

Identification des paramètres thermo-dépendants pour un isolant thermique par modèle réduit

Jianan Ni*, Frédéric Joly, Yassine Rouizi, Olivier Quéméner

Université d'Evry, Université Paris Saclay, Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry
40 rue du Pelvoux, 91020 Évry-Courcouronnes, France

*jianan.ni@univ-evry.fr

Résumé - Cette étude présente une technique d'identification des paramètres d'un matériau isolant (conductivité thermique thermo-dépendante et capacité supposée constante), par méthode inverse, à partir d'une géométrie tridimensionnelle nécessitant l'utilisation d'un modèle numérique réduit par formulation modale. A partir d'un processus d'optimisation par méthode de région de confiance, on obtient des résultats très satisfaisants en termes de précision et de temps calcul. Cette étude ouvre la voie à la mise en place d'un banc d'essai expérimental.

1. Introduction

Bien qu'en général négligée, la thermo-dépendance des matériaux isolants peut entraîner des modifications des résistances thermiques de l'ordre de plus de 25%. Pour déterminer par mesure cette thermo-dépendance, la solution la plus fréquente reste l'utilisation de la technique de la plaque chaude gardée pour un échantillon de faible épaisseur, et qui permet l'obtention de la conductivité en réalisant plusieurs équilibres thermiques, et en s'appuyant sur une approximation de linéarisation du gradient de température [1]. L'identification en une seule montée en température pour ce type de procédé a été récemment réalisée par [2] via une technique inverse par couplage avec un modèle numérique 1D. Nous proposons ici une étude de faisabilité d'une méthode générale pour la détermination conjointe de la conductivité thermo-dépendante et de la capacité thermique, qui s'appuie sur le processus d'identification à partir de la simulation numérique d'une seule montée en température, sans contrainte particulière de la géométrie. Pour s'affranchir de l'influence des échanges avec l'extérieur par un coefficient d'échange toujours imprécis, ce dernier est également identifié. Enfin, la technique de réduction modale AROMM [3], récemment adaptée au problème de thermo-dépendance [4] est utilisée, afin de pouvoir effectuer cette identification en des temps acceptables, et de s'affranchir de l'utilisation de codes de calcul lourds de type éléments finis dans la boucle d'identification.

2. Position du problème

L'éprouvette que l'on souhaite caractériser se présente sous la forme d'une plaque de dimension 10 cm par 10 cm, et d'épaisseur $e = 3$ cm. En s'appuyant sur les caractéristiques usuelles des isolants thermiques, on peut considérer que d'une part la conductivité thermique varie de façon linéaire avec la température : $\kappa(T) = \kappa_0 + \kappa_1 T$, et que par ailleurs la capacité calorifique est constante (cette dernière varie en général plus faiblement que la conductivité [5]).

Sur la face supérieure Γ_1 (voir Fig. 1), un flux connu φ est imposé. L'ensemble des faces latérales noté Γ_2 est directement au contact de l'environnement à la température T_∞ , via un coefficient d'échange h_∞ . La face inférieure Γ_3 est au contact d'une circulation d'eau, qui impose sa température T_w par un coefficient d'échange h_w important. Compte tenu des symétries, le domaine étudié Ω se réduit à une portion de la géométrie initiale, avec un ensemble de frontières supplémentaires Γ_4 caractérisé par un flux nul. A partir d'une température initiale

égale à $T_\infty = 20^\circ C$, ce problème est défini par les équations (1). L'objectif de cette étude est d'identifier les paramètres thermophysiques κ_0 , κ_1 et c_0 . De plus, compte tenu de l'influence du coefficient d'échange h_∞ qui est très mal connu, ce dernier paramètre sera également recherché.

