

Pour une estimation simultanée des conductivités de matériaux orthotropes par thermographie

Simultaneous estimation of conductivities of orthotropic materials by thermography

Thomas PIERRE^{1*}, Helcio R. B. ORLANDE², Philippe LE MASSON¹, Edouard GESLAIN¹, Coline BOURGÈS¹, Julien BERGER³

¹ Univ. Bretagne Sud, UMR 6027, IRDL, F-56100, Lorient, France.

² Université Fédérale de Rio de Janeiro, Politécnica/COPPE, Cidade Universitária, 68502, Rio de Janeiro, Brésil.

³ LaSIE, UMR 7356 CNRS, La Rochelle Université, CNRS, 17000, La Rochelle, France.

Résumé – Ce travail présente les premiers développements pour l'estimation des trois composantes de la conductivité thermique d'un parallélépipède solide orthotrope chauffé par laser avec l'utilisation d'une seule caméra infrarouge par l'observation simultanée de quatre de ses faces. La température de la surface chauffée est utilisée comme condition limite, tandis que celles des trois autres surfaces sont utilisées pour la résolution d'un problème inverse de type bayésien. Une transformation intégrale est appliquée sur les mesures utilisées pour l'analyse inverse, en utilisant les valeurs propres liées au problème de conduction thermique original. Peu de modes transformés sont utilisés pour la résolution du problème inverse, compressant ainsi spatialement les données fournies par la caméra infrarouge.

Abstract – This work presents the first developments for the estimation of three thermal conductivity components of an orthotropic parallelepiped heated by laser, with the use of one single infrared camera that simultaneously observes four of its surfaces. The temperature of the heated surface is used as a boundary condition, while those of the three other surfaces are used for the solution of an inverse problem by a Bayesian technique. An integral transformation is applied on the measurements used for the inverse analysis, using the eigenvalues related to the original thermal conduction problem. Few transformed modes are used for the solution of the inverse problem, thus spatially compressing the data provided by the infrared camera.

Nomenclature

Lettres latines

c_p^m	chaleur massique, $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$
e	épaisseur, m
h	coefficient d'échange global, $W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$
H	nombre de Biot modifié, m^{-1}
k	conductivité thermique, $W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$
ℓ	demi-longueur, m
N	norme
\mathbf{P}	vecteur des paramètres
q	distribution
t	temps, s
T	température, °C
U	nombre aléatoire
x, y, z	coordonnées cartésiennes

X, Y, Z fonctions propres

\mathbf{Y} mesures, °C

Lettres grecques

α	ratio
β_m	valeur propre, m^{-1}
γ_n	valeur propre, m^{-1}
η_p	valeur propre, m^{-1}
θ	température, °C
ρ	masse volumique, $kg \cdot m^{-3}$
Ψ	fonction gaussienne, °C

Indices et exposants

x, y, z	direction des composantes
∞	ambiante
0	en $z = 0$

1. Introduction

Déterminer les composantes de la conductivité thermique de matériaux orthotropes ou anisotropes fait l'objet de nombreux développements expérimentaux et théoriques [1-7]. Une spécificité de ces expériences de caractérisation est que l'observable est bien souvent unique, par exemple la température face arrière quand la face avant est stimulée thermiquement. Il n'y a donc qu'une information partielle sur la répartition spatiale du flux. La visualisation simultanée par une même caméra (associée à des optiques) des deux faces avant et arrière d'une plaque soumise à un chauffage laser a été récemment proposée par Houssein *et al.* dans le but d'estimer la diffusivité thermique de métaux liquides [8]. Si les réglages du dispositif expérimental sont plus délicats en termes de chemin optique, deux avantages peuvent être avancés. D'une part, une seule caméra allège les opérations d'étalonnage et de synchronisation et l'observable et la grandeur d'entrée sont de même nature. D'autre part, à l'aide d'un modèle température-température, cette technique a permis d'exprimer une transmittance uniquement dépendante de la diffusivité et des pertes arrière, sans se soucier de la part du flux laser absorbé ni des pertes face avant ; elle réduit donc le nombre d'inconnus.

