

# Design de l'isolation des parois pour améliorer l'efficacité énergétique

## Insulation domain design regarding wall energy efficiency

William DUMONTAUD<sup>1\*</sup>, Julien BERGER<sup>1</sup>, Benjamin KADOCH<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement (LaSIE), UMR 7356 CNRS, La Rochelle Université, CNRS

Pôle Sciences et Technologie - 17000 La Rochelle

<sup>2</sup> Aix-Marseille Université, CNRS, Laboratoire IUSTI

Technopôle de Château-Gombert - 13013 Marseille

\* william.dumontaud@univ-lr.fr

**Résumé** - Ce travail propose une méthode innovante pour améliorer la performance énergétique des parois multicouches de bâtiments afin de minimiser leur consommation énergétique. Le problème direct repose sur la résolution d'une équation de transfert de chaleur 2D en régime transitoire, en utilisant le schéma de différences finies de DUFORT-FRANKEL. Les conditions aux limites incluent des échanges convectifs à l'intérieur, un couplage convection-rayonnement solaire à l'extérieur avec des coefficients variant dans le temps et l'espace. L'interface entre deux matériaux est modélisée par une fonction paramétrique permettant de décrire la distribution des propriétés thermiques. Une étude paramétrique explore la variation de la fonction objectif de design énergétique en fonction des paramètres de l'interface, identifiant ainsi des solutions intéressantes. Le cas de Chambéry est étudiée et les résultats montrent l'intérêt de cette approche.

**Abstract** - This work proposes a new numerical model to study innovative wall designs to reduce energy consumption. The model solves a 2D transient heat transfer equation using the finite difference scheme DUFORT-FRANKEL. After analysing the accuracy of the model, a parametric study was carried out to explore the variation of the objective energy design function regarding the interface parameters. A case study of the city of Chambéry demonstrates the value of this approach.

### Nomenclature

$T$	température [K]	$q_{\infty}^L$	flux solaire incident [ $\text{W.m}^{-2}$ ]
$t$	temps [s]	$h$	coefficient convectif [ $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ]
$x$	coordonnée spatiale horizontale [m]	$c$	capacité calorifique [ $\text{J.m}^{-3}.\text{K}^{-1}$ ]
$y$	coordonnée spatiale verticale [m]	<i>Symboles grecs</i>	
$H$	hauteur de la façade [m]	$\gamma$	fonction d'interface [-]
$L$	largeur de la façade [m]	$\lambda$	conductivité thermique [ $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ]

## 1. Introduction

L'efficacité énergétique des bâtiments est un défi majeur dans le contexte actuel de changement climatique et de transition écologique. L'enveloppe des bâtiments joue un rôle crucial dans la régulation thermique, et une conception optimisée peut contribuer à la réduction significative de la consommation énergétique. C'est pourquoi une modélisation précise des flux thermiques à travers l'enveloppe doit être réalisée. Néanmoins, malgré des décennies de développement de logiciels de simulation thermique, les modèles traditionnels supposent souvent que les murs des bâtiments sont constitués de couches planes modélisées suivant une dimension et soumis à

des conditions extérieures uniformes en espace. Une telle simplification néglige la répartition hétérogène des flux incidents sur l'enveloppe, et notamment radiatifs [1]. Pour répondre à ce défi, de nouveaux modèles numériques sont nécessaires [2, 3] afin de pouvoir traiter des parois aux conceptions plus avancées. Cet article présente ainsi un modèle numérique de différences finies résolvant un problème de diffusion thermique bidimensionnel en régime transitoire avec dépendance spatio-temporelle des conditions limites. Le modèle est adapté à une paroi bi-couches présentant une interface entre les matériaux constitutifs non plane.

## 2. Description du modèle

### 2.1. Problème physique

Le domaine physique, étudié dans un espace de coordonnées  $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega_x$ , représente une paroi en deux dimensions de hauteur  $H$  [m] et de largeur  $L$  [m], délimité par les frontières  $\Gamma = \bigcup_{j=1}^4 \Gamma_j$ . Comme exposé dans la Figure 1,  $\Omega_x$  est constitué de deux sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  présentant chacun des propriétés thermiques distinctes et séparés par une interface  $\Gamma_i$  définie de la même façon que dans [3] :

$$\Gamma_i(\mathbf{p}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid x = \gamma(\mathbf{p}, y), y \in [0, H], \mathbf{p} \in \Omega_p\} \quad (1)$$

avec  $\gamma(\mathbf{p}, y)$  une fonction régie par  $N_p$  paramètres :  $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{N_p}) \in \Omega_p$ . On notera que