$$\begin{aligned} \Omega : \quad c_0 \dot{T} &= \nabla \cdot (\kappa(T) \nabla T) \\ \Gamma_1 : \quad \kappa(T) \nabla T \cdot \underline{n} &= \varphi \\ \Gamma_2 : \quad \kappa(T) \nabla T \cdot \underline{n} &= h_\infty (T_\infty - T) \end{aligned} \quad \begin{aligned} \Gamma_3 : \quad \kappa(T) \nabla T \cdot \underline{n} &= h_w (T_w - T) \\ \Gamma_4 : \quad \kappa(T) \nabla T \cdot \underline{n} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

En faisant apparaître explicitement la dépendance affine de la conductivité, la formulation variationnelle faible du problème (1) est alors :

$$\begin{aligned} c_0 \int_{\Omega} \omega \dot{T} &= -\kappa_0 \int_{\Omega} \nabla \omega \cdot \nabla T - \kappa_1 \int_{\Omega} T \nabla \omega \cdot \nabla T - h_\infty \int_{\Gamma_2} \omega T - \int_{\Gamma_3} h_w \omega T \\ &\quad + h_\infty \int_{\Gamma_2} \omega T_\infty + \int_{\Gamma_3} h_w \omega T_w + \int_{\Gamma_1} \omega \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

où ω est une fonction test appartenant au même espace fonctionnel que T , i.e. $\omega, T \in H^1(\Omega)$.

La discréétisation spatiale par des éléments tétraèdres (Fig. 1) conduit à la formulation matricielle Eq. (3) (en respectant l'ordre des termes de l'Eq. (2)).

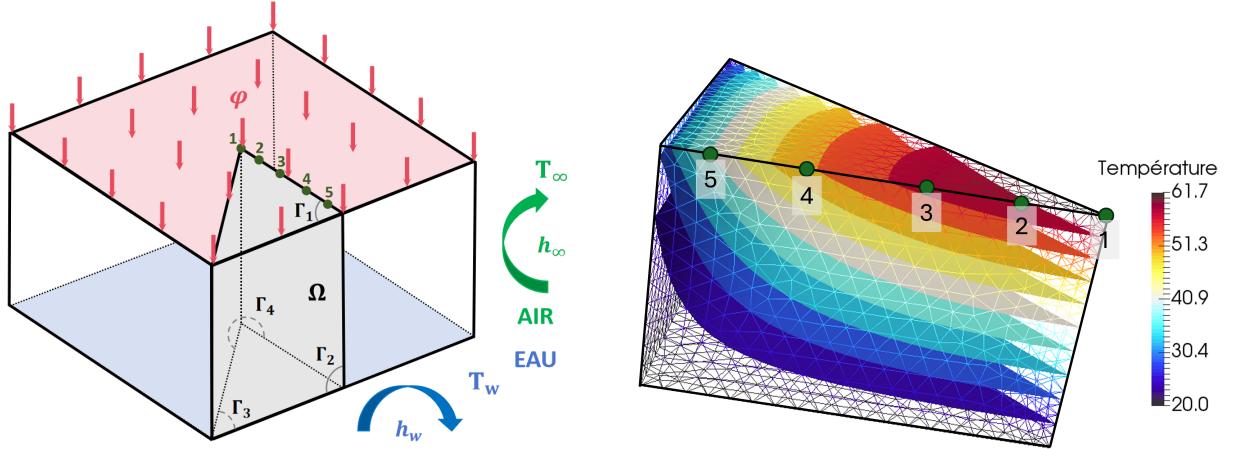


Figure 1 : Problème posé (à gauche) et résultat d'une simulation (à droite). La position des points de mesure est précisée par leur numéro (de 1 à 5).

$$c_0 \mathbf{C} \dot{\mathbf{T}} = -[\kappa_0 \mathbf{K}_0 + \kappa_1 \mathbf{K}_1(T) + h_\infty \mathbf{H}_\infty + \mathbf{H}_w] \mathbf{T} + h_\infty \mathbf{U}_\infty + \mathbf{U}_{w,\varphi} \quad (3)$$

où \mathbf{C} , \mathbf{K}_0 , $\mathbf{K}_1(T)$, \mathbf{H}_w et \mathbf{H}_∞ sont des matrices creuses de dimension $[N \times N]$, et $\mathbf{U}_\infty [N]$ et $\mathbf{U}_{w,\varphi} [N]$ sont les deux vecteurs des sollicitations, où $N = 5\,664$.