Les premiers développements vers l'utilisation d'une seule caméra infrarouge pour observer simultanément quatre surfaces d'un solide orthotrope sont présentés dans l'idée de visualiser où va le flux lorsqu'une des surfaces est soumise à un chauffage laser. L'objectif principal est d'estimer les trois composantes de la conductivité thermique du solide orthotrope de forme parallélépipédique. Les observations prises avec la caméra infrarouge sur la surface chauffée sont utilisées comme condition limite, tandis que les mesures prises sur trois autres surfaces sont utilisées dans la fonctionnelle pour la résolution d'un problème inverse. Par ailleurs, une transformation intégrale de type Fourier est appliquée sur les mesures utilisées pour l'analyse inverse, en utilisant les valeurs propres liées au problème de conduction thermique original [5-6]. Peu de modes transformés sont utilisés pour la résolution du problème inverse, compressant ainsi spatialement les données fournies par la caméra infrarouge [4][6]. Le problème inverse est résolu dans le cadre bayésien des statistiques, en appliquant l'algorithme de Metropolis-Hastings avec échantillonnage séquentiel dans deux jeux de paramètres du modèle (paramètres d'intérêt et autres).

L'article présente dans un premier temps le dispositif expérimental (Section 2). La Section 3 développe le modèle mathématique ainsi que le problème inverse. Enfin la Section 4 présente des tests d'estimation sur mesures simulées.

2. Dispositif expérimental

La Figure 1 présente le dispositif expérimental en cours de développement. Il est composé de neuf miroirs (M1 à M9) et de deux prismes (P1 et P2) lesquels doivent permettre à la caméra infrarouge de visualiser simultanément quatre des six faces du parallélépipède. Les quatre chemins optiques sont identiques pour avoir des images nettes.

L'échantillon est donc un parallélépipède rectangle en bois de base carrée $4\ell^2$ et d'épaisseur e . Il a été fabriqué par impression 3D afin de maîtriser son orthotropie. Le chauffage laser doit être adapté pour que l'échauffement de l'échantillon soit inférieur à 10 K à son maximum.

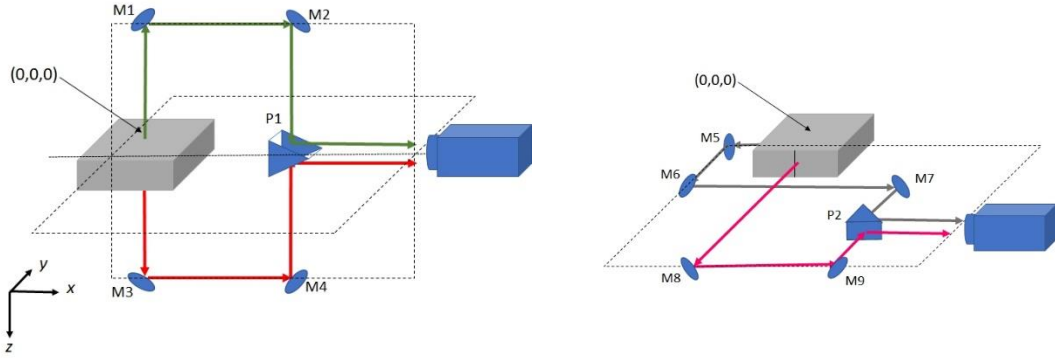


Figure 1. Schéma du dispositif optique expérimental. Pour des raisons de clarté, les quatre chemins optiques sont présentés sur deux figures.

