

Analyse comparative de méthodes de résolution du couplage conduction-rayonnement dans des matériaux hétérogènes semi-transparents

Comparative analysis of numerical methods to addressing conduction-radiation resolution in semi-transparent heterogeneous media

Léa PENAZZI^{1*}, Mohd Afeef BADRI², Stéphane BLANCO³, Cyril CALIOT⁴, Sylvain CHUPIN⁵, Cyril DAOÛT⁵, Jérémi DAUCHET⁶, Simon EIBNER⁷, Mouna EL HAFI^{3,7}, Franck ENGUEHARD⁸, Vincent EYMET⁹, Olivier FARGES¹⁰, Yann FAVENNEC¹¹, Alexandra Adjovi FORTUNAT⁷, Richard FOURNIER³, Dominique JEHL¹², Yann JOBIC¹, Pierre JOLIVET¹³, Fabrice RIGOLLET¹, Denis ROCHAIS⁵, Benoît ROUSSEAU¹¹, Frédéric TOPIN^{1,3}, Jérôme VICENTE¹, Gérard L. VIGNOLES¹⁴

^{1,*}Aix Marseille Université, CNRS, IUSTI UMR 7343, 13453, Marseille, France

²SGLS, CEA, Université Paris-Saclay, Gif-sur-Yvette, France

³LaPlaCE, CNRS, Université Paul Sabatier, Toulouse, France

⁴LMAP, CNRS, Université de Pau et des Pays de l'Adour, Anglet, France

⁵CEA, DAM, Le Ripault, Monts, France

⁶Institut Pascal, CNRS, Université Clermont Auvergne, Clermont-Ferrand, France

⁷RAPSODEE, CNRS, IMT Mines Albi, Albi, France

⁸Institut Pprime, CNRS, Université de Poitiers, Poitiers, France

⁹Méso-Star, Toulouse, France

¹⁰LEMTA, CNRS, Université de Lorraine, Vandoeuvre-lès-Nancy, France

¹¹LTeN, CNRS, Nantes Université, Nantes, France

¹²ArianeGroup, Saint-Médard-en-Jalles, France

¹³LIP6, CNRS, Sorbonne Université, Paris, France

¹⁴LCTS, CNRS, Université de Bordeaux, Pessac, France

*(auteur correspondant : lea.penazzi@univ-amu.fr)

Résumé - Cet article compare les méthodes numériques de simulation développées par sept équipes de recherche françaises rattachées au GDR CNRS 2047 TAMARYS collaborant pour la résolution d'un problème couplé conduction-rayonnement dans un milieu hétérogène semi-transparent. Les équipes ont travaillé sur une configuration commune, analysant les profils de températures et de flux nets (totaux, conductifs et radiatifs). Cette étude met en évidence les points forts et limites de chaque méthode au regard de la configuration choisie, chacune offrant une perspective distincte et complémentaire aux autres.

Abstract - This article compares numerical methods developed by seven french research teams attached to the GDR CNRS 2047 TAMARYS for coupled conduction-radiation for coupled conduction-radiation heat transfer resolution in heterogeneous semi-transparent media. The teams work on a common configuration, analyzing net heat flux (total, conductive, radiative) and temperature profiles. The study highlights the benefits and limitations of each approach concerning the selected configuration, with each providing a unique perspective that enhances the others.

Nomenclature

L	longueur, m	D	densité de flux radiatif, W/m^2
t	paramètre de forme	Q_z	flux radiatif intégré selon e_z , W/m^2
e_z	vecteur unité perpendiculaire aux semelles	u	angle solide, str
i	numérotation de méthode ($i \in 1, \dots, 7$)	I	luminance, $\text{W}/\text{m}^2/\text{str}$
T	température, K		