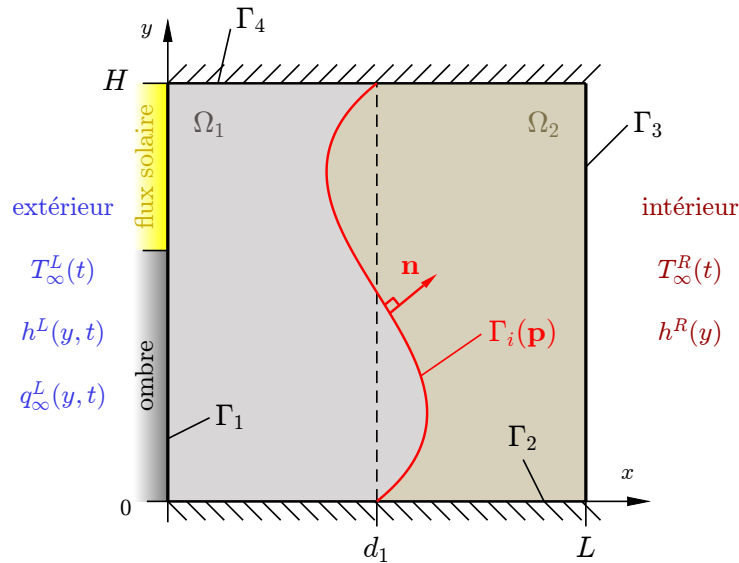


Figure 1 : Illustration du problème physique.

dans le cas où  $\gamma(\mathbf{p}, y) = 0 \forall y$ , alors l'interface est plane et on retrouve une paroi bi-couche classique. Les transferts thermiques dans chaque sous-domaine du mur sont supposés suivre l'équation de diffusion thermique en régime transitoire :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda(\mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial y} \right) = c(\mathbf{x}) \frac{\partial T}{\partial t}, \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_x \quad (2)$$

avec  $\lambda$  [W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>] la conductivité thermique et  $c$  [J.m<sup>-3</sup>.K<sup>-1</sup>] la capacité calorifique volumique. Ces propriétés sont assumées constantes dans chacun des sous-domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ . De ce fait leur définition passe par une fonction d'HEAVISIDE  $\mathcal{H}$  :

$$f(\mathbf{x}) = \mathcal{H}(\phi(\mathbf{p}, \mathbf{x})), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_x, \quad \text{avec} \quad \phi(\mathbf{p}, \mathbf{x}) = x - \gamma(\mathbf{p}, y) \quad (3)$$

ce qui permet d'écrire les propriétés des domaines  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$  :

$$\lambda(\mathbf{x}) = \lambda_1 (1 - f(\mathbf{x})) + \lambda_2 f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{x}} \quad (4a)$$

$$c(\mathbf{x}) = c_1 (1 - f(\mathbf{x})) + c_2 f(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_{\mathbf{x}} \quad (4b)$$

Les conditions aux limites sur les frontières  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$  sont de type ROBIN. Côté extérieur, l'équilibre entre les flux diffusifs, radiatifs et convectifs s'écrit :

$$\lambda(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = h^L(y, t) (T - T_{\infty}^L(t)) + q_{\infty}^L(y, t), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (5)$$

où  $T_{\infty}^L$  est la température d'air extérieur,  $h^L$  [ $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ] le coefficient de convection, et  $q_{\infty}^L$  le flux radiatif incident, tous trois définis en fonction des conditions météorologiques. Le flux incident est calculé à l'aide d'une méthodologie de comptage de pixels [4] qui permet de retranscrire la variation spatiale et temporelle du flux sur la paroi du fait de l'intensité de l'ensoleillement et des phénomènes d'ombrage provoqués par un bâtiment face à  $\Gamma_1$ . Le coefficient de convection dépend quant à lui de la vitesse du vent loin du mur  $v_{\infty}$  [5] et est défini comme dans [2]. Côté intérieur, l'équilibre ne concerne que les flux diffusifs et convectifs :

$$\lambda(\mathbf{x}) \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = -h^R(y) (T - T_{\infty}^R(t)), \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_3 \quad (6)$$

où  $T_{\infty}^R$  [K] est la température d'air intérieur et  $h^R$  [ $\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ] le coefficient de convection définie comme dans [6] et utilisé dans [2].  $T_{\infty}^R$  [K] est régulée pour simuler l'existence d'un système de chauffage et de climatisation de sorte que :

$$T_{\infty}^R(t) = \max \left( T_{\text{set}}^h, \min \left( T_{\text{set}}^e, T_{\text{set}}^h + \frac{T_{\infty}^L(t) - T_{\text{heat}}}{T_{\text{cool}} - T_{\text{heat}}} \cdot (T_{\text{set}}^e - T_{\text{set}}^h) \right) \right) \quad (7)$$