L'échantillon est chauffé par laser. Le laser à diode (IPG PHOTONICS YLR 300/3000 QCW à 1 070 nm) a une puissance maximale de 300 W en continu. Il est placé en haut du dispositif. La caméra IR, un modèle FLIR X6580sc munie d'un objectif 25 mm, opère dans la gamme de longueurs d'onde $[3,0 \mu\text{m} - 5,1 \mu\text{m}]$. Sa fréquence d'acquisition maximale est de 50 Hz pour une image en pleine taille de 640×512 pixels.

Une fois le dispositif réglé, la caméra est en mesure de visualiser simultanément les faces dans les plans : $(x = \ell, y, z)$; $(x, y = \ell, z)$; $(x, y, z = 0)$; $(x, y, z = e)$.

3. Modèle mathématique et problème inverse

Dans le cadre de cette expérience, les coordonnées cartésiennes sont considérées et le système est centré sur $x = 0, y = 0$. L'équation de la chaleur et les conditions initiale et aux limites utilisées pour déterminer le champ de température au sein de l'échantillon orthotrope sont données par le système (1)-(9) avec $\theta = T - T_\infty$ où T_∞ est la température ambiante.

$$k_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \rho c_p^m \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (1)$$

$$\theta(x, y, z, 0) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \theta(0, y, z, t)}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$k_x \frac{\partial \theta(\ell, y, z, t)}{\partial x} + h_x \theta(\ell, y, z, t) = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0, z, t)}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

$$k_y \frac{\partial \theta(x, \ell, z, t)}{\partial y} + h_y \theta(x, \ell, z, t) = 0 \quad (6)$$

$$T(x, y, 0, t) = \Psi(x, y, t) \quad (7)$$

$$k_z \frac{\partial \theta(x, y, e, t)}{\partial z} + h_z \theta(x, y, e, t) = 0 \quad (8)$$

La face supérieure, « vue » par le miroir M1, est chauffée par un chauffage laser de type gaussien. Cependant, dans le cadre de cette première approche théorique, c'est une réponse hypothétique (donc sans certitude par rapport aux expériences à venir) en température en $z = 0$ qui est utilisée en tant que donnée d'entrée (9) avec R le rayon de la distribution gaussienne supposée constante dans un premier temps et T_0 la température

aux coordonnées (0, 0, 0) mesurée par la caméra infrarouge également supposée constante dans un premier temps.

$$\Psi(x, y, t) = [T_0(t) - T_\infty]e^{-\frac{x^2+y^2}{R(t)^2}} \quad (9)$$

Dans un premier temps, une solution analytique $\dot{\tilde{\theta}}(\beta_m, \gamma_n, \eta_p, t)$ du système (1)-(9) a été obtenue *via* plusieurs transformations intégrales selon les trois directions de l'espace (non-présentée ici) en considérant les deux cas où R et T_0 sont des constantes. Chaque transformation est symbolisée : – pour celle en x , \sim pour celle en y et \cdot pour celle en z .

L'inversion s'effectue par comparaison entre les températures expérimentales des faces en $x = \ell$, $y = \ell$ et $z = e$ modifiées, respectivement, au moyen de transformations intégrales de type Fourier (10)-(12), et celles théoriques (13)-(15).

$$\dot{\tilde{\theta}}^{exp}(\ell, \gamma_n, \eta_p, t) = \int_{y=0}^{\ell} \int_{z=0}^e Y(\gamma_n, y) Z(\eta_p, z) \theta^{exp}(\ell, y, z, t) dy dz \quad (10)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}^{exp}(\beta_m, \ell, \eta_p, t) = \int_{x=0}^{\ell} \int_{z=0}^e X(\beta_m, x) Z(\eta_p, z) \theta^{exp}(x, \ell, z, t) dx dz \quad (11)$$

$$\tilde{\theta}^{exp}(\beta_m, \gamma_n, e, t) = \int_{x=0}^{\ell} \int_{y=0}^{\ell} X(\beta_m, x) Y(\gamma_n, y) \theta^{exp}(x, y, e, t) dx dy \quad (12)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}^{th}(\ell, \gamma_n, \eta_p, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{X(\beta_m, \ell)}{N(\beta_m)} \dot{\tilde{\theta}}(\beta_m, \gamma_n, \eta_p, t) \quad (13)$$