1. Introduction

La résolution de l'Equation du Transfert Radiatif (ETR) dans les milieux hétérogènes (morphologies complexes telles que milieux poreux, milieux fibreux, mousses, ...) pose des difficultés notamment lorsque le domaine est trop petit par rapport aux tailles caractéristiques de ses hétérogénéités pour pouvoir être homogénéisé. Le terme intégral rendant compte de la diffusion complexifie grandement la résolution de l'ETR, et impose bien souvent le recours à des méthodes numériques. Depuis les années 50, deux approches très différentes sont envisagées pour traiter le problème : (i) l'école déterministe développe des algorithmes mathématiques et numériques permettant de calculer avec précision le terme de transport et le terme de redistribution directionnelle de l'énergie radiative ; (ii) l'école stochastique met en œuvre les "méthodes Monte Carlo" qui consistent à suivre les trajets d'une multitude de rayonnements au fur et à mesure des événements aléatoires d'interaction qu'ils subissent avec le milieu d'étude.

Sept équipes françaises rattachées au GDR CNRS 2047 TAMARYS et actives dans le domaine de la simulation du transfert thermique au sein de milieux hétérogènes se sont rapprochées pour participer à un exercice d'analyse comparée de leurs méthodologies de traitement de la conduction et du rayonnement. Après un descriptif des différentes stratégies de modélisation mises en œuvre, le cas d'étude imposé aux équipes sera détaillé, puis les résultats obtenus par les différentes équipes seront présentés et analysés.

2. Description des différentes méthodologies mises en œuvre

2.1. Approches déterministes

2.1.1. Maillages volumiques non structurés

La Méthode des Ordonnées Discrètes (MOD) basée sur la discrétisation de la sphère unitaire est utilisée pour semi-discrétiser angulairement l'ETR. L'ensemble d'équations différentielles correspondant est ensuite converti sous forme vectorielle, de sorte que la Méthode des Eléments Finis Vectoriels (MEFV) introduite dans [1] soit utilisée. Dans les situations typiques traitées, des centaines de directions sont nécessaires dans la méthode des ordonnées discrètes et une discrétisation spatiale suffisamment fine est également nécessaire pour assurer que la solution numérique soit suffisamment proche de la solution réelle. Pour faire face à ces difficultés, l'approche de décomposition du domaine est réalisée sur cette équation vectorielle [1], des solveurs efficaces basés sur des méthodes de sous-espaces de Krylov sont utilisés [2], et une approche sans semi-matrices est mise en place sur ces bases [3]. L'équation de la chaleur est également résolue par éléments finis. Cette équation étant non linéaire, elle est linéarisée par la méthode de Newton-Raphson, et une approche du couplage faible est mise en œuvre [4]. Cette méthode, développée au laboratoire LTeN (Nantes), sera référencée par l'acronyme MOD-MEFV.

Le logiciel commercial COMSOL Multiphysics® basé sur la méthode des éléments finis

(MEF) est capable de traiter divers problèmes multiphysiques complexes, dont ceux incluant le rayonnement. Le transfert de chaleur par conduction dans le solide est couplé au rayonnement de surface à surface pour traiter le cas-test couplé conduction-rayonnement par la méthode dite Hemicube [5]. La module de résolution par rayonnement a recours à la méthode "Surface to Surface Radiation" (S2SR). Cette méthode ne donnant pas accès au flux radiatif volumique, ceux-ci sont calculés par une méthode de lancer de rayon.

StarCCM+ [6] est un code commercial volumes et éléments finis (MVF/MEF) polyvalent pour la résolution de problèmes multiphysiques complexes. L'avantage principal de ce logiciel est la facilité d'utilisation du générateur de maillage pour les géométries complexes. Les modèles de conduction et de rayonnement sont utilisés de manière entièrement couplée. Le module de rayonnement surface à surface s'appuie sur la méthode des facteurs de vue (S2SR) [7], en ayant recours à une discréttisation spatiale des surfaces limites en sous-domaines, ce qui permet un compromis entre précision et coût de calcul ; l'hypothèse de corps gris y est également adoptée. Pour cet exercice d'analyse comparée, les températures ainsi que leurs gradients sont extraits dans la phase solide. Les flux radiatifs sont ensuite déduits de ces quantités grâce à la conservation du flux total.