avec  $T_{\text{set}}^h$  [K] et  $T_{\text{set}}^e$  [K] les températures intérieures de consigne en hiver et en été,  $T_{\text{heat}}$  [K] et  $T_{\text{cool}}$  [K] les températures extérieures de déclenchement du chauffage et de la climatisation. Ensuite les conditions limites aux frontières  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_4$  sont assumées comme adiabatiques. Puis, à l'interface  $\Gamma_i$  la continuité du flux conductif et l'égalité des températures sont assurées :

$$\begin{aligned} -[\lambda(\mathbf{x}) \cdot \nabla T]_{\Gamma_i^-} \cdot \mathbf{n} &= -[\lambda(\mathbf{x}) \cdot \nabla T]_{\Gamma_i^+} \cdot (-\mathbf{n}), \\ T_{\Gamma_i^-} &= T_{\Gamma_i^+}, \end{aligned} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma_i \quad (8)$$

Enfin, la condition initiale est fixée comme une rampe de température entre  $T_{\infty}^L$  et  $T_{\infty}^R$  de sorte à respecter les conditions limites.

## 2.2. Méthode numérique

Une discrétisation uniforme en temps et en espace est considérée, avec les pas  $\Delta t$  pour le temps,  $\Delta x$  pour l'espace  $x$  et  $\Delta y$  pour l'espace  $y$ . Les valeurs discrètes de température  $T(\mathbf{x}, t)$  sont écrites sous la forme  $T_{ji}^n := T(x_j, y_i, t^n)$  avec  $i = \{1, \dots, N_y\}$ ,  $j = \{1, \dots, N_x\}$  et  $n = \{1, \dots, N_t\}$ . L'équation 2 discrétisée en utilisant les approximations par différences finies donne ainsi :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Delta x} \left[ \lambda_{j+\frac{1}{2}i} \left( \frac{T_{j+1i}^n - T_{ji}^n}{\Delta x} \right) - \lambda_{j-\frac{1}{2}i} \left( \frac{T_{ji}^n - T_{j-1i}^n}{\Delta x} \right) \right] \\ &+ \frac{1}{\Delta y} \left[ \lambda_{ji+\frac{1}{2}} \left( \frac{T_{ji+1}^n - T_{ji}^n}{\Delta y} \right) - \lambda_{ji-\frac{1}{2}} \left( \frac{T_{ji}^n - T_{ji-1}^n}{\Delta y} \right) \right] = c_{ji} \frac{T_{ji}^{n+1} - T_{ji}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (9)$$

où les conductivités thermiques sont évaluées entre les noeuds du maillage, de sorte que :  $\lambda_{ji+\frac{1}{2}} = 1/2 (\lambda(x_j, y_i) + \lambda(x_j, y_i + \Delta y))$ .

### 2.2.1. Schéma général

Pour l'intégration numérique, le schéma de DUFORT-FRANKEL est utilisé car il permet d'obtenir un modèle inconditionnellement stable tout en conservant une forme explicite, comme détaillé dans [1]. L'application du schéma à l'équation (9) donne après simplification :

$$T_{ji}^{n+1} = \Sigma_{j-\frac{1}{2}i} \cdot T_{j-1i}^n + \Sigma_{j+\frac{1}{2}i} \cdot T_{j+1i}^n + \Sigma_{ji-\frac{1}{2}} \cdot T_{ji-1}^n + \Sigma_{ji+\frac{1}{2}} \cdot T_{ji+1}^n + \Sigma_{ji} \cdot T_{ji}^{n-1} \quad (10)$$

où :

$$\Sigma_{j-\frac{1}{2}i} = \frac{2k_{j-\frac{1}{2}i}}{1+K}, \quad \Sigma_{j+\frac{1}{2}i} = \frac{2k_{j+\frac{1}{2}i}}{1+K}, \quad \Sigma_{ji-\frac{1}{2}} = \frac{2k_{ji-\frac{1}{2}}}{1+K},$$

$$\Sigma_{ji+\frac{1}{2}} = \frac{2k_{ji+\frac{1}{2}}}{1+K} \quad \text{et} \quad \Sigma_{ji} = \frac{1-K}{1+K}$$

et :

$$k_{j-\frac{1}{2}i} = \frac{\Delta t \lambda_{j-\frac{1}{2}i}}{\Delta x^2 c_{ji}}, \quad k_{j+\frac{1}{2}i} = \frac{\Delta t \lambda_{j+\frac{1}{2}i}}{\Delta x^2 c_{ji}}, \quad k_{ji-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t \lambda_{ji-\frac{1}{2}}}{\Delta y^2 c_{ji}},$$

$$k_{ji+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t \lambda_{ji+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2 c_{ji}} \quad \text{et} \quad K = k_{j-\frac{1}{2}i} + k_{j+\frac{1}{2}i} + k_{ji-\frac{1}{2}} + k_{ji+\frac{1}{2}}$$

Concernant les conditions limites, les dérivées spatiales sont approximées à l'ordre 2 afin de conserver la précision du schéma [1].