$$\dot{\tilde{\theta}}^{th}(\beta_m, \ell, \eta_p, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y(\gamma_n, \ell)}{N(\gamma_n)} \dot{\tilde{\theta}}(\beta_m, \gamma_n, \eta_p, t) \quad (14)$$

$$\tilde{\theta}^{th}(\beta_m, \gamma_n, e, t) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Z(\eta_p, e)}{N(\eta_p)} \tilde{\theta}(\beta_m, \gamma_n, \eta_p, t) \quad (15)$$

avec m, n et $p = 1, \dots, \infty$. Le Tableau 1 synthétise les grandeurs exprimées dans les équations (10)-(12) [9]. Pour les normes $N(\beta_m)$, $N(\gamma_n)$ et $N(\eta_p)$, voir également [9].

Tableau 1. Synthèse des grandeurs exprimées aux équations (10)-(15).

fonctions propres	valeurs propres	fonctions transcendantes	
$X(\beta_m, x) = \cos(\beta_m x)$	β_m	$\beta_m \tan(\beta_m \ell) = H_x$	$H_x = h_x/k_x$
$Y(\gamma_n, y) = \cos(\gamma_n y)$	γ_n	$\gamma_n \tan(\gamma_n \ell) = H_y$	$H_y = h_y/k_y$
$Z(\eta_p, z) = \sin(\eta_p z)$	η_p	$\eta_p \cot(\eta_p e) = -H_z$	$H_z = h_z/k_z$

Les paramètres à optimiser dans ce calcul sont le rayon R de distribution de la température en face avant qui peut évoluer en fonction de la sollicitation en surface, la température T_0 , les rapports dimensionnels du domaine (valeurs de e au regard de ℓ), et le nombre maximum des valeurs propres dans les trois directions m_{max} , n_{max} et p_{max} .

Dans le cadre de cet article, un seul cas test est traité et discuté. L'objectif étant de présenter la méthodologie de l'estimation. Ainsi, la méthode inverse s'appuie sur le

théorème de Bayes (16) qui utilise les informations connues *a priori* pour l'estimation des paramètres d'intérêt et de leurs incertitudes. Tous les paramètres du modèle peuvent être considérés comme des variables aléatoires et la solution du problème inverse est la distribution de probabilité postérieure $\pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$ [10]. La fonction de distribution de probabilité $\pi(\mathbf{P})$ représente les connaissances *a priori* des paramètres \mathbf{P} . La fonction de vraisemblance $\pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})$ rend compte de l'adéquation entre les mesures et le modèle théorique censé être représentatif de l'expérience. Dans cette étude, les données d'entrée ont été séparées en deux jeux de paramètres : les paramètres \mathbf{P}_1 d'intérêt moindre et ceux d'intérêt principal \mathbf{P}_2 .

$$\pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y}) \propto \pi(\mathbf{Y}|\mathbf{P})\pi(\mathbf{P}) \quad (16)$$

$$\mathbf{P}_1 = [h_x, h_y, h_z, T_0, T_\infty, R]^T \quad (17)$$

$$\mathbf{P}_2 = [k_x, k_y, k_z, c_p^m]^T \quad (18)$$

L'estimation de $\pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$ s'appuie sur la méthode de Monte Carlo Chaînes de Markov (MCMC) et sur l'algorithme de Metropolis Hastings selon les étapes suivantes [11] :