2.1.2. Maillages volumiques structurés

Le code THERMIVOX du CEA, décrit en détail dans [8], est basé sur une discréttisation par volumes finis (MVF) de l'équation de bilan d'énergie couplée à l'ETR. Le matériau hétérogène numérique modélisé est composé de voxels homogènes cubiques. A chaque voxel sont attribuées les propriétés thermophysiques et radiatives du composant qu'il contient, et chaque voxel peut être absorbant (et émettant). L'ETR et l'équation de bilan d'énergie sont résolues dans chaque voxel pour modéliser le transfert couplé de chaleur. Certaines hypothèses restrictives sont faites, en particulier la suivante : sur chaque face de chaque voxel, la luminance est supposée isotrope dans chaque demi-espace. Deux luminances (arrière et avant) sont donc envisagées pour chaque face. Ainsi, il y a treize inconnues dans chaque voxel : la température et douze luminances. Pour chaque voxel, nous résolvons l'ETR entre chaque face et les cinq autres (i.e. six équations), ainsi que l'équation de l'équilibre des flux impliquant les flux conductif et radiatif échangés par le voxel avec ses six voisins (i.e. une équation). Le problème mathématique est clos par six équations d'interfaces – une sur chaque face – exprimant la luminance entrante par la face du voxel comme la somme de la partie réfléchie de la luminance sortante par cette face et de la partie transmise de la luminance sortante par la même face du voxel voisin. De cette façon, la diffusion est gérée aux interfaces entre les voxels à l'intérieur de la structure numérique. Différentes conditions aux limites peuvent être prises en compte : température ou flux imposé, surface avec émission et réflexion diffuse, adiabatique et surface totalement réfléchissante, dissipation de la chaleur par un coefficient convectif-radiatif couplé.

genMat est un logiciel de simulation qui résout simultanément le couplage fort entre conduction et rayonnement dans des milieux hétérogènes en utilisant un maillage structuré en voxels. Ce solveur s'appuie sur la méthodes des volumes finis (MVF) pour résoudre la conduction à l'état stationnaire et sur une méthode zonale modifiée pour résoudre le rayonnement via un calcul des facteurs d'échanges radiatifs par une méthode de Monte Carlo Ray Tracing. Sa particularité réside dans l'approche de décomposition par blocs, où un large volume est subdivisé par de plus petits volumes (blocs) afin d'effectuer la résolution physique à l'échelle de ces blocs. Chaque bloc regroupe plusieurs voxels et est associé à un tenseur de conductivité thermique calculé localement. Les blocs sont reliés par des conductivités thermiques en série [10]. Cette pratique trouve son origine dans la détermination de grandeurs radiatives macroscopiques de

milieux poreux hétérogènes à travers une approche d'homogénéisation en considérant des volumes élémentaires représentatifs (VER) [9]. Elle permet ainsi une résolution efficace et parallélisable, réduisant le temps de calcul pour des échantillons poreux complexes [11]. Le couplage conduction-rayonnement est finalement obtenu en résolvant le divergent des flux conductif et radiatif à l'échelle des blocs.

2.2. Approches stochastiques sans maillage

2.2.1. *Calculs en essaim*

Le solveur SHTRAC développé au laboratoire LCTS (Pessac) simule le transfert de chaleur couplé par rayonnement et conduction au moyen d'un schéma hybride original de marches aléatoires de Monte Carlo dans une représentation 3D d'un milieu poreux dont l'interface vide/solide est discrétisée par une technique de Simplified Marching Cube [12]. Chaque marcheur est supposé ici représenter un quantum d'excès d'enthalpie par rapport à la référence prise à la température la plus basse. Les marcheurs obéissent à un mouvement Brownien (schéma d'Ito-Taylor) avec des paramètres représentatifs de la conduction thermique (diffusion) à l'intérieur du solide tandis qu'ils se déplacent quasi-instantanément en ligne droite dans le vide. Le rapport entre le rayonnement et la conduction est lié à la probabilité, lorsqu'un marcheur "conducteur" frappe la surface solide, d'être "émis" en tant que rayon dans le vide, cette probabilité étant reliée à l'inverse du nombre de Stark. Ici, tous les marcheurs atteignant le côté froid sont instantanément transférés au côté chaud, ce qui permet un calcul facile du flux total. Le profil de température est dérivé du profil de concentration des marcheurs. La simulation est initialisée avec un profil de température (i.e. de concentration) linéaire et est suivie dans le temps jusqu'à la stabilité du flux et du profil de température.

