

# Estimation tridimensionnelle de la densité de flux de chaleur à partir de mesures thermographiques

Lamiaie ATMANI<sup>1\*</sup>, Elodie COURTOIS<sup>1</sup>, Pascal LE BIDEAU<sup>1</sup>, Tahar LOULOU<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Université Bretagne Sud, UMR CNRS 6027, IRDL  
F-56100 Lorient, France

\*(auteur correspondant :lamiae.atmani@univ-ubs.fr )

**Résumé** - Cette étude présente l'estimation tridimensionnelle d'une densité de flux de chaleur  $q(x,y,t)$  de forme gaussienne par résolution d'un problème inverse de conduction thermique grâce à la méthode SFSM. Pour la première fois, cette méthode est utilisée avec un très grand nombre de points de mesures (640 x 512) pixels obtenus par caméra IR à 120 Hz. Ceci permet d'estimer la densité de flux de chaleur avec une distribution spatiale fine inférieure au millimètre dans le but à terme de rendre compte des disparités de transfert de flux de chaleur pouvant exister sur une surface ou à une interface. L'implémentation de la méthode est d'abord validée à travers des expériences numériques. Ensuite la méthodologie est expérimentée à travers l'estimation de la densité de flux de chaleur imposée par un laser sur une plaque de fer à partir de mesures de température par caméra IR.

## 1. Introduction

Dans l'industrie agro-alimentaire, la qualité (sanitaire, gustative, visuelle...) des produits cuits par contact est en grande partie liée à la qualité du contact, au travers la résistance de contact thermique présente entre le support de cuisson et le produit. C'est notamment le cas lors de la cuisson des crêpes où les défauts ponctuels présents sur le support de cuisson peuvent mener à la présence de zones trop cuites voir brûlées. La détermination de la distribution de la densité de flux de chaleur à l'échelle sub-millimétrique pourrait permettre de détecter ces défauts. Or la mesure directe d'un flux de chaleur transmis à un milieu ou transitant par celui-ci est intrinsèquement intrusive et moyennée. La mesure de la distribution spatio-temporelle d'un champ de densités de flux est d'autant plus difficile, notamment lorsque ses variations sont brusques dans le temps ou dans l'espace. Le recours aux techniques inverses a donc été privilégié et repose ici sur l'estimation d'une densité de flux surfacique inconnue à partir de mesures transitoires du champ de température grâce à l'estimation de fonction. La méthode de spécification de fonction peut être utilisée, soit en résolution globale, soit en résolution séquentielle. La première procédure consiste à estimer simultanément l'ensemble de la fonction inconnue, par exemple du flux de chaleur inconnu. En revanche, la procédure séquentielle, introduite par Beck [1], estime à chaque boucle de résolution, les inconnues spatiales à un instant donné.

La résolution des problèmes inverses de conduction de chaleur par méthode de spécification de fonction séquentielle (SFSM) est couramment utilisée pour l'estimation unidimensionnelle de la densité de flux de chaleur  $q(t)$  [2, 3]. Une minorité d'études a considéré des configurations à plus haute dimension, le plus souvent en 2D avec  $q(x,t)$  [4, 5, 6, 7], et plus rarement en 3D avec  $q(x,y,t)$  [8, 9, 10]. Ces travaux restent généralement limités par des hypothèses simplificatrices— notamment la supposition d'une forme a priori du flux inconnu [8] — ou par une estimation à faible résolution spatiale, liée à l'usage de thermocouples [9].

Cette étude a pour objectif de déterminer la répartition spatio-temporelle de la densité de flux de chaleur  $q(x,y,t)$  par résolution d'un problème inverse, en utilisant la méthode SFSM couplée à une régularisation de Tikhonov d'ordre deux. Une validation numérique de l'implémentation de la méthode est d'abord réalisée pour évaluer sa précision, en tenant compte de la stabilisation

spatiale (Tikhonov) et temporelle (pas de temps futurs). Ensuite, avant l'application à la pâte à crêpe, la procédure est validée ici expérimentalement sur une plaque de fer soumise à un flux thermique gaussien contrôlé par un laser, avec des mesures de température effectuées par thermographie infrarouge sur la face opposée.