### 2.2.2. Schéma au niveau de l'interface

L'intégration numérique aux nœuds situés à proximité de l'interface  $\Gamma_i$  repose sur la Ghost Fluid Method (GFM), décrite en détail dans [7, 8]. Dans l'approche adoptée, la continuité du flux conductif, définie par l'équation (8), est approximée en considérant que le vecteur normal à l'interface  $\mathbf{n}$  est aligné avec l'axe du maillage traversé à savoir  $x$  ou  $y$ . Cette méthode simplifie les calculs numériques en restreignant l'évaluation de la continuité du flux aux directions alignées avec les axes du maillage.

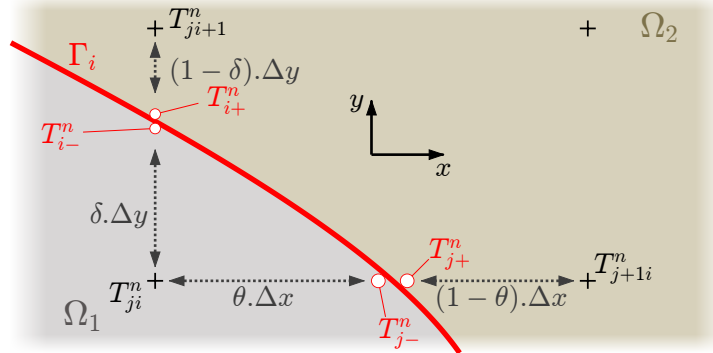


Figure 2 : Illustration de la GFM simplifiée.

Afin d'illustrer la modification de l'équation (9) à l'interface entre les deux matériaux, le cas illustré dans la Figure 2, où  $\Gamma_i$  passe entre les nœuds  $\{j, i\} - \{j+1, i\}$  et  $\{j, i\} - \{j, i+1\}$ , est considéré. Tout d'abord, les conditions à l'interface de l'équation (8), sont approximées suivant  $x$  et  $y$  et font intervenir les nœuds fantôme  $T_{j-}^n$  et  $T_{j+}^n$  (en  $x$ ), et  $T_{i-}^n$  et  $T_{i+}^n$  (en  $y$ ).

$$\lambda_2 \cdot \frac{T_{j+1i}^n - T_{j+}^n}{(1-\theta) \cdot \Delta x} - \lambda_1 \cdot \frac{T_{j-}^n - T_{ji}^n}{\theta \Delta x} = 0, \quad \text{et} \quad T_{j+}^n - T_{j-}^n = 0 \quad \text{avec} \quad \theta = \frac{|\phi_{ji}^x|}{|\phi_{ji}^x| + |\phi_{j+1i}^x|} \quad (11a)$$

$$\lambda_2 \cdot \frac{T_{ji+1}^n - T_{i+}^n}{(1-\delta) \Delta y} - \lambda_1 \cdot \frac{T_{i-}^n - T_{ji}^n}{\delta \Delta y} = 0, \quad \text{et} \quad T_{i+}^n - T_{i-}^n = 0 \quad \text{avec} \quad \delta = \frac{|\phi_{ji}^y|}{|\phi_{ji}^y| + |\phi_{ji+1}^y|} \quad (11b)$$

où :  $\phi_{ji}^x = x_j - \gamma(\mathbf{p}, y_i)$  et  $\phi_{ji}^y = y_i - \gamma^{-1}(\mathbf{p}, x_j)$  représentent les distances à l'interface. Ensuite, au noeud  $\{j, i\}$  l'équation discrétisée (9) est modifiée en utilisant les noeuds fantômes  $T_{i\pm}^n$  et  $T_{j\pm}^n$  :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta x} \left[ \lambda_{j+\frac{1}{2}i} \left( \frac{T_{j-}^n - T_{ji}^n}{\theta \Delta x} \right) - \lambda_{j-\frac{1}{2}i} \left( \frac{T_{ji}^n - T_{j-1i}^n}{\Delta x} \right) \right] \\ & + \frac{1}{\Delta y} \left[ \lambda_{ji+\frac{1}{2}} \left( \frac{T_{i-}^n - T_{ji}^n}{\delta \Delta y} \right) - \lambda_{ji-\frac{1}{2}} \left( \frac{T_{ji}^n - T_{ji-1}^n}{\Delta y} \right) \right] = c_{ji} \frac{T_{ji}^{n+1} - T_{ji}^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (12)$$