2.2.2. *Calculs sondes*

Les calculs présentés sont issus d'un modèle conducto-radiatif, reformulé en espace de chemins et probabilisé dans l'esprit des travaux de Feynman-Kac. La méthode de Monte Carlo utilisée pour la résolution numérique consiste alors à échantillonner la variable aléatoire représentant les chemins thermiques, en s'appuyant sur les travaux de réécriture des propagateurs en fonctions de Green de premier passage [13]. Dans le logiciel Stardis [14], l'ensemble de cette chaîne conduit notamment à pouvoir stocker les éléments suffisants sur un échantillon de chemin pour produire à coût zéro un modèle très rapide de simulation qui ne dégrade ni la physique initiale ni la complexité géométrique [15]. Compte tenu des écarts de température dans la configuration choisie pour cet article, la non-linéarité des transferts radiatifs entre surfaces de solides opaques est prise en compte par le logiciel Stardis d'après une méthode proposée dans la thèse de J.-M. Tregan [16]. Elle consiste à reformuler la probabilisation de la condition de Robin en incluant la non-linéarité dans l'expression des probabilités. Cette reformulation est rendue possible par l'utilisation de la technique des collisions nulles ainsi qu'une méthode de Picard modifiée.

3. Description du problème physique étudié

La géométrie du cas-test conduction-rayonnement proposé se base sur une surface TPMS (Triply Periodic Minimal Surface) de type gyroïde, décrite par l'équation suivante :

$$f(x, y, z) = \sin(2\pi x/L) \cos(2\pi y/L) + \sin(2\pi y/L) \cos(2\pi z/L) + \sin(2\pi z/L) \cos(2\pi x/L) - t$$

La surface $f(x, y, z) = 0$ constitue la frontière 2D séparant 2 domaines 3D : l'un opaque et conducteur (occupant 9.75%v du volume) et l'autre transparent et non conducteur (90.25%v). Le domaine opaque est décrit par $f(x, y, z) \geq 0$ avec $0 \leq x, y, z \leq 2L$, qui correspond à $2 \times 2 \times 2$ périodes de gyroïde ; le domaine transparent est le complémentaire ($f(x, y, z) < 0$). Les paramètres t and L sont respectivement fixés à 1.2 et 1 cm. Le domaine opaque-transparent obtenu est ensuite encapsulé entre 2 semelles 3D opaques constituées du même matériau que la gyroïde et dont l'épaisseur est de 2 mm (Figure 1 a)). La conductivité thermique du domaine opaque est fixée à 13 W/m/K, correspondant au SiC à 1500 K. L'émissivité des surfaces opaques est imposée à 0.85 (valeur indépendante de la longueur d'onde et de la direction).