## 2. Matériel et Méthodes

### 2.1. Dispositif expérimental

Une plaque plane de fer de faible épaisseur ( $L = 17,00 \pm 0,03 \text{ mm} \times W = 17,00 \pm 0,03 \text{ mm} \times E = 1,12 \pm 0,08 \text{ mm}$ ) est sollicitée sur sa face avant ( $z = 0$ ) par un laser délivrant un flux de chaleur  $Q_{\text{laser}}$  contrôlé en amplitude et distribué spatialement selon une fonction gaussienne 2D. Le champ de températures est mesuré sur la face opposée à l'aide d'une caméra thermique FLIR X6580sc à haute résolution ( $640 \times 512$  pixels) pour une fréquence de 120 Hz ( $\delta t = 8 \text{ ms}$ ). L'expérience dure 4,8 s. Les surfaces avant et arrière ont été préalablement recouvertes de peinture graphite, assurant une absorptivité  $\alpha = 0,9 \pm 0,02$  à la longueur d'onde du laser sur la face avant et une émissivité  $\varepsilon = 0,85 \pm 0,03$  sur la face arrière.

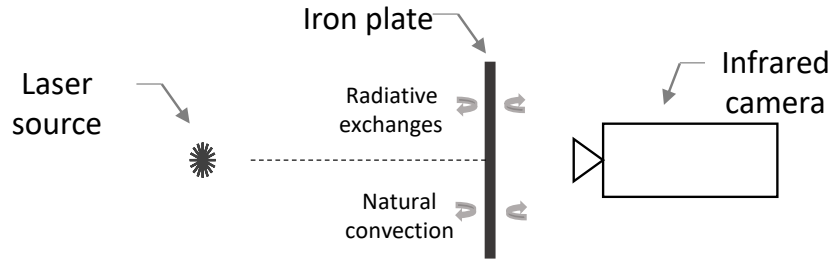


Figure 1 : Dispositif expérimental

### 2.2. Modèle direct de conduction de chaleur

Un modèle tridimensionnel de conduction de la chaleur en régime transitoire est utilisé. Le matériau est considéré homogène et isotrope. Les propriétés thermophysiques, à savoir la conductivité thermique  $\lambda$ , la masse volumique  $\rho$  et la capacité thermique massique  $c_p$  (Tableau 1) sont considérées constantes. Étant donné la faible épaisseur de la plaque, ses surfaces latérales sont supposées isolées, tandis que des échanges radiatifs et convectifs sont pris en compte sur les faces avant et arrière à travers un coefficient d'échange global  $h_{gl}$ . Le flux est imposé sur la face avant. La température initiale  $T(x, y, z, 0)$  de la plaque est prise égale à la température ambiante.

	$\rho$ $\text{kg.m}^{-3}$	$c_p$ $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$\lambda$ $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$	$h_{gl}$ $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$
Fer	7874	450	80	15

Tableau 1 : Propriétés thermophysiques considérées

### 2.3. Procédure inverse

La procédure inverse adoptée consiste à minimiser la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  tenant compte des écarts entre les températures mesurées  $Y_{k,i}$  (aux  $I$  nœuds de la face arrière et  $K$  instants discrets)

et les températures calculées correspondantes  $T_{k,i}$  (Eq.1), afin de déterminer la distribution des densités de flux de chaleur imposées sur la face avant. En raison de la nature discrète des mesures de température  $Y_{k,i}$ , les densités de flux de chaleur imposées doivent être exprimées de manière discrètes par rapport aux variables de temps et d'espace. Ainsi, la surface arrière de la plaque est discrétisée en  $J$  nœuds spatiaux, tandis que le temps d'expérience est divisé en  $K$  pas de temps uniformes. La discrétisation assure une correspondance exacte entre les nœuds de mesure de température  $i$  et les nœuds d'estimation du flux  $j$  ( $i = j$ ). Les densités de flux de chaleur  $q_{k,j}$  sont par la suite estimées simultanément dans l'espace et séquentiellement dans le temps. À un instant donné  $k$ , les densités de flux de chaleur spatiales  $q_{k,j}$  constituent le vecteur  $\beta_k$ , déterminé par la minimisation de la fonctionnelle  $\mathcal{F}(\beta_k)$ , avec une stabilisation spatiale et temporelle. La stabilisation spatiale est assurée par l'ajout d'un terme de régularisation d'ordre deux à la fonctionnelle  $\mathcal{F}(\beta_k)$ , avec un coefficient de régularisation optimal  $a$ . Cette régularisation prend en compte les variations des densités de flux de chaleur le long des deux directions spatiales  $(x, y)$ . La stabilisation temporelle est apportée en imposant des densités de flux constantes durant les  $R$  pas de temps futurs :  $\beta_k = \beta_{k+1} = \dots = \beta_{k+R-1}$ .

