

Identification d'un modèle d'état réduit et de l'entrée thermique inconnue pour la reconstruction 3D du champ de température en thermoablation

Identification of a reduced-order model and unknown thermal input for 3D reconstruction of the temperature field in thermoablation

Mariana DE MELO ANTUNES^{1,2*}, Ida BURGERS¹, Nino AVETIKOVI³, Valery OZENNE³, Sandro M M LIMA E SILVA², Jean-Luc BATTAGLIA¹

¹ Univ. Bordeaux, CNRS, Bordeaux INP, I2M, UMR 5295, F-33400, Talence, France

² Université d'Itajubá, Laboratoire de Transfert de Chaleur (LabTC), Itajubá, MG, Brésil

³ Univ. Bordeaux, CNRS, CRMSB, UMR 5536, F-33000 Bordeaux, France

*(auteur correspondant : marianamelo@unifei.edu.br)

Résumé - Ce travail propose une méthodologie mathématique de reconstruction du champ thermique tridimensionnel basée sur un modèle d'état réduit estimant simultanément la dynamique du système et son entrée inconnue à partir de mesures. La base modale, obtenue par décomposition orthogonale propre, réduit la dimensionnalité tout en conservant les modes dominants. Le modèle, identifié à partir de données expérimentales, reproduit fidèlement l'évolution thermique même en présence de bruit et de données manquantes. Les perspectives incluent l'extension à des effets vasculaires et la généralisation à plusieurs scénarios expérimentaux.

Abstract - This work presents a mathematical methodology for three-dimensional thermal field reconstruction based on a reduced-order model jointly estimating system dynamics and unknown input from partial measurements. The modal basis, obtained via proper orthogonal decomposition, reduces dimensionality while retaining dominant modes. The model, identified from experimental data, accurately reproduces thermal evolution even with noise and missing data. Future work includes extending to vascular effects and generalizing across multiple experimental scenarios.

Nomenclature

T température
 P phase IRM
 \mathbf{Y} matrice de données thermiques
 Σ valeurs singulières
 \mathbf{V} coefficients temporels
 \mathbf{X} état réduit
 \mathbf{A}_r dynamique réduite
 \mathbf{B}_r entrée thermique
 u^n commande thermique
 \mathcal{D} matrice de régression
 \mathcal{H} états futurs
 \mathbf{O} paramètres identifiés
 D dérivée temporelle discrète
 B_0 champ IRM

T_E temps d'écho

Symboles grecs

Φ modes spatiaux
 Φ_r base réduite
 γ rapport gyromagnétique
 σ coefficient PRFS
 λ_u régularisation

Indices et dimensions

n indice temporel discret
 r dimension réduite
 N_v nombre de voxels
 N_t nombre d'images temporelles

1. Introduction

L'ablation thermique est une technique mini-invasive visant à détruire les tissus tumoraux par élévation contrôlée de la température [1, 2]. Son efficacité dépend d'un contrôle de la distribution de température afin de traiter la zone cible tout en limitant l'atteinte des tissus sains. Ce contrôle est rendu difficile par l'hétérogénéité des propriétés tissulaires, la complexité des mécanismes de transfert de chaleur et les incertitudes associées à l'énergie délivrée par l'applicateur [3]. La thermométrie par résonance magnétique est largement utilisée pour le suivi thermique en temps réel lors des procédures d'ablation [4, 5]. Elle fournit des mesures spatialement résolues, mais reste sensible au bruit, aux artefacts et aux zones où le signal est manquant ou peu fiable. Ces limitations réduisent sa capacité à décrire de manière complète le champ thermique tridimensionnel et compliquent son utilisation comme seule source d'information pour le guidage du traitement [6, 7].

La modélisation numérique du transfert de chaleur constitue une approche complémentaire pour estimer le champ thermique. Toutefois, le développement de modèles précis est contraint par l'absence d'informations complètes sur certains paramètres, en particulier l'évolution de la puissance appliquée, qui n'est pas toujours connue en pratique. De plus, pour prendre en compte la complexité du domaine traité, les modèles deviennent complexes et coûteux en temps de calcul, limitant leur utilisation dans un contexte de suivi en temps réel [8, 9]. Les modèles d'ordre réduit permettent de diminuer le coût de calcul en projetant la dynamique thermique dans un espace de dimension réduite [10]. Dans le contexte des problèmes inverses, leur utilisation se fait généralement soit dans des cas où la dynamique du système est connue et les paramètres d'entrée sont estimés [11, 12], soit dans d'autres cas où l'entrée est connue et la dynamique peut être déterminée [13, 14]. Dans ce travail, nous proposons d'estimer simultanément l'entrée thermique et la dynamique du système à partir de données expérimentales, permettant ainsi de reconstruire un modèle thermique entièrement guidé par les données et représenté sous forme d'équation en espace d'état.