1. À $t = 0$, départ des chaînes de Markov avec l'échantillonnage $\mathbf{P}^{(0)}$.
2. Proposer des candidats \mathbf{P}_1^* à partir de la distribution $q_1(\mathbf{P}_1^*|\mathbf{P}_1^{(t)})$ pour le vecteur \mathbf{P}_1 et imposer $\mathbf{P}_2^* = \mathbf{P}_2^{(t)}$.
3. Calcul du rapport Metropolis-Hastings :

$$\alpha_1(\mathbf{P}^*|\mathbf{P}^{(t)}) = \min \left[1, \frac{\pi(\mathbf{P}^*)q_1(\mathbf{P}_1^{(t)}|\mathbf{P}_1^*)}{\pi(\mathbf{P}^{(t)})q_1(\mathbf{P}_1^*|\mathbf{P}_1^{(t)})} \right] \quad (19)$$

4. Proposition d'un nombre aléatoire $U_1 \sim \mathcal{U}(0,1)$.
5. Si $U_1 \leq \alpha_1(\mathbf{P}^*|\mathbf{P}^{(t)})$, alors $\mathbf{P}_1^{(t+1)} = \mathbf{P}_1^*$. Sinon, alors $\mathbf{P}_1^{(t+1)} = \mathbf{P}_1^{(t)}$.
6. Proposer des candidats \mathbf{P}_2^* à partir de la distribution $q_2(\mathbf{P}_2^*|\mathbf{P}_2^{(t)})$ pour le vecteur \mathbf{P}_2 et imposer $\mathbf{P}_1^* = \mathbf{P}_1^{(t)}$.
7. Calcul du rapport Metropolis-Hastings :

$$\alpha_2(\mathbf{P}^*|\mathbf{P}^{(t)}) = \min \left[1, \frac{\pi(\mathbf{P}^*)q_2(\mathbf{P}_2^{(t)}|\mathbf{P}_2^*)}{\pi(\mathbf{P}^{(t)})q_2(\mathbf{P}_2^*|\mathbf{P}_2^{(t)})} \right] \quad (20)$$

8. Proposition d'un nombre aléatoire $U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$.
9. Si $U_2 \leq \alpha_2(\mathbf{P}^*|\mathbf{P}^{(t)})$, alors $\mathbf{P}_2^{(t+1)} = \mathbf{P}_2^*$. Sinon, alors $\mathbf{P}_2^{(t+1)} = \mathbf{P}_2^{(t)}$.
10. À $t = t + 1$, retour à l'étape 2 pour proposer de nouveaux candidats $\{\mathbf{P}^{(1)}, \mathbf{P}^{(2)}, \dots, \mathbf{P}^{(n)}\}$.

Ce processus d'estimation est effectué 10 000 fois (états). Le traitement statistique des résultats qui suit ne concerne que les états où l'estimation présente des valeurs stabilisées en termes d'estimation ou de la probabilité *a posteriori* (Figure 2).

4. Résultats

Après avoir présenté le modèle mathématique et la technique d'inversion, un cas d'étude est présenté où les températures expérimentales simulées sont issues du modèle direct bruité (bruit gaussien ajouté de $\pm 0,1$ °C). Les valeurs vraies pour le modèle direct des paramètres \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 sont présentées dans le Tableau 2. C'est le cas particulier d'une

température imposée uniforme en $z = 0$ comme condition aux limites (7) qui est présenté dans cette étude, avec une valeur du rayon du chauffage gaussien exagérément importante ($R = 50$ m). Expérimentalement, R est susceptible de changer au cours du temps puisque la température est initialement homogène à T_∞ dans l'ensemble de l'échantillon.

Tableau 2. Données d'entrée du modèle.

k_x ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)	k_y ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)	k_z ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$)	h_x ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$)	h_y ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$)
0,3	0,1	0,5	10	10
h_z ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$)	ρc_p^m ($\text{J}\cdot\text{m}^{-3}\cdot\text{K}^{-1}$)			
10	6×10^5			
e (mm)	ℓ (mm)	R (m)	T_∞ ($^\circ\text{C}$)	T_0 ($^\circ\text{C}$)
10	25	50	20	60

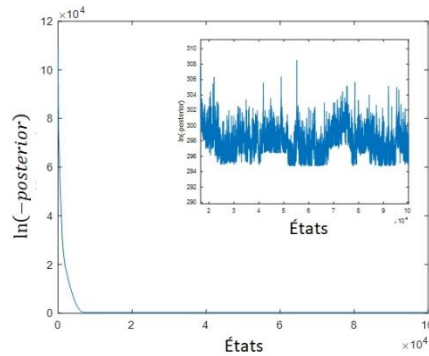


Figure 2. Évolution de la fonctionnelle de $\pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$ en fonction du nombre d'états.