$$\mathcal{F}(\beta_k) = \sum_{r=1}^R \sum_{i=1}^I (Y_{k+r-1,i} - T_{k+r-1,i})^2 + a \sum_{j=1}^J \left( \left( \frac{\partial^2 q_{k,j}}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 q_{k,j}}{\partial y^2} \right)^2 \right) \rightarrow Min \quad (1)$$

$$T_{k+r-1,i}(\beta_k) = T_{k+r-1,i}(\beta_{k-1}) + \sum_{j=1}^J (Z_{r,j}^i)(q_{k,j} - q_{k-1,j}) \quad (2)$$

$T_{k+r-1,i}(\beta_{k-1})$  est la température calculée à partir de la résolution du PDCC, avec une condition à la limite  $\beta_{k-1}$  et une condition initiale  $T_{k-1,i}$  pour  $i = 1, \dots, I$ . Où  $Z_{r,j}^i = \frac{\partial T_{r,i}}{\partial q_{r,j}}$  représente la sensibilité de la température au nœud  $i$  de la face arrière par rapport à l'application de la densité de flux de chaleur au nœud  $j$  de la face avant après  $r$  pas de temps.

Le PDCC est résolu deux fois, pour le calcul de la sensibilité  $Z_{r,j}^i$  et le calcul des températures  $T_{k+r-1,i}(\beta_{k-1})$ , par la méthode des différences finies avec un schéma de discrétisation temporelle implicite de type BDF. L'algorithme inverse a été développé sous l'outil Matlab R2022a.

Dans un premier temps, la fiabilité de l'estimation a été évaluée à partir de champs de température générés par simulation numérique via le logiciel COMSOL Multiphysics<sup>®</sup> 6.0, en considérant la géométrie, les équations, les conditions limites et les propriétés thermophysiques de l'expérience décrite dans les parties (2.1) et (2.2). Dans un premier temps, une densité de flux de chaleur gaussienne 2D, invariante dans le temps (Eq. 3), a été appliquée pour explorer l'intérêt de la régularisation spatiale (cas 1). Dans un second temps, une densité de flux de chaleur gaussienne 2D dépendant linéairement du temps (Eq. 4) a été testée pour évaluer l'effet de la stabilisation temporelle dans la réduction des perturbations dues aux bruits de mesure (case 2). L'inversion a été réalisée avec un maillage d'estimation  $J = 37 \times 37$ .

$$\phi_1(x, y) = 4,5.10^6 \exp\left(-\frac{(x-L/2)^2 + (y-L/2)^2}{2(10^{-3})^2}\right) \quad (3)$$

$$\phi_2(t, x, y) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1,9 \text{ s} \\ (-5,73.10^6 t + 4,5.10^6) \exp\left(-\frac{(x-L/2)^2 + (y-L/2)^2}{2(10^{-3})^2}\right), & 1,9 \text{ s} \leq t \leq 2,9 \text{ s} \\ 0, & 2,9 \text{ s} < t < 4,8 \text{ s} \end{cases} \quad (4)$$

Pour quantifier l'erreur entre les valeurs de flux imposées  $\phi_{k,j}$  et estimées  $q_{k,j}$ , les indicateurs

d'erreur donnés par les équations 5-6 ont été utilisés en considérant la valeur maximale du flux imposé  $\phi_{pic}$ .

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{K.J} \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^J (q_{k,j} - \phi_{k,j})^2} \quad (5)$$

$$RMSE_{norm} = \frac{RMSE}{\phi_{pic}} \times 100 \quad (6)$$

### 3. Résultats

#### 3.1. Effet de la régularisation spatiale - cas 1

La Figure (2) présente la densité de flux de chaleur estimée à  $t = 2,5 \text{ s}$ , obtenue respectivement sans (Figure 2a) et avec régularisation spatiale (Tikhonov ordre 2) (Figure 2b) pour un maillage d'estimation  $J = 37 \times 37$ , équivalent à un pas spatial de  $0,45 \text{ mm}$  et un nombre de pas de temps futurs  $R = 4$ .