Utiliser cette formulation dans un processus itératif d'identification va d'une part prendre un temps de calcul qui peut s'avérer important, et par ailleurs, cela nécessite de faire appel à un programme d'assemblage éléments finis pour reconstruire la matrice $\mathbf{K}_1(T)$ dans la procédure d'identification. Pour toutes ces raisons, on va chercher à remplacer la relation (3) par une formulation modale réduite.

3. Formulation modale

Dans une formulation modale réduite, le champ de température est représenté par une combinaison linéaire de fonctions de base, les modes \tilde{V}_i :

$$T(\underline{x}, t) \approx \sum_{i=1}^{\tilde{N}} x_i(t) \tilde{V}_i(\underline{x}) \quad (4)$$

où le nombre de modes retenus \tilde{N} est très petit devant le nombre de noeuds d'un modèle maillé $\tilde{N} << N$. Les modes étant connus, les inconnues deviennent les états d'excitation $x_i(t)$.

3.1. Calcul de la base réduite

Parmi les différentes méthodes modales, nous utilisons la méthode AROMM [4], dans laquelle les modes sont calculés à partir de deux systèmes d'équations aux valeurs propres associées au problème physique, où λ_i représente la valeur propre associée au vecteur V_i :

Modes de Steklov

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega : \nabla^2 V_i^S = 0 \\ \Gamma : \underline{\nabla} V_i^S \cdot \underline{n} = \lambda_i^S \zeta V_i^S \\ \Gamma_4 : \underline{\nabla} V_i^S \cdot \underline{n} = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

D'une part les modes de Dirichlet permettent de

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega : \nabla^2 V_i^L \\ \Gamma : V_i^D \\ \Gamma_4 : \underline{\nabla} V_i^D \end{array} \right.$$

reconstruire le champ de température dans l'espace H_0^1 défini sur l'ensemble des frontières physiques $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ (excepté sur la frontière Γ_4 caractérisée par la condition de symétrie), d'autre part les modes de Steklov permettent de reconstituer la solution sur la frontière Γ quelle que soit la condition limite qui y est imposée. À partir de ces deux bases, une procédure d'amalgame de l'ensemble de ces modes permet d'obtenir une base réduite qui regroupe les modes \tilde{V}_i :

$$\forall \psi \in \{D, S\}, \quad 1 < i < \tilde{N}_i^\psi, \quad \tilde{V}_i^\psi = \sum_{p=1}^{\tilde{N}_i^\psi} \alpha_{i,p}^\psi V_{i,p}^\psi, \quad \sum_{i=1}^{\tilde{N}} \tilde{N}_i^\psi = N \quad (6)$$

La répartition des modes des deux bases de Dirichlet et de Steklov, ainsi que la détermination des différents coefficients de pondération $\alpha_{i,p}^\psi$ s'effectue en minimisant une norme[4] dans l'espace modal entre un modèle de référence et un modèle modal. Le modèle de référence est obtenu par un ensemble de simulations linéaires pour différentes gammes des paramètres κ_0 , c_0 et h_∞ .

3.2. Equation d'état

Les états d'excitation $x_i(t)$ sont déterminés à partir de l'équation d'état, obtenue en remplaçant T par sa formulation modale (Eq. (4)) dans l'Eq. (2) et en prenant comme fonction d'essai les modes réduits. L'équation résultante s'écrit sous forme matricielle :

$$c_0 \mathbf{C}^R \dot{X}(t) = - [\kappa_0 \mathbf{K}_0^R + \kappa_1 \mathbf{K}_1^R(T) + h_\infty \mathbf{H}_\infty^R + \mathbf{H}_w^R] X(t) + h_\infty U_\infty^R + U_{w,\varphi}^R \quad (7)$$

Ces matrices sont de dimension $[\tilde{N} \times \tilde{N}]$. C'est là que la réduction réside.