Pour l'estimation, les connaissances *a priori* sur les paramètres sont faibles et donc considérés uniformes dans un intervalle $[P_{min} ; P_{max}]$. Les paramètres initiaux \mathbf{P}_2 sont ceux du modèle direct (Tableau 1) multipliés par 2. Les Figures 3 à 5 tracent les évolutions des températures transformées simulées (13)-(15) et estimées (16)-(18) en fonction du temps pour les trois faces observées expérimentalement, c'est-à-dire en $x = \ell$, $y = \ell$ et $z = e$.

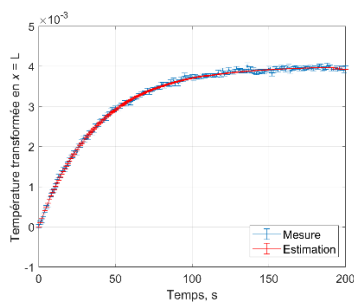


Figure 3. Températures transformées simulées et estimées en $x = \ell$.

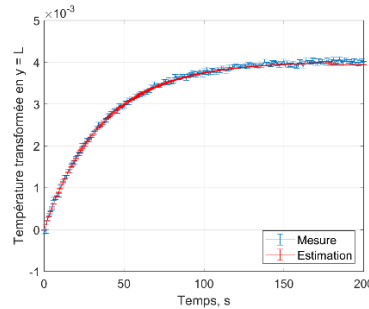


Figure 4. Températures transformées simulées et estimées en $y = \ell$.

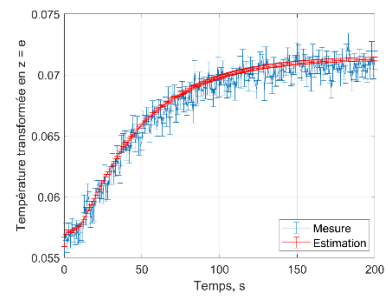


Figure 5. Températures transformées simulées et estimées en $z = e$.

En termes de résultats, la Figure 2 présente l'évolution de la fonctionnelle de la probabilité *a posteriori* $\pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$ en fonction du nombre d'états. Il apparaît que $\pi(\mathbf{P}|\mathbf{Y})$ est stabilisée assez tardivement, à partir du 7 000^{ème} état environ. La constatation est la même pour les valeurs estimées de conductivités thermiques et de capacité thermique (Figures 6, 7, 8 et 12). L'étude statistique a donc été effectuée entre les états 7 000 et 10 000 et est présentée sous forme d'histogrammes sur les Figures 9, 10, 11 et 13 et dans le Tableau 3.

Les résultats des conductivités et de la capacité thermique estimées sont cohérentes et peu dispersées. Cependant, les erreurs, donc par rapport aux paramètres initiaux, sont inégales et comprises entre 4 % pour k_y et 42 % pour k_x . Néanmoins la comparaison entre les températures transformées simulées et estimées est très satisfaisantes (Figures 3 à 5). Il est clair qu'il y a donc corrélation entre les paramètres, l'étude de sensibilité n'ayant pas encore été effectuée.

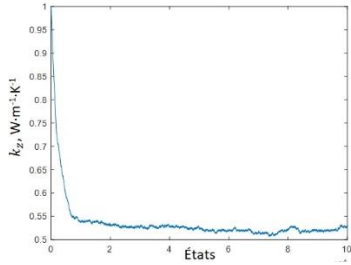


Figure 6. Évolution de k_x .