Les résultats montrent des fluctuations spatiales importantes en absence de régularisation, avec un  $RMSE_{norm}$  (Eq. 6) de  $5,17 \%$ . Ces fluctuations sont principalement dues à la forte sensibilité du modèle aux variations des données d'entrée. Même en l'absence de bruit numérique, le léger biais introduit par l'utilisation de modèles différents, pour générer et inverser les températures simulées, est amplifié lors de l'estimation. L'inversion perturbe la symétrie de la distribution spatiale du flux de chaleur, en raison de la non-unicité de la solution, qui permet à plusieurs composantes du flux de chaleur de satisfaire les mêmes évolutions de température. L'introduction d'une régularisation spatiale pondérée par un coefficient  $a$  pénalise les oscillations rapides des densités de flux tout en préservant la symétrie de la distribution, en améliorant la stabilité et le conditionnement de la solution. Ces améliorations se traduisent par une réduction significative du  $RMSE_{norm}$  à  $0,57 \%$

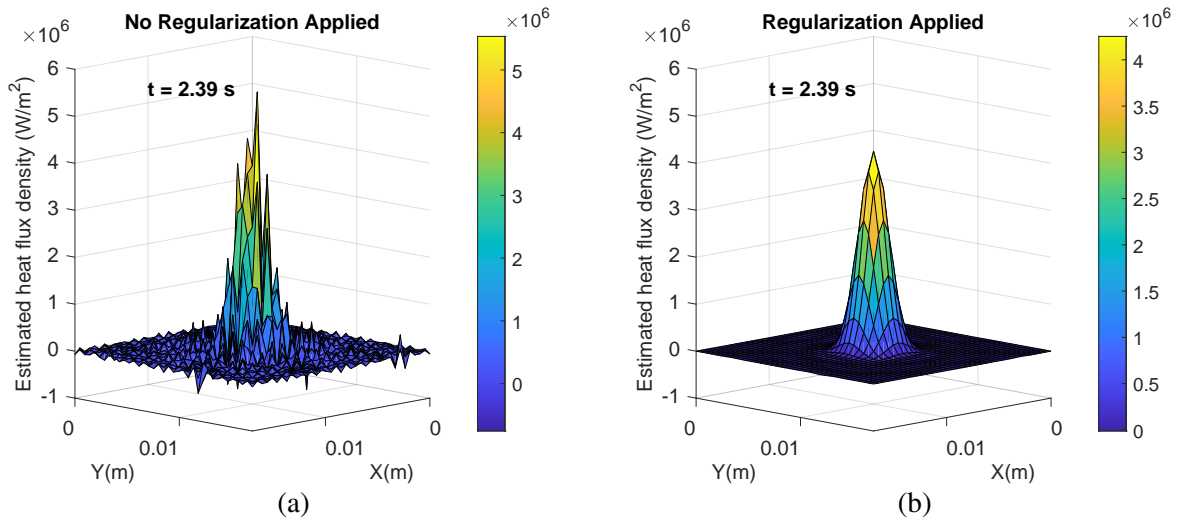


Figure 2 : Distribution des densités de flux de chaleur estimées à  $t = 2,39 \text{ s}$  (a) sans et (b) avec régularisation spatiale de Tikhonov ( $a = 1,07 \times 10^{-12}$ )

### 3.2. Effet du nombre de pas de temps futur - cas 2

La figure 3 présente la densité de flux de chaleur temporelle estimée à la position centrale de la plaque, pour différents nombres de pas de temps futurs ( $R = 1, 4, 8$ , et  $12$ ), sans bruit  $\sigma = 0$  (figure 3a), et avec bruit de mesure  $\sigma = 0,3$  (figure 3b). Pour  $R = 1$ , l'estimation présente une meilleure correspondance entre les niveaux de densité de flux de chaleur estimée et imposée en absence de bruit, car elle est réalisée sur un matériau diffusif de faible épaisseur. Le temps de diffusion étant inférieur au pas de temps d'estimation, l'intérêt du pas de temps futur devient négligeable. Par ailleurs, les pics importants estimés lors des variations brusques du flux sont attribués à la nature même du flux imposé, dont les changements s'opèrent plus rapidement que le pas de temps d'estimation à ces instants précis. En revanche, en présence de bruit, l'estimation entraîne de fortes oscillations du flux, comme l'indique l'augmentation significative du  $RMSE_{norm}$  (Eq. 6), qui passe de 0,53 % pour  $\sigma = 0$  à 11,91 % pour  $\sigma = 0,3$ . L'augmentation du nombre de pas de temps futurs réduit les variations accidentelles des densités de flux et les effets du bruit. Pour  $R = 4$ , le  $RMSE_{norm}$  atteint respectivement 0,46 % et 0,94 % pour  $\sigma = 0$ , et  $\sigma = 0,3$ . En présence du bruit ( $\sigma = 0,3$ ), le  $RMSE_{norm}$  s'améliore lorsque  $R$  passe de 4 à 8, atteignant ainsi 0,82 %. La contrainte imposée de densités de flux constantes sur  $R$  pas de temps futurs moyenne les densités de flux sur cet intervalle. Cela permet un lissage temporel qui atténue les variations brusques et réduit les oscillations dues aux bruits mais qui introduit également un biais en anticipant les variations du flux et en atténuant son amplitude. Ce biais est visible à travers l'augmentation des écarts entre la densité de flux imposée et estimée sur la partie haute du créneau. Il se reflète également dans le  $RMSE_{norm}$  qui atteint 0,78 % pour  $R = 8$  ( $\sigma = 0$ ) et 0,97 % pour  $R = 12$  ( $\sigma = 0$ ).