Au final, après isolement des termes fantômes  $T_{j-}^n$  et  $T_{i-}^n$  dans les équations (11a) et (11b) et injection dans l'équation (12), il vient la même forme explicite que l'équation (10) où les termes suivant sont modifiés :

$$k_{j+\frac{1}{2}i} = \frac{\Delta t \lambda_{j+\frac{1}{2}i}}{\Delta x^2 c_{ji}} \cdot \frac{\hat{\lambda}_x}{\lambda_1} \quad \text{et} \quad k_{ji+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t \lambda_{ji+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2 c_{ji}} \cdot \frac{\hat{\lambda}_y}{\lambda_2}$$

avec :

$$\hat{\lambda}_x = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 \theta + \lambda_1 (1 - \theta)} \quad \text{et} \quad \hat{\lambda}_y = \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 \delta + \lambda_1 (1 - \delta)}$$

### 3. Cas d'étude

#### 3.1. Description

Le cas d'étude concerne un mur, présentant une hauteur  $H = 3$  m, une largeur  $L = 0.4$  m et une interface suivant un polynôme de troisième ordre comme dans [3] et définie par :

$$\gamma(\mathbf{p}, y) = d_1 + p_0 \frac{y}{H} \left( \frac{y}{H} - p_1 \right) \left( \frac{y}{H} - 1 \right) \quad (13)$$

avec  $d_1 = 0.2$  m,  $p_0$  et  $p_1$ , les paramètres d'interface. Le domaine  $\Omega_1$  est composé de béton ( $\lambda_1 = 2$  W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>,  $c_1 = 1900$  kJ.m<sup>-3</sup>.K<sup>-1</sup>), et  $\Omega_2$  de laine de verre ( $\lambda_2 = 0.04$  W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>,  $c_2 = 22.5$  kJ.m<sup>-3</sup>.K<sup>-1</sup>). L'absorptivité de la surface extérieure  $\Gamma_1$  est fixée à 0.5. La paroi est située en zone urbaine avec un bâtiment de 3 m de hauteur situé à 5 m devant la façade extérieure. Les conditions extérieures donnant les valeurs de  $T_\infty^L$ ,  $q_\infty^L$ ,  $h^L$  sont celles de la ville de Chambéry (climat standard réglementaire) et construites comme détaillé plus haut. La température intérieure est régulée grâce aux valeurs :  $T_{\text{set}}^h = 19$  °C,  $T_{\text{set}}^e = 24$  °C,  $T_{\text{heat}} = 17$  °C et  $T_{\text{cool}} = 27$  °C.

#### 3.2. Vérification du modèle

Tout d'abord, le modèle est vérifiée à l'aide du code aux éléments finis de la Partial Differential Equation Toolbox de Matlab, en considérant les paramètres d'interface  $p_0 = 1$ ,  $p_1 = 0.5$ . Les écarts étudiés sont ceux présentés dans [9] où le champ de référence est d'abord calculé sur une grille raffinée adaptée à la méthode des éléments finis, puis est interpolé de manière linéaire sur la grille de calcul du modèle :  $\varepsilon_2(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \langle (T^{\text{ref}}(\mathbf{x}, t^n) - T(\mathbf{x}, t^n))^2 \rangle_t$ , et  $\varepsilon_\infty(\mathbf{x}, t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega_x} (\varepsilon_2(\mathbf{x}, t))$  avec  $\langle \cdot \rangle_t$  la moyenne temporelle.

La Figure 3a illustre la distribution de l'écart  $\varepsilon_2$  au sein de la paroi. On observe que l'écart reste globalement localisé au niveau de l'interface malgré l'approximation formulée dans l'équation (11). Cependant, un écart plus prononcée apparaît aux intersections entre l'interface et les frontières. Cette observation pourrait être due soit à l'interpolation de la solution de référence sur la grille du modèle, soit au modèle lui-même. Par ailleurs, la Figure 3b présente l'évolution de l'écart  $\varepsilon_\infty$  en fonction du pas de temps  $\Delta t$ . Les résultats montrent d'une part que le modèle

génère une écart proportionnelle à  $\Delta t^2$ , et d'autre part qu'il reste stable pour des pas de temps très importants. Ceci met en évidence que l'intégration de l'interface permet de conserver les propriétés théoriques du schéma, à savoir la précision et l'inconditionnelle stabilité, validant la bonne performance globale du modèle.

