indiquant une bonne continuité thermique entre les échangeurs et les volumes variables.

## 4. Conclusion

Ce travail présente un modèle numérique transitoire développé pour simuler le comportement thermique du moteur Stirling GPU3. Contrairement aux approches classiques de la littérature, notre approche introduit des traitements spécifiques pour les discontinuités géométriques.

L'exemple étudié montre que ce traitement améliore la description des transferts thermiques dans le régénérateur et les échangeurs. La comparaison des résultats numériques et expérimentaux montre une concordance satisfaisante, malgré des écarts résiduels dont les causes restent difficiles à identifier avec les données disponibles. Ce modèle constitue une base solide pour des études futures sur l'optimisation des performances des machines thermiques régénératives.

## Références

- [1] C. M. HARGREAVES, *The Philips Stirling Engine*, Elsevier, 1991.
- [2] F. Formosa and G. Despesse Analytical model for Stirling cycle machine design. *Energy Conversion and Management*, 51(10) :1855-1863, 2010.
- [3] Mohammad H. Ahmadi and Mohammad Ali Ahmadi and Fathollah Pourfayaz and Mokhtar Bidi and Hadi Hosseinzade and Michel Feidt. Optimization of powered Stirling heat engine with finite speed thermodynamics. *Energy Conversion and Management*, 108 :96-105, 2016.
- [4] Urieli, Israel and Berchowitz, David M, *Stirling cycle engine analysis*, 1984.
- [5] AA Boroujerdi, A Ashrafizadeh, and SM Mousavi Naenian. Numerical analysis of stirling type pulse tube cryocoolers. *Cryogenics*, 51(9) :521-529, 2011.
- [6] Kai Wang, Swapnil Dubey, Fook Hoong Choo, and Fei Duan. A transient one-dimensional numerical model for kinetic stirling engine. *Applied energy*, 183 :775-790, 2016.
- [7] Wen-Lih Chen and King-Leung Wong and Yu-Feng Chang. A computational fluid dynamics study on the heat transfer characteristics of the working cycle of a low-temperature-differential  $\gamma$ -type Stirling engine. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 75 :145-155, 2014.
- [8] Rogdakis E, Bitsikas P, Dogkas G, Antonakos G. Three-dimensional CFD study of a  $\beta$ -type Stirling Engine. *Thermal Science and Engineering Progress*, 11 :302-316, 2019.
- [9] Thieme LG., *Low-power baseline test results for the GPU 3 Stirling engine* ( NASA Lewis Research Center, Cleveland, OH, USA. 1979)
- [10] Martini, William R, *Stirling engine design manual*, 1983.

## Remerciements

Les auteurs remercient l'Agence Nationale de la Recherche (ANR) pour son soutien, dans le cadre du projet ANR-21-CE05-0007 (projet DAVinCCHeaP).