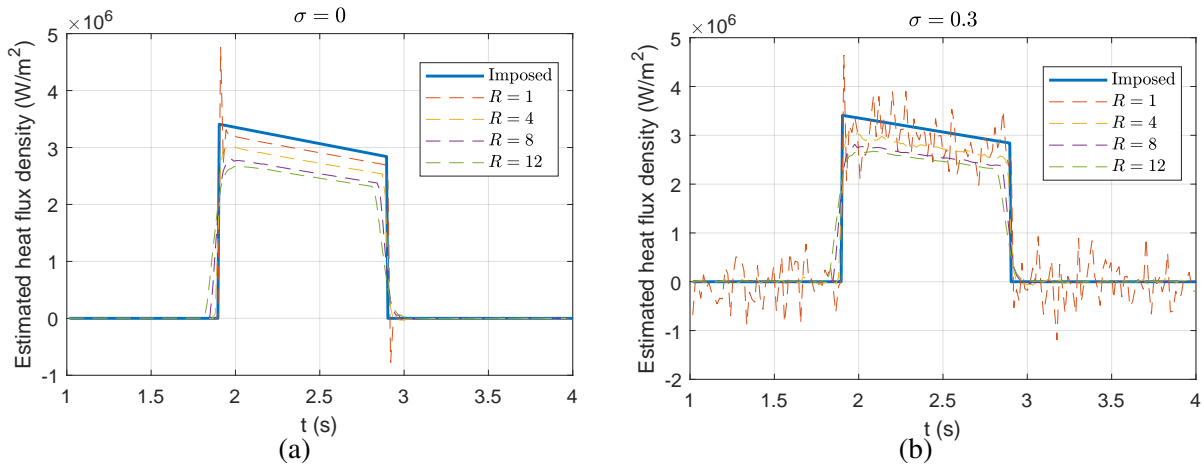


Figure 3 : Évolution temporelle de la densité de flux imposée et estimée en position centrale pour différents pas de temps futurs ( $R = 1, 4, 8, 12$ ) (a) sans  $\sigma = 0$  et (b) avec bruit de mesure  $\sigma = 0,3$

### 3.3. Validation expérimentale

Les températures enregistrées par thermographie sont présentées en figure 4 pour trois positions surfaciques de la plaque de fer : au centre  $P1(8,5 \text{ mm} ; 8,5 \text{ mm})$ , à un point intermédiaire  $P2(4,7 \text{ mm} ; 3,7 \text{ mm})$  et au coin  $P3(0 \text{ mm} ; 0 \text{ mm})$ . Les températures maximales sont atteintes au centre, correspondant au pic de l'incidence du laser, tandis que les coins se réchauffent plus tard par conduction. Comme indiqué dans la section 3.2, bien que le temps de diffusion soit inférieur au pas de temps d'estimation, le recours à des pas de temps futurs s'avère nécessaire