D'un point de vue pratique, $\mathbf{K}_1^R(T)$ est calculé numériquement par $\mathbf{K}_1^R(T) = \tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{K}_1(T) \tilde{\mathbf{V}}$, où $\tilde{\mathbf{V}}$ est une matrice de dimension $[N \times \tilde{N}]$ qui regroupe les vecteurs propres \tilde{V}_i . L'intégration de la non-linéarité nécessite de calculer la température et la matrice $\mathbf{K}_1(T)$ dans l'espace physique et de recalculer $\tilde{\mathbf{V}}^t \mathbf{K}_1(T) \tilde{\mathbf{V}}$ dans l'espace modal à chaque itération. Ces opérations réduisent fortement l'efficacité du modèle réduit en termes de temps de calcul. Pour lever cette difficulté, T est remplacée par sa décomposition modale, dans la matrice réduite \mathbf{K}_1^R :

$$\mathbf{K}_1^R(i, j) = \int_{\Omega} T \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \int_{\Omega} x_k(t) \tilde{V}_k \underline{\nabla} \tilde{V}_i \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_j \quad (8)$$

En introduisant les matrices suivantes $\mathbf{K}_k^R(i, j) = \int_{\Omega} \tilde{V}_k \underline{\nabla} \tilde{V}_j \cdot \underline{\nabla} \tilde{V}_i$, on obtient :

$$\mathbf{K}_1^R = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} x_k(t) \mathbf{K}_k^R(i, j) \quad (9)$$

L'équation d'état (10) permet alors de faire apparaître explicitement les paramètres recherchés (κ_0 , κ_1 , c_0 et h_∞), et sera directement utilisée dans un processus inverse :

$$c_0 \mathbf{C}^R \dot{X}(t) = - \left[\kappa_0 \mathbf{K}_0^R + \kappa_1 \left(\sum_{k=1}^{\tilde{N}} x_k(t) \mathbf{K}_k^R \right) + h_\infty \mathbf{H}_\infty^R + \mathbf{H}_w^R \right] X(t) + h_\infty U_\infty^R + U_{w,\varphi}^R \quad (10)$$

3.3. Résultats de la simulation directe réduite

La simulation directe s'effectue pour différents isolants dont les propriétés sont rassemblées dans le tableau 1 (mesures par plaques chaudes gardées et DSC [6]). Les coefficients κ_0 et κ_1 ont été obtenus par régression linéaire à partir de valeurs de κ mesurées à 20, 30 et 40°C. Les isolants que nous simulons sont ainsi purement "digitaux", et ne servent qu'à savoir s'il est possible de retrouver les coefficients κ_0 et κ_1 avec une précision satisfaisante en une seule montée en température. Les coefficients d'échange h sont différents pour chacune des trois simulations et sont choisis arbitrairement dans une gamme de type convection naturelle. Enfin, le temps de montée en température a été arrêté à 15 minutes, là aussi de manière arbitraire : avec la méthode que nous proposons, il n'est pas nécessaire d'attendre un régime stabilisé.

	κ_0 [$mW.m^{-1}.K^{-1}$]	κ_1 [$mW.m^{-1}.K^{-2}$]	c_0 [$kJ.m^{-3}.K^{-1}$]	h_∞ [$W.m^{-2}.K^{-1}$]
polystyrène	28,5	0,112	43,1	12
verre cellulaire	34,1	0,158	70,6	17
polyuréthane	21,3	0,158	38,84	7

Tableau 1 : Propriétés physiques des isolants et coefficients d'échange utilisés

Les résultats de la simulation éléments finis sont présentés pour le polystyrène extrudé. La figure 2 permet de montrer que la non-linéarité n'est pas négligeable dès lors que la température augmente. La simulation d'une telle évolution nécessite 11 s de temps CPU. Ce temps de calcul peut sembler faible, mais intégré dans une procédure d'identification, il peut mener à un temps de calcul de l'ordre de la demi-heure. De plus, il serait nécessaire d'intégrer dans la boucle