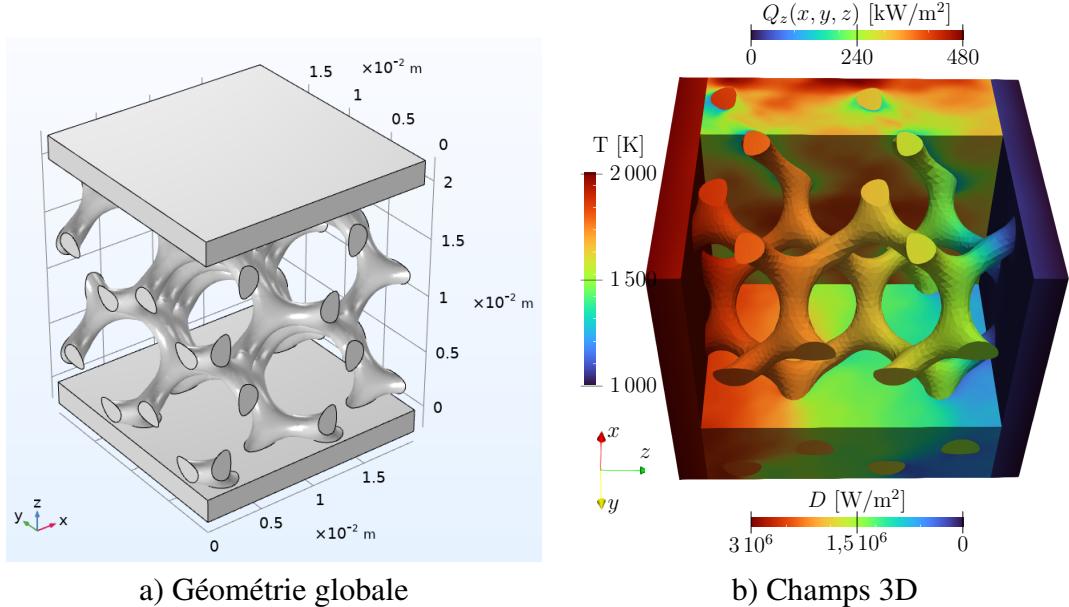


Figure 1 : Configuration géométrique incluant $2 \times 2 \times 2$ périodes de gyroïde ($t = 1.2$) enserrées entre 2 semelles, l'ensemble représentant le domaine opaque. Le fluide environnant (vide) est transparent.

Ensuite, une expérience numérique de type plaque chaude gardée est retenue : des conditions aux limites de Dirichlet sont appliquées sur les surfaces externes de chacune des deux semelles (2000 K et 1000 K) tandis que les 4 faces latérales sont isolées thermiquement pour conserver l'ensemble du flux thermique dans le volume. Physiquement, les quatre faces latérales constitutives du domaine transparent sont parfaitement réflechissantes. Pour comparer les méthodes de résolution, les profils (i) de température moyenne, (ii) de flux conductif, (iii) de flux radiatif et (iv) de flux total sont fournis le long de l'axe z (cet axe étant perpendiculaire aux semelles). Intrinsèquement à la définition de ce problème de conduction-rayonnement, le flux total traversant la structure doit être constant et indépendant de z . Ainsi, dans la zone gyroïde, le flux total (somme des contributions conductive et radiative) doit être égal aux flux conductifs dans les semelles. A partir de la géométrie présentée à la Figure 1 a), un maillage surfacique au format .stl a été créé et partagé aux différents auteurs de l'article. Ce maillage surfacique constitue le point d'entrée de référence pour les sept équipes engagées dans cette intercomparaison.

4. Résultats et discussion

Les profils de température et de flux livrés par les différentes équipes sont représentés à la Figure 2. Les profils tracés correspondent à l'écart relatif entre les températures T_i obtenues après résolution du cas conduction-rayonnement, avec $i \in 1, \dots, 7$ et les températures T_{cond} obtenues