pour atténuer les effets des incertitudes de mesure. L'estimation ne fonctionne pas pour  $R < 4$ , d'où le choix de  $R = 4$  dans l'application de la méthode SFSM, avec une discrétisation spatiale de  $J = 37 \times 37$ , pour reconstruire le flux laser absorbé ( $\alpha q_{laser}$ ). L'estimation est testée avec des données d'entrée brutes et lissées temporellement à l'aide d'une moyenne mobile sur 5 points. L'estimation reproduit correctement la distribution spatiale de la densité de flux (figure 5), ainsi que la tendance globale temporelle du flux (figure 6), sans amélioration significative apportée par le lissage. Les écarts observés entre le flux de chaleur estimé et imposé peuvent être partiellement attribués aux biais introduits par les moyennes spatiales (discrétisation spatiale) et temporelles (pas de temps futurs) utilisées par la méthode SFSM. Les incertitudes liées au traitement des enregistrements de la caméra thermique (conversion des flux radiatifs enregistrés en températures en utilisant l'émissivité de la pâte et une courbe d'étalonnage), ainsi qu'à la non-homogénéité de l'épaisseur de la plaque, contribuent également à cette déviation. En effet, l'épaisseur de la plaque possède une influence significative sur l'estimation : une variation de 20 % entraîne une erreur de 17 % sur un flux de 10 W. Au contraire, l'analyse de sensibilité montre que l'estimation du flux est peu affectée par les erreurs sur les propriétés thermophysiques et le coefficient d'échange global.

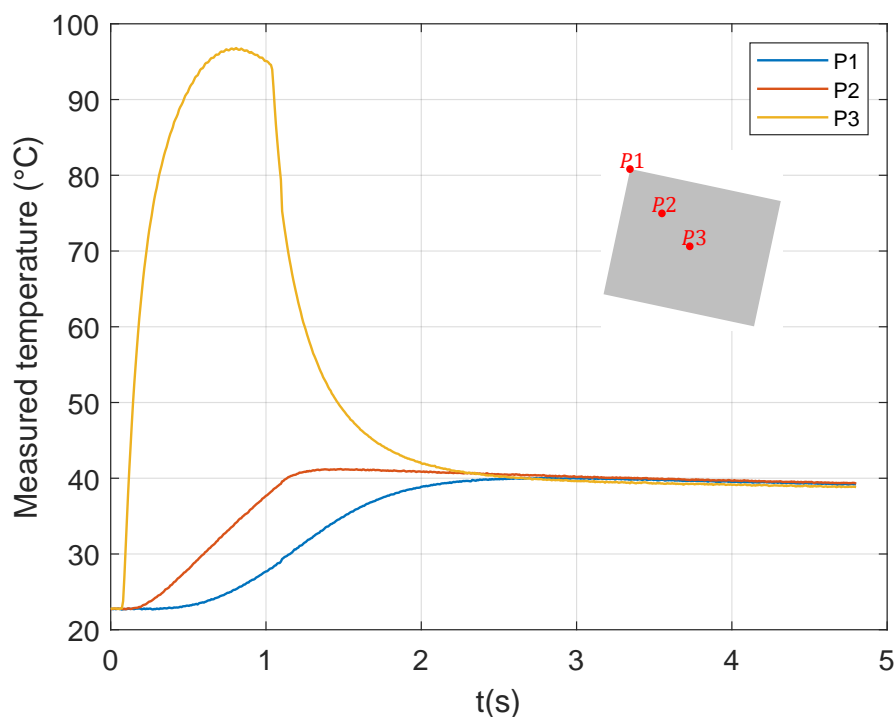


Figure 4 : Evolution des températures mesurées en trois positions surfaciques de la plaque : au centre (P3), à une position intermédiaire (P2) et au coin (P1)

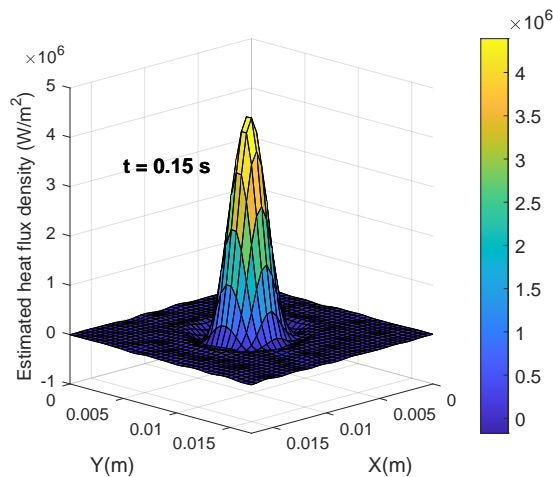


Figure 5 : Distribution spatiale estimée de la densité de flux de chaleur à  $t = 0, 15$  s