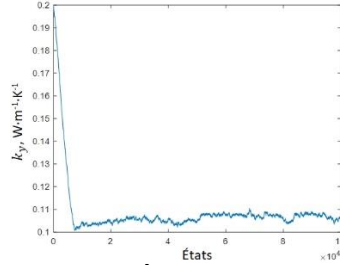


Figure 7. Évolution de k_y .

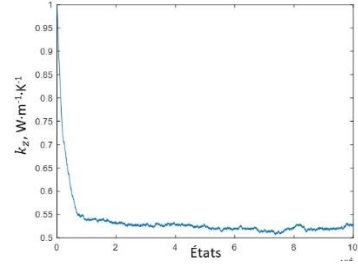


Figure 8. Évolution de k_z .

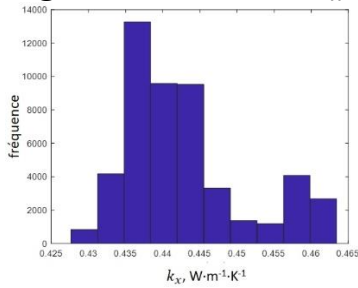


Figure 9. Histogramme des conductivités estimées k_x .

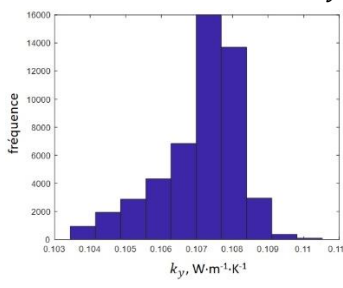


Figure 10. Histogramme des conductivités estimées k_y .

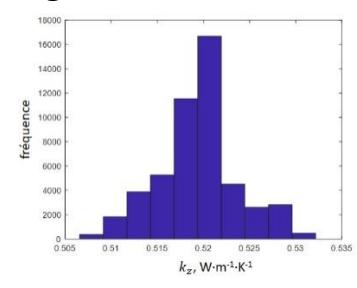


Figure 11. Histogramme des conductivités estimées k_z .

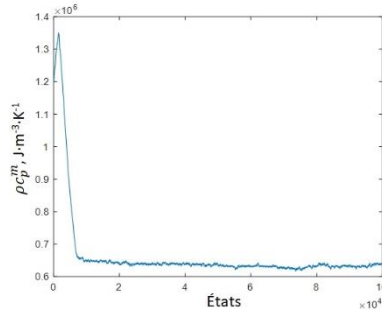


Figure 12. Évolution de ρc_p^m .

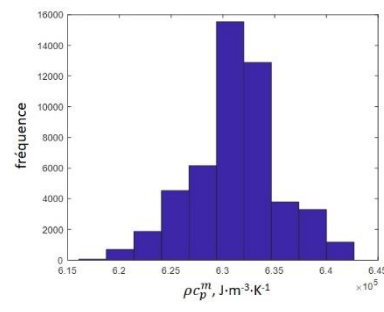


Figure 13. Histogramme de la capacité thermique estimée ρc_p^m .

Tableau 3. Paramètres estimés \mathbf{P}_2 et erreurs par rapport aux paramètres du modèle direct.

k_x (W·m⁻¹·K⁻¹)	k_y (W·m⁻¹·K⁻¹)	k_z (W·m⁻¹·K⁻¹)	ρc_p^m (MJ·m⁻³·K⁻¹)
$0,44 \pm 0,01$	$0,11 \pm 0,01$	$0,52 \pm 0,01$	$0,632 \pm 0,007$
42 %	10 %	4 %	6 %

Une première analyse de ces résultats confirme le besoin d'optimiser les paramètres de la source d'énergie sur la surface. En effet, l'apport d'énergie, ici, induit une distribution en température sur la surface globalement homogène impliquant ensuite un faible gradient en surface dans les deux directions x et y . La difficulté est soulignée lors de l'estimation où, pour une conductivité plus forte dans la direction des x , l'erreur d'estimation est plus forte en raison d'un faible gradient de température dans cette

direction. Cependant, il est possible d'imaginer qu'un accroissement de l'épaisseur en z (valeur de e) conduirait à accentuer les gradients en x et y . Il est donc essentiel, maintenant que la méthodologie est présentée, d'optimiser les paramètres dimensionnels du domaine [12] et de la distribution surfacique de la température en face avant.