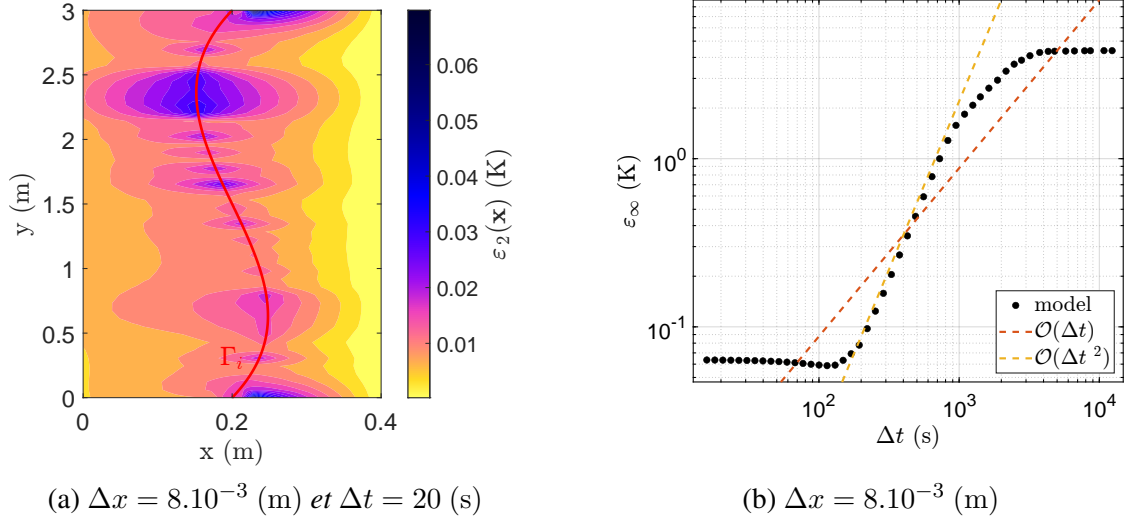


Figure 3 : Illustration de la répartition de l'écart  $\varepsilon_2$  (a) et Influence du pas de temps  $\Delta t$  sur l'écart  $\varepsilon_\infty$  (b).

### 3.3. Démarche d'optimisation

L'objectif est d'améliorer l'efficacité énergétique de la paroi en trouvant une forme d'interface  $\Gamma_i$  minimisant la fonctionnelle bi-objectif  $J$  [–]. Pour ce faire, une étude paramétrique sur les paramètres  $\mathbf{p} = (p_0, p_1)$  de cette fonction est réalisée. Le domaine formé est ensuite échantillonné en  $N = 686$  couples  $(p_0, p_1)$  afin de trouver des couples optimisés  $\mathbf{p}_s = \min_{\mathbf{p} \in \Omega_p} J$ .

$$J = \omega \cdot \frac{E}{E^0} + (1 - \omega) \cdot \frac{V_i}{V_i^0} \quad (14)$$

Cette fonctionnelle est composée d'un terme énergétique et d'un terme volumique pondérés par le coefficient  $\omega$  fixé à 0.5. Elle vise à privilégier les conceptions qui minimisent l'énergie traversant le mur tout en tenant compte du volume d'isolation. Le terme  $E$  représente l'énergie traversant l'interface pendant la période de simulation  $\Omega_t = [0, t_f]$  et un mur présentant un volume d'isolant  $V_i$ . De manière analogue,  $E^0$  et  $V_i^0$  sont les termes du cas de référence, correspondant à une construction standard où l'interface entre les deux matériaux est plane ( $\gamma = 0$ ). L' nergie  $E$  s'exprime suivant l'équation (15) où l'évaluation du flux conductif à l'interface  $q^i$  suit l'approximation détaillée dans l'équation (11).

$$E = \int_{\Omega_t} q^i(t) d\Omega_t \quad \text{avec} \quad q^i(t) = \int_{\Gamma_i} -\lambda(\mathbf{x}) \cdot \nabla T(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{n} d\Gamma_i \quad (15)$$

Enfin, cette démarche d'optimisation suit certaines contraintes. Prem irement, le volume de la couche d'isolant  $V_i$  ne doit pas dépasser celle du cas de référence  $V_i^0$ . Deuxièmement, l'interface doit rester contenue dans le mur, autrement dit, l'interface ne peut intercepter les frontières  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_3$ . Ces contraintes peuvent se résumer à :

$$\int_{\Gamma_i} = \gamma(\mathbf{p}, y) d\Gamma \quad \text{et} \quad \Delta\varepsilon \leq \gamma(\mathbf{p}, y) \leq L + \Delta\varepsilon \quad (\Delta\varepsilon : \text{tolérance spatiale}) \quad (16)$$

### 3.4. Résultats

La procédure d'optimisation décrite est appliquée pour chaque mois de l'année ce qui permet d'obtenir des cartographies de la fonctionnelle  $J$  tel que présenté dans la Figure 4a, et les interfaces optimisées mensuelles présentées dans la Figure 4b. Le Tableau 1 donne les paramètres  $p$  associés et les gains sur la fonctionnelle.