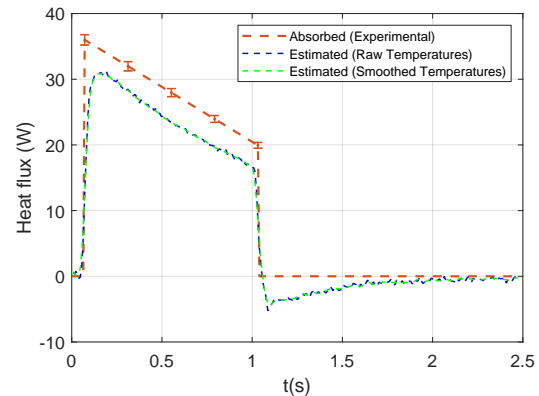


Figure 6 : Evolution temporelle du flux de chaleur total estimé et appliqué, avec des erreurs de  $\pm 2, 2$  % dues à l'incertitude sur l'absorptivité

## 4. Conclusion

L'estimation d'une densité flux de chaleur 3D  $q(x,y,t)$  de forme gaussienne avec une résolution spatiale de 0,45 mm, a été réalisée à partir de mesures thermographiques en appliquant la méthode SFSM. Les tests numériques montrent que pour une estimation précise d'un flux de chaleur présentant des transitions abruptes, un maillage d'estimation fin avec régularisation spatiale est nécessaire. Ils révèlent également que, le choix du nombre de pas de temps futurs doit permettre d'atténuer les perturbations dues au bruit de mesure, tout en minimisant le biais sur l'estimation qui en résulte. Dans le cas présenté de la plaque de fer, en raison de la vitesse de diffusion du flux de chaleur, le pas de temps futur sert principalement à réduire l'effet du bruit expérimental. Lors de l'application de la méthodologie à la pâte à crêpe, le pas de temps futur permettra également de compenser la faible diffusivité du matériau. La validation expérimentale confirme l'efficacité de la méthodologie d'estimation et souligne l'importance de prêter attention à la précision des mesures, à leur traitement, ainsi qu'à l'exactitude du modèle direct utilisé, notamment concernant l'épaisseur du matériau.

## Références

- [1] K. Woodbury, H. Najafi, F. de Monte, and J. Beck. *Inverse Heat Conduction : Ill-Posed Problems*. 2023.
- [2] Forooza Samadi, Keith Woodbury, and Farshad Kowsary. Optimal combinations of Tikhonov regularization orders for IHCPs. *International Journal of Thermal Sciences*, 2021.
- [3] R. F. Brito, S. R. Carvalho, and S. M. M. Lima E Silva. Experimental investigation of thermal aspects in a cutting tool using comsol and inverse problem. *Applied Thermal Engineering*, 2015.
- [4] Hae-Ji Kim, Nam-Kyung Kim, and Jae-Seob Kwak. Heat flux distribution model by sequential algorithm of inverse heat transfer for determining workpiece temperature in creep feed grinding. *International Journal of Machine Tools and Manufacture*, 2006.
- [5] A. M. Osman, K. J. Dowding, and J. V. Beck. Numerical Solution of the General Two-Dimensional Inverse Heat Conduction Problem (IHCP). *Journal of Heat Transfer*, 1997.

- [6] Haihui Zhang, Jiawei Zou, and Pengcheng Xiao. Sequential Regularization Method for the Identification of Mold Heat Flux during Continuous Casting Using Inverse Problem Solutions Techniques. *Metals*, 2023.
- [7] Ping Xiong, Zhifang Qiu, Qi Lu, Tao Lu, Jian Deng, Yu Liu, and Yong Zhang. Simultaneous estimation of fluid temperature and convective heat transfer coefficient by sequential function specification method. *Progress in Nuclear Energy*, 2021.
- [8] Guangjun Wang, Lihui Zhang, Xudong Wang, and Bruce L. Tai. An inverse method to reconstruct the heat flux produced by bone grinding tools. *International Journal of Thermal Sciences*, 2016.
- [9] D. G. Cuadrado, A. Marconnet, and G. Paniagua. Non-linear Non-Iterative transient inverse conjugate heat transfer method applied to microelectronics. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2020.
- [10] David Nortershauser and Pierre Millan. Estimation of moving heat sources with a three-dimensional unsteady inverse method. *Aerospace Science and Technology*, 2001.