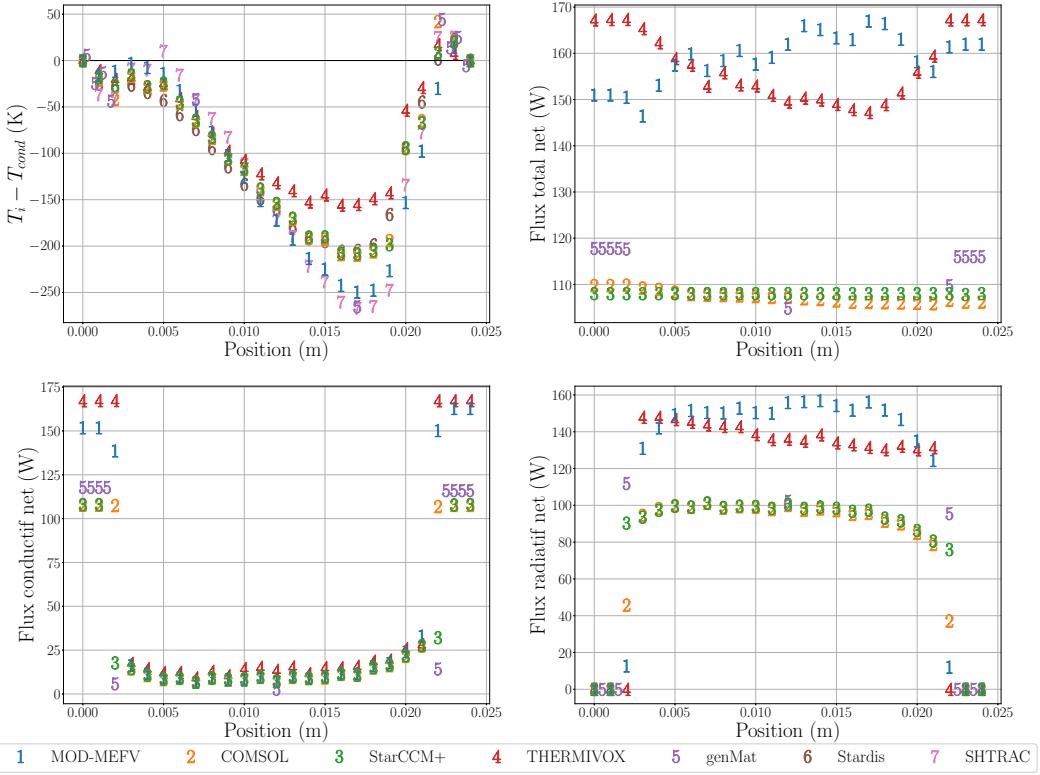


Figure 2 : Profils (haut-gauche) des écarts relatifs entre les températures calculées dans le cas conduction-rayonnement (T_i , $i \in 1, \dots, 7$) et les températures dans un cas conductif pur, (haut-droite) flux totaux nets, (bas-gauche) flux conductifs nets et (bas-droite) flux radiatifs nets pour les sept méthodes numériques. Les résultats donnés en fonction de la position selon l'axe z (Figure 1) sont moyennés sur le plan $x - y$, dans la phase solide pour les températures et le flux conductif, dans le vide pour le flux radiatif.

par résolution d'un cas conductif pur. Les résultats des modèles académiques (MOD-MEFV, THERMIVOX, genMat, Stardis et SHTRAC) sont comparés à ceux issus des outils commerciaux (COMSOL, Star-CCM+). Ces derniers fournissent des résultats de référence grâce à leurs hypothèses et méthodes de résolution bien adaptées à la résolution de ce problème. Si les profils de température se superposent raisonnablement bien, en revanche les profils de flux montrent des différences assez sensibles ; en particulier, les flux totaux varient entre 103 et 167 W selon les équipes. Dans ce qui suit, on liste les possibles faiblesses et pistes d'amélioration des différentes approches.

La méthode MOD-MEFV permet de quantifier le champ de température $T(\cdot)$ dans la phase solide ainsi que les intensités radiatives $I(\cdot)$ dans la phase vide. Comme visible sur la Figure 1 b), la densité de flux radiatif $D(x, y, z) = \int_{4\pi} I(x, y, z, \mathbf{u}) d\mathbf{u}$ ainsi que le flux intégré selon la direction e_z , c'est-à-dire $Q_z(x, y, z) = \int_{4\pi} I(x, y, z, \mathbf{u}) \mathbf{u} \cdot e_z d\mathbf{u}$, peuvent être extraits à l'issue de la résolution. Les solveurs de conduction et de rayonnement ont été minutieusement validés via la méthode des solutions manufaturées (voir par exemple [1]) ; les erreurs associées à ces deux solveurs sont donc assurément très petites. En revanche, le calcul des échanges de

flux aux frontières solide/vide mériterait lui aussi d'être proprement validé et amélioré si besoin.