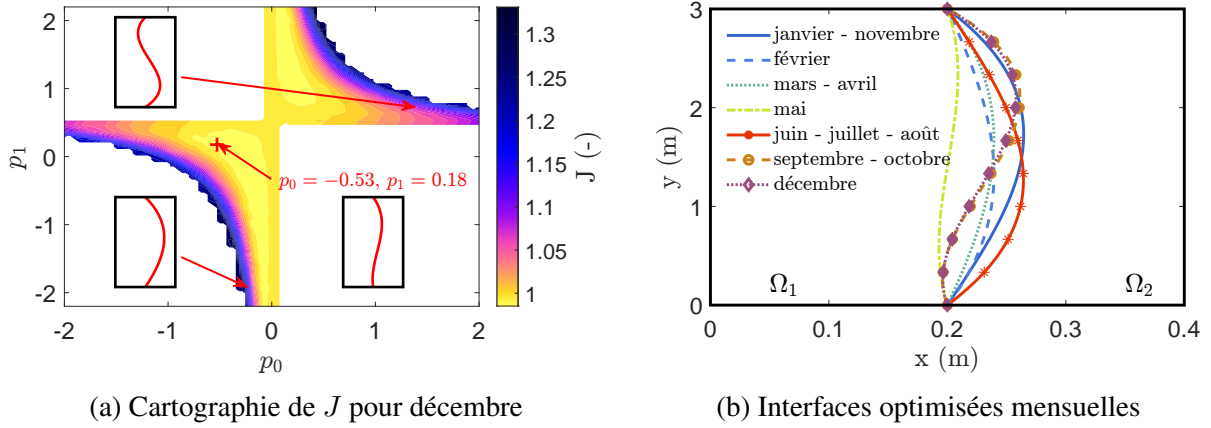


Figure 4 : Illustrations des interfaces optimisées.

Tout d'abord, il est constaté que certaines interfaces optimisées sont communes à plusieurs mois, généralement regroupées en fonction des saisons. Les analyses mettent en évidence que, durant les mois froids (octobre à janvier), l'interface optimale présente une concavité marquée au niveau de la partie supérieure du mur, tandis que pendant les mois chauds (juin à août), cette concavité se localise principalement dans la partie inférieure du mur. Ces observations suggèrent qu'une réduction de l'épaisseur de l'isolant dans la partie supérieure du mur pourrait limiter les déperditions thermiques de la paroi en hiver, tout en maximisant les apports solaires, qui sont concentrés majoritairement sur la partie supérieure de la face extérieure au cours de cette période. À l'inverse, une épaisseur d'isolant réduite dans la partie inférieure du mur engendrerait une diminution des apports thermiques, un effet qui pourrait être bénéfique en période estivale. Enfin, les mois tempérés (février à mai) se caractérisent par des interfaces présentant des formes moins marquées, tendant davantage vers une configuration plane. Toutefois, il convient de noter que le gain obtenu est relativement faible ( $\approx 1.5\%$ ) pendant une grande partie de l'année, à l'exception des périodes allant de juin à août (8.47%) et de septembre à octobre (6.84%), qui correspondent respectivement à la saison estivale et à une période de froid modéré.

Tableau 1 : Valeurs des paramètres  $p$  et du gain  $\Delta J$  pour les interfaces optimisées mensuelles.

	janv. - nov.	févr.	mars - avr.	mai	juin - juill. - août	sept. - oct.	déc.
$p_0$	-0.17	0.08	-0.08	-0.17	0.17	-0.56	-0.53
$p_1$	-1.01	2.56	-1.56	0.47	2.01	0.18	0.18
$\Delta J$ [%]	1.50	1.54	1.20	0.42	8.47	6.84	1.48

Enfin, l'analyse est complétée par une étude des phénomènes physiques exposées sur la Figure 5. Le graphique (Figure 5 (haut)) expose les conditions extérieures et le second (Figure 5 (bas)) l'évolution du flux à l'interface  $q^i$  [W]. Au cours de cette période, la différence de température entre l'intérieur et l'extérieur génère exclusivement des déperditions thermiques, tandis que l'ensoleillement, bien que faible, reste spatialement hétérogène sur la face extérieure. Il est ainsi observé que, dans ces conditions, le flux thermique à l'interface, qui représente un flux déperditif, est réduit de 15 à 20% grâce à la forme optimisée, ce qui témoigne de l'efficacité de la nouvelle interface.