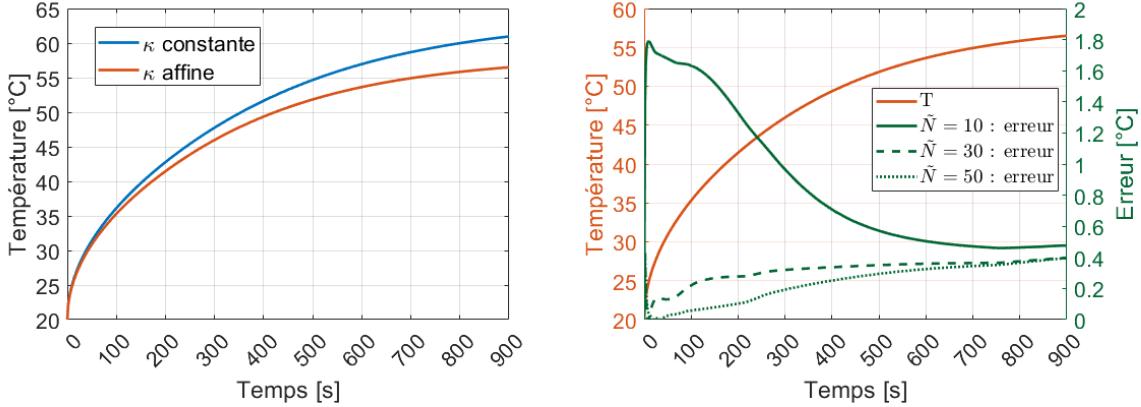


Figure 2 : A gauche : Évolution de la température au point 1. Comparaison entre une conductivité affine et une conductivité constante. A droite : Évolution de la température au point 1 et écart en ce point avec des modèles réduits d'ordres différents

d'identification un programme d'assemblage éléments finis pour recalculer la matrice $\mathbf{K}_1(T)$. Nous créons alors trois modèles réduits d'ordres différents selon la procédure décrite au paragraphe 3. La figure 2 montre l'évolution de l'erreur au point 1 pour ces trois modèles. En début d'évolution temporelle, le modèle réduit à 10 modes entraîne une erreur importante. Les modèles réduits d'ordre 30 et 50 donnent des résultats très similaires caractérisés par des erreurs plus faibles. Lorsque la température commence à se stabiliser, quel que soit l'ordre du modèle, l'erreur reste acceptable. Cela est confirmé par la table 2 qui présente les erreurs maximales et quadratiques aux 5 points de mesure présentés sur la figure 1.

Ordre	Erreur max (°C)	Erreur quadratique (°C)	Temps de calcul (s)
10	1,79	0,48	0,01
30	0,57	0,11	0,06
50	0,43	0,09	0,15

Tableau 2 : Caractérisation du modèle réduit en fonction de l'ordre \tilde{N}

4. Problème inverse

4.1. Principe

Les différents paramètres à identifier sont regroupés dans le vecteur $\beta = [\kappa_0, \kappa_1, c_o, h_\infty]^t$. L'identification s'effectue à partir de N_{cap} capteurs de températures répartis de façon régulière sur la surface Γ_1 (voir Fig. 1), qui sont regroupés dans le vecteur $Y(t)$, et de son équivalent calculé numériquement $\hat{Y}(t)$. Ce dernier est relié au vecteur des températures par une matrice d'observation E :

$$\hat{Y}(t) = \mathbf{E} T(t) = \mathbf{E} \mathbf{V} X(t) \quad (11)$$

Le processus itératif d'identification s'appuie sur la minimisation d'un critère quadratique bâti sur l'écart entre les $N_{\Delta t}$ mesures discrètes Y à pas de temps réguliers $\Delta t = 1,8s$ pour tous les capteurs, et le résultat de la simulation \hat{Y} effectué par le modèle réduit (Eq. (10)) pour le jeu de

paramètres estimé β à chaque itération :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N_{cap}} \sum_{j=1}^{N_{\Delta t}} \left(Y_{i,j} - \hat{Y}_{i,j}(\beta) \right)^2 \quad (12)$$