La méthode S2SR Hemicube (S2SR-H) utilisée dans COMSOL permet de calculer les températures et les flux conductifs, et la méthode S2SR de lancer de rayons (S2SR-R) permet de calculer les flux radiatifs et totaux. Les flux conductifs traversant les 2 semelles sont bien égaux (107.6 W), mais le flux total dans la zone gyroïde décroît légèrement de 110 à 106 W. Le flux total moyen dans cette zone est de 107.4 W, en très bon accord avec les flux conductifs dans les semelles. Finalement, notons que le profil de température issu du calcul S2SR-R (qui n'est pas présenté ici) diffère de seulement 0.28% de celui issu du calcul S2SR-H, avec un écart-type de 0.15%.

La modélisation THERMIVOX impose d'attribuer à chaque voxel les propriétés thermiques et radiatives du constituant qu'il contient, en l'occurrence la conductivité thermique et l'indice optique complexe. La conductivité thermique de la phase fluide a été fixée à 10^{-6} W/m/K afin d'empêcher la conduction dans cette phase. A la différence des autres équipes, la notion d'émissivité est utilisée uniquement au niveau des conditions aux limites du domaine de calcul. En effet, à l'intérieur du domaine, le flux radiatif échangé à l'interface de deux voxels de constituants différents est calculé via les luminances réfléchies et transmises à cette interface, et ce calcul repose sur le contraste d'indices optiques complexes. Dans cet exercice, pour modéliser les échanges radiatifs de surface à surface sans prendre en compte le contraste d'indices entre constituants, (i) la valeur 1 a été donnée à l'indice de réfraction de tous les voxels, (ii) la réflectivité d'un rayonnement incident sur une face depuis la phase fluide a été fixée à 0.15, et (iii) la réflectivité d'un rayonnement incident sur une face depuis la phase solide a été fixée à 0. Comme on peut le voir sur la figure 2 (figure en haut à droite), cette approximation n'assure pas une parfaite conservation du flux total.

L'approche genMat calcule un tenseur de conductivité thermique effective pour chaque bloc, puis suppose que chaque bloc est isotherme. La quantité de grandeurs calculées (températures et flux) dépend de la finesse de la discrétisation spatiale et des dimensions des blocs. Un compromis doit être trouvé concernant la taille des blocs : ils doivent être suffisamment grands pour être homogénéisables vis-à-vis de la conduction, mais pas trop afin que les rayons puissent les traverser et en sortir. Cette approche, tout-à-fait adaptée pour de grands volumes de milieux hétérogènes, l'est a priori moins pour des milieux non homogénéisables tels que celui de cette étude. Néanmoins, les résultats produits par genMat se superposent plutôt bien avec ceux des autres méthodes.

La méthode SHTRAC fait face à une limitation d'ordre théorique, à savoir la lente convergence (en $n^{-1/2}$) des calculs. Le profil de température tracé à la figure 2 (figure en haut à gauche) a cependant été obtenu avec un nombre assez faible de marcheurs ; les auteurs sont confiants sur le fait qu'un traitement plus approfondi du problème fournirait des résultats grandement améliorés.

Enfin, les calculs Monte Carlo exécutés par Stardis reposent sur le deuxième ordre de la méthode de Picard modifiée et permettent de capturer la non linéarité des échanges radiatifs. Les flux conductifs et radiatifs ne sont pas intégrés dans la version actuelle de Stardis et nécessitent des développements théoriques et numériques nouveaux.

5. Synthèse et perspectives

Sept équipes de recherche rattachées au GDR CNRS 2047 TAMARYS se sont associées pour participer à un exercice d'analyse comparée de leurs méthodologies, d'inspirations très

diverses, de résolution du couplage conduction-rayonnement au sein d'un milieu hétérogène non homogénéisable.

Cet exercice est un projet au long cours, et ses premiers résultats ont soulevé de nombreuses questions parmi les contributeurs qui vont continuer d'être examinées afin d'améliorer les différentes techniques de modélisation.