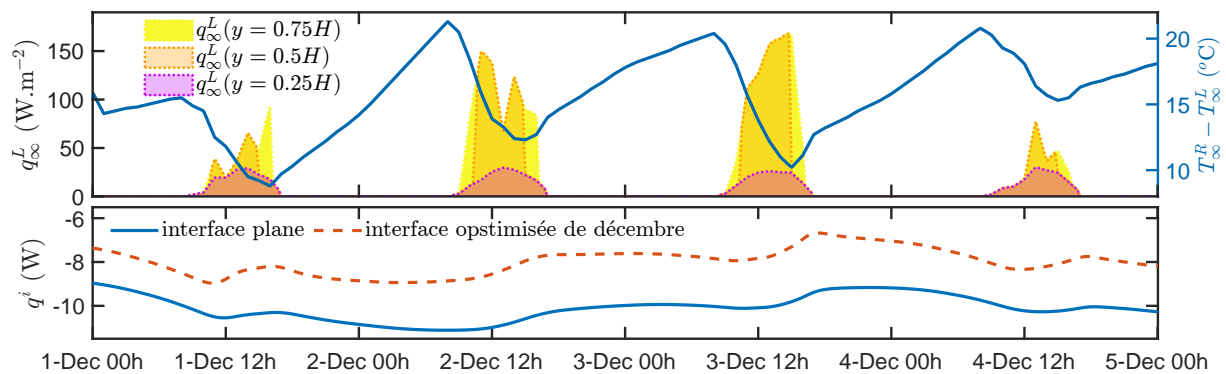


Figure 5 : Illustration du gain instantané apporté par la paroi optimisée comparée à celle plane.

## 4. Conclusion

Cet article propose un modèle numérique innovant dédié à l'amélioration des performances énergétique des parois multicouches des bâtiments. Dans un premier temps, le modèle est validé à l'aide d'un code aux éléments finis, démontrant un écart maîtrisé malgré l'introduction d'une interface complexe. Ensuite, l'étude de cas menée pour la ville de Chambéry met en évidence des perspectives encourageantes : bien que les gains énergétiques soient modérés sur une grande partie de l'année, des améliorations notables sont réalisables durant les périodes estivales et automnales, témoignant d'un véritable potentiel. Par ailleurs, ces résultats spécifiques au cas étudié suggèrent que d'autres applications pourraient conduire à des améliorations plus significatives. Les travaux futurs ambitionnent ainsi d'étendre cette approche à d'autres contextes climatiques et d'explorer de nouvelles méthodes de modélisation de l'interface, élargissant ainsi les possibilités d'innovation.

## Remerciements

Les auteurs remercient l'Agence National de Recherche (ANR) pour le financement du projet TOPS au titre du programme JCJC CE-22 AAPG 2023.

## Références

- [1] J. Berger et al., *An efficient two-dimensional heat transfer model for building envelopes*, Numerical Heat Transfer, Part A : Applications, Vol.79, No.3, 163–194, 2020. [2](#), [4](#)
- [2] Z. Karashbayeva et al., *Optimisation of the insulation domain for heat transfer in building wall*, 11th International conference in inverse problems in engineering : theory and practice (ICIPE 2024), Buzios, Brazil, 2024. [2](#), [3](#)
- [3] S. Alpar et al., *Shape optimization of the energy efficiency of building retrofitted facade*, Solar Energy, Vol.271, 112437, 2024. [2](#), [5](#)
- [4] A.P. de Almeida Rocha et al., *Experimental validation and comparison of direct solar shading calculations within building energy simulation tools : Polygon clipping and pixel counting techniques*, Solar Energy, Vol.158, 462–473, 2017. [3](#)
- [5] W.H. McAdams, *Heat transmission*, Krieger Pub Co, 1985. [3](#)
- [6] G.H. dosSantos et al., *A building corner model for hygrothermal performance and mould growth risk analyses*, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.52, No.21, 4862–4872, 2009. [3](#)
- [7] X.-D. Liu et al., *A Boundary Condition Capturing Method for Poisson's Equation on Irregular Domains*, Journal of Computational Physics, Vol.160, No.1, 151–178, 2000. [4](#)
- [8] C. Li et al., *Alternating direction ghost-fluid methods for solving the heat equation with interfaces*, Computers & Mathematics with Applications, Vol.80, No.5, 714–732, 2020. [4](#)
- [9] S. Gasparin et al., *An innovative method to determine optimum insulation thickness based on non-uniform adaptive moving grid*, Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, Vol.41, No.4, 173, 2019. [5](#)