Dans cette étude, les mesures sont simulées par le modèle éléments finis (Eq. (3)). Un bruit de mesure gaussien centré sur zéro et d'écart type σ_b est ajouté au résultat de la simulation. Cette procédure de minimisation utilise une méthode de programmation non linéaire basée sur un algorithme à régions de confiance (proposée sous Matlab®, fonction *lsqcurvefit*) [7].

5. Résultats et discussion

5.1. Analyse de sensibilité

La sensibilité réduite aux différents points de mesure Y_i pour chaque paramètre β_j s'écrit :

$$S_{i,j}^* = \beta_j \frac{\partial Y_i}{\partial \beta_j} \quad (13)$$

On trace sur la figure 3 l'évolution de ces paramètres au cours du temps pour les points 1 et 5. Ils apparaissent bien décorrélés. De plus les sensibilités sur les paramètres du matériau (κ_0 , κ_1 , c_0) sont meilleures pour le point central, alors que celle sur le coefficient d'échange h_∞ est plus importante sur le point périphérique. Il est ainsi nécessaire de prendre au moins ces deux points de mesure. Nous choisissons les cinq observables prévus initialement.

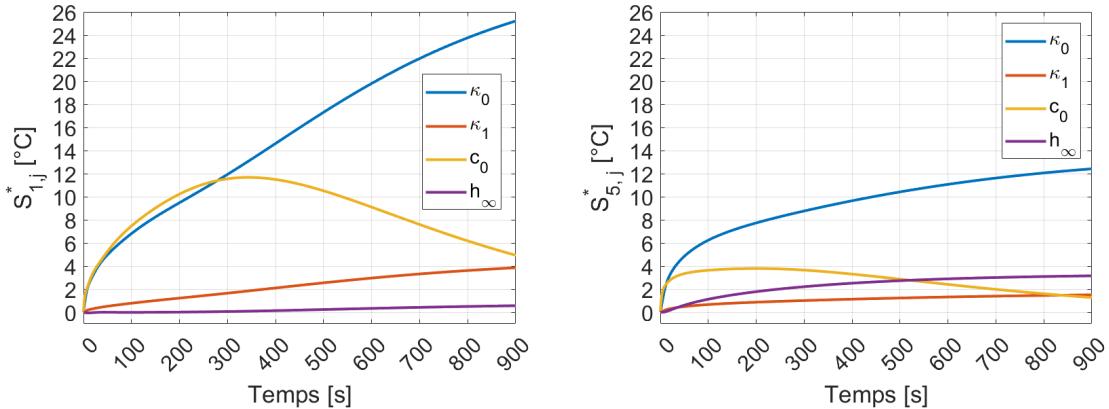


Figure 3 : Sensibilité réduite aux différents paramètres pour les points 1 (à gauche) et 5 (à droite)

5.2. Identification avec un modèle réduit 3D pour du polystyrène extrudé

5.2.1. Influence de l'ordre du modèle réduit

Nous avons effectué 50 identifications pour différents bruits gaussiens de mesure caractérisés par un écart type $\sigma_b = 0, 1^\circ C$. Le tableau 3 présente l'erreur moyenne ϵ sur les 50 simulations ainsi que l'écart type σ , pour chacun des paramètres recherchés, et en pourcentage par rapport aux valeurs cibles (table 1). Le modèle à 10 modes amène des résultats très imprécis, notamment pour le coefficient κ_1 . Les modèles d'ordre supérieurs (30 et 50 modes) donnent des résultats proches et très satisfaisants en termes de précision. Ces résultats sont cohérents avec ceux de la

simulation directe réduite. Par ailleurs l'écart type est faible. Ceci est probablement dû au choix de prendre 5 points de mesure. Notons aussi, que l'écart type augmente avec l'ordre du modèle. Ce résultat est classique en réduction de modèle. La réduction modale a un effet régularisateur, puisque les dynamiques rapides du modèle sont éliminées lors du processus de réduction.