Références

- [1] M. A. Badri, P. Jolivet, B. Rousseau et Y. Favennec, High performance computation of the radiative transfer equation using the finite element method, *Journal of Computational Physics*, 360 :74–92 (2018) DOI :10.1016/j.jcp.2018.01.027
- [2] M. A. Badri, P. Jolivet, B. Rousseau et Y. Favennec, Preconditioned Krylov subspace methods for solving radiative transfer problems with scattering and reflection, *Computer & Mathematics with Applications*, 77(6) :1453–1465 (2019) DOI :10.1016/j.camwa.2018.09.041
- [3] P. Jolivet, M. A. Badri et Y. Favennec, Deterministic radiative transfer equation solver on unstructured tetrahedral meshes : Efficient assembly and preconditioning, *Journal of Computational Physics*, 437 :110313 (2021) DOI :10.1016/j.jcp.2021.110313
- [4] S. Ouchtout, B. Rousseau et Y. Favennec, Finite element framework for modeling conducto-radiative transfers within heterogeneous media at both discrete and continuous scales, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 197 :123274 (2022) DOI :10.1016/j.ijheatmasstransfer.2022.123274
- [5] Theory for Surface-to-Surface Radiation, pp. 258-278, COMSOL Multiphysics® v. 6.2., *Heat Transfer Module User's Guide*, <https://doc.comsol.com/6.2/doc/com.comsol.help.heat/HeatTransferModuleUsersGuide.pdf>
- [6] Siemens Digital Industries Software, Simcenter STAR-CCM+, version 202X.Y, Siemens 202X.
- [7] R. Siegel et J. R. Howell, Thermal Radiation Heat Transfer, Third Edition, Hemisphere Publishing Co, 1992.
- [8] M. Niezgoda, D. Rochais, F. Enguehard, B. Rousseau et P. Echegut, Modeling heat transfer with porous multiconstituent materials, *J. Phys. : Conf. Ser.* 369 :012001 (2012) DOI :10.1088/1742-6596/369/1/012001.
- [9] S. Guévelou, B. Rousseau, G. Domingues, J. Vicente et C. Caliot, Representative elementary volumes required to characterize the normal spectral emittance of silicon carbide foams used as volumetric solar absorbers, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 93 :118–129 (2016) DOI :10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.09.069.
- [10] A. Kumar, J. Vicente, J.-V. Daurelle, Y. Favennec et B. Rousseau, A numerical method based on domain decomposition to solve coupled conduction-radiation physics using parallel computing within large porous media, *J. Phys. : Conf. Ser.* 2116(1) :012057 (2021) DOI :10.1088/1742-6596/2116/1/012057.
- [11] A. Kumar, J. Vicente, J.-V. Daurelle, Y. Favennec et B. Rousseau, A modified zonal method to solve coupled conduction-radiation physics within highly porous large scale digitized cellular porous materials, *Heat and Mass Transfer* (2023) DOI :10.1007/s00231-023-03341-3
- [12] G. L. Vignoles, A hybrid random walk method for the simulation of coupled conduction and linearized radiation transfer at local scale in porous media with opaque solid phases, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 93 :707-719 (2016), DOI :10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.10.056.
- [13] J.-M. Tregan et al., Coupling radiative, conductive and convective heat-transfers in a single Monte Carlo algorithm : A general theoretical framework for linear situations, *PLoS ONE*, 18(4) :e0283681 (2023) DOI :10.1016/j.cpc.2023.108911.
- [14] <https://www.meso-star.com/projects/stardis/stardis.html>
- [15] L. Penazzi, S. Blanco, C. Caliot, C. Coustet, M. El Hafi, R. Fournier, J. Gautrais, A. Golijanek-Jędrzejczyk et M. Sans, Path integrals formulations leading to propagator evaluation for coupled linear physics in large geometric models, *ComPhy Journal*, 294 :108911, DOI :10.1016/j.cpc.2023.108911.
- [16] J.-M. Tregan, Thermique non-linéaire et Monte Carlo. Thèse de Doctorat de l'Université Toulouse 3 Paul Sabatier (2020), <https://hal.science/tel-03266863>.

Remerciements

Léa Penazzi remercie le GDR CNRS 2047 TAMARYS pour le financement des 15 mois de son postdoctorat.