5. Conclusion

Cette étude présente les premiers tests par simulation en vue d'estimer les trois composantes de la conductivité thermique d'un matériau parallélépipédique orthotrope. L'originalité est expérimentale, comme brièvement présentée en Section 2, et réside dans la visualisation simultanée de quatre faces d'un échantillon. Un modèle analytique a été développé où les températures théoriques sont modifiées par transformations intégrales de type Fourier. Le dispositif étant toujours en cours de développement, un premier cas a été testé avec des données simulées pour un chauffage homogène bruité sur une face. Les résultats d'estimation présentent des valeurs cohérentes mais inégales en termes d'erreur par rapport à celles du modèle direct. Un travail d'optimisation des paramètres dimensionnels doit être mené avant de poursuivre sur un développement expérimental pour lequel la prise en compte d'un chauffage de type gaussien pourra être envisagé.

Références

- [1] Lachi, M., et A. Degiovanni. « Détermination des diffusivités thermiques des matériaux anisotropes par méthode flash bidirectionnelle ». *Journal de Physique III*, vol. 1, n° 12, décembre 1991, p. 2027-46. jp3.journaldephysique.org.
- [2] Griesinger, A., et al. « A photothermal method with step heating for measuring the thermal diffusivity of anisotropic solids ». *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 40, n° 13, septembre 1997, p. 3049-58. *ScienceDirect*.
- [3] Salazar, Agustin, et al. « Photothermal characterization of anisotropic materials with buried principal axes ». *Optical Engineering*, vol. 36, n° 2, février 1997, p. 391-99.
- [4] Knupp, Diego C., et al. « Space-Variable Thermophysical Properties Identification in Nanocomposites via Integral Transforms, Bayesian Inference and Infrared Thermography ». *Inverse Problems in Science and Engineering*, vol. 20, n° 5, juillet 2012, p. 609-37. *DOI.org (Crossref)*.
- [5] Souhar, Youssef, et al. « Thermal Characterization of Anisotropic Materials at High Temperature Through Integral Methods and Localized Pulsed Technique ». *International Journal of Thermophysics*, vol. 34, n° 2, février 2013, p. 322-40. *Springer Link*.
- [6] Abreu, Luiz A. S., et al. « Detection of contact failures with the Markov chain Monte Carlo method by using integral transformed measurements ». *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 132, octobre 2018, p. 486-97. *ScienceDirect*.
- [7] Tarasovs, Sergejs, et Andrey Aniskevich. « Identification of the anisotropic thermal conductivity by an inverse solution using the transient plane source method ». *Measurement*, vol. 206, janvier 2023, p. 112252. *ScienceDirect*.
- [8] Houssein, Jad, et al. « A novel apparatus dedicated to the estimation of the thermal diffusivity of metals at high temperature ». *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 191, septembre 2023, p. 108359. *ScienceDirect*.
- [9] M Ozisik and H. Orlande, *Inverse Heat Transfer: Fundamentals and Applications*, CRC Press, Boca Raton, 2021.
- [10] J. Kaipio and E. Somersalo, *Statistical and Computational Inverse Problems*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [11] D. Gamerman and H. F. Lopes, *Markov chain Monte Carlo: stochastic simulation for Bayesian inference*. CRC Press, 2006.
- [12] Berger, Julien, et al. « On the optimal experiment design for heat and moisture parameter estimation ». *Experimental Thermal and Fluid Science*, vol. 81, février 2017, p. 109-22.