Ordre	$\epsilon_{\kappa_0} [\%]$	$\sigma_{\kappa_0} [\%]$	$\epsilon_{\kappa_1} [\%]$	$\sigma_{\kappa_1} [\%]$	$\epsilon_{c_0} [\%]$	$\sigma_{c_0} [\%]$	$\epsilon_{h_\infty} [\%]$	$\sigma_{h_\infty} [\%]$
10	15,6	0,2	84,4	1,3	8,0	0,1	6,0	0,2
30	0,2	0,6	3,1	3,8	0,9	0,1	1,0	0,7
50	0,1	0,6	1,5	3,7	0,5	0,6	0,1	2,7

Tableau 3 : *Influence de l'ordre du modèle réduit sur la précision de l'identification pour des mesures caractérisées par bruit d'écart type $0,1^\circ C$*

5.2.2. Influence du bruit de mesure

Le tableau 4 présente l'erreur d'identification et l'écart type pour différentes qualités de mesure. Le bruit de mesure influe peu sur la précision, mais évidemment d'avantage sur l'écart type. Les faibles valeurs de ce dernier indicateur montre qu'il ne sera pas nécessaire d'effectuer plusieurs mesures pour identifier les paramètres avec une précision satisfaisante.

$\sigma_B [{}^\circ C]$	$\epsilon_{\kappa_0} [\%]$	$\sigma_{\kappa_0} [\%]$	$\epsilon_{\kappa_1} [\%]$	$\sigma_{\kappa_1} [\%]$	$\epsilon_{c_0} [\%]$	$\sigma_{c_0} [\%]$	$\epsilon_{h_\infty} [\%]$	$\sigma_{h_\infty} [\%]$
0,1	0,1	0,6	1,5	3,7	0,5	0,1	0,1	0,6
0,25	0,4	1,1	0,2	6,9	0,5	0,2	0,3	1,2
0,5	0,1	2,6	2,9	16,5	0,5	0,6	0,01	2,7

Tableau 4 : *Propriétés du polystyrène - Effet du bruit de mesure : Erreur d'identification et écart type pour un bruit caractérisé par un écart type de $0,1^\circ C$, $0,25^\circ C$ et $0,5^\circ C$ et un modèle réduit d'ordre 50.*

5.3. Autres matériaux

Les matériaux présentés dans la table 1 font chacun l'objet de 50 essais d'identification, en utilisant un modèle réduit d'ordre $\tilde{N} = 50$, et un bruit de mesure caractérisé par un écart type $\sigma_B = 0,1^\circ C$. La figure 4 présente pour chacun d'entre eux et pour les deux températures limites considérées (20 et $60^\circ C$) :

- la position de la cible recherchée,
- la zone d'incertitude de l'identification caractérisée par $[\kappa(T) \pm 3\sigma_{\kappa(T)}] \times [c_0 \pm 3\sigma_{c_0}]$, et qui correspond à un niveau d'espérance statistique de 99,73% que le résultat d'une unique identification appartienne à ce domaine. Cette zone est présentée lorsque l'identification s'effectue à partir de tous les points de mesure, ou uniquement les 2 points extrêmes 1 et 5.

Pour chaque essai la valeur cible se situe bien dans la zone d'identification, qui est elle même suffisamment réduite pour bien différencier l'impact du choix de l'isolant et de sa dépendance à la température en ce qui concerne la conductivité thermique. Par ailleurs, augmenter le nombre de points de mesure améliore ici la dispersion de l'identification.

6. Conclusion

L'objectif de cette étude était de montrer la faisabilité de déterminer la conductivité thermique d'un isolant à plusieurs températures en une seule montée en température. L'autre objec-

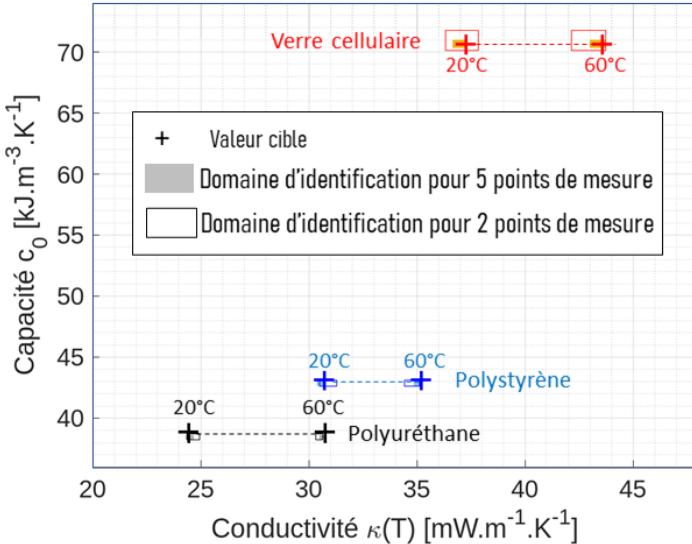


Figure 4 : Identifications des caractéristiques pour 3 isolants

tif était de concevoir une expérience de type plaque chaude gardée avec le moins de contraintes possible. Pour cela, nous avons dans un premier temps supposé que la conductivité suivait une loi de variation affine en température. Pour diminuer le temps d'identification, nous avons construit un modèle réduit qui prend en compte la thermo-dépendance. Afin d'éviter de devoir maîtriser les conditions aux limites, nous avons identifié aussi le coefficient d'échange. Finalement, pour diminuer le temps de l'expérience, nous n'attendons pas le régime stabilisé. Les premiers résultats sur cette expérience numérique idéale sont très encourageants. Les paramètres physiques et les conditions aux limites sont retrouvés avec une précision excellente et un écart type très faible. Des analyses plus poussées sont en cours en ce qui concerne la sensibilité au flux de chaleur imposé et à la position des capteurs. L'étape suivante sera de confronter cette expérience idéale à la réalité expérimentale.

Références

- [1] Francesco De Ponte *et al.*, Conductivité thermique des isolants. Techniques de l'ingénieur (2002) R2930 v2
- [2] Hu Zhang *et al.*, Measurement and identification of temperature-dependent thermal conductivity for thermal insulation materials under large temperature difference, International Journal of Thermal Sciences 171 (2022) 107261, <https://doi.org/10.1016/j.ijthermalsci.2021.107261>
- [3] A.G. Chavez Castillo *et al.*, Identification of insulating materials thermal properties by inverse method using reduced order model, International Journal of Heat and Mass Transfer 166 (2021), 120683, <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2020.120683>
- [4] Fatme Mustapha *et al.*, Development of a reduced-order AROMM model for the nonlinear thermal simulation of electronic components, International Journal of Heat and Mass Transfer, 232 (2024) 125909, <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2024.125909>
- [5] Yousefi Y, Tariku F., Thermal conductivity and specific heat capacity of insulation materials at different mean temperatures, Journal of Physics : Conference Series. IOP Publishing, 2021, 2069(1) : 012090.
- [6] A.G. Chavez Castillo, Apport des modèles réduits pour la caractérisation thermique de matériaux de construction : mesures in situ d'isolants et étude multi-échelle d'un bois sec, Thèse de doctorat, Université Paris-Saclay (2020), <http://www.theses.fr/2020UPAST040/document>
- [7] A. R. Conn, N. I. M. Gould, L. Toint, Trust-Region Methods, MOS-SIAM Series on Optimization, 2000.