Cette représentation est construite à partir de la décomposition orthogonale propre (POD) appliquée aux champs de température expérimentaux issues de la thermométrie par résonance magnétique. L'approche permet de réduire la dimensionnalité tout en conservant les modes dominants de la distribution thermique. Les opérateurs réduits et l'entrée thermique inconnue sont identifiés simultanément via une procédure d'optimisation alternée combinant régression aux moindres carrés et inversion régularisée. Le modèle obtenu reproduit fidèlement l'évolution spatio-temporelle du champ thermique, même en présence de bruit ou de données manquantes, et offre un coût de calcul considérablement réduit. Cette méthodologie ouvre également la voie à la généralisation du modèle à plusieurs scénarios expérimentaux et à l'inclusion d'effets vasculaires.

2. Méthodes

Cette section décrit le protocole expérimental, l'acquisition des données thermiques par imagerie par résonance magnétique, le prétraitement des données, ainsi que le cadre mathématique utilisé pour la modélisation et la reconstruction du champ de température tridimensionnel au cours d'une procédure d'ablation par micro-ondes. L'ensemble de la méthodologie est présenté pour un unique scénario expérimental réel, sans recours à une modélisation explicite des effets vasculaires, ceux-ci étant intégrés de manière effective dans la dynamique thermique observée.

2.1. Protocole expérimental

Les expériences d'ablation thermique ont été réalisées ex vivo sur un foie bovin à température ambiante. Le chauffage est assuré par un système de micro-ondes AveCure (MedWave, San Diego, États-Unis) équipé d'une antenne de 14 gauges, insérée percutanément sous guidage IRM. L'antenne est reliée à un générateur de micro-ondes placé hors de la cage de Faraday par un câble blindé afin de limiter les interférences électromagnétiques. La durée totale de l'ablation est de 7 minutes et 30 secondes, avec une température cible de 60 °C à proximité de l'antenne.

Les données de température sont acquises sur un système IRM clinique 1.5T (Magnetom Sola Fit, Siemens Healthineers) à l'aide d'une séquence écho-planar multi-coupes, orientée parallèlement à l'axe de l'antenne. Un volume composé de 13 coupes est acquis dynamiquement toutes les 4s, permettant le suivi temporel du champ thermique tridimensionnel pendant l'ensemble de l'expérience. Le champ de vue est de $300 \times 300 \text{ mm}^2$ pour une matrice de 128×128 , correspondant à une résolution spatiale de $2.34 \text{ mm} \times 2.34 \text{ mm}$ dans le plan. L'épaisseur de coupe est de 3 mm avec un espacement inter-coupes de 1.5 mm. Au total, 190 répétitions temporelles sont acquises, couvrant les phases de préchauffage, d'ablation et de refroidissement.

La thermométrie IRM repose sur la méthode *Proton Resonance Frequency Shift* (PRFS), qui permet d'estimer les variations de température à partir des variations de phase du signal IRM [16]. L'élévation de température $\Delta T(\mathbf{x}, t)$ est calculée voxel par voxel à partir de la différence entre une image de phase $P(\mathbf{x}, t)$ et une image de référence $P(\mathbf{x}, t_{\text{ref}})$ acquise avant le chauffage, selon :

$$\Delta T(\mathbf{x}, t) = \frac{P(\mathbf{x}, t) - P(\mathbf{x}, t_{\text{ref}})}{\sigma \gamma T_E B_0} \quad (1)$$

où γ est le rapport gyromagnétique du proton, $\sigma = -0.0094 \text{ ppm } ^\circ\text{C}^{-1}$ le coefficient PRFS, $B_0 = 1.5T$ le champ magnétique statique et T_E le temps d'écho de la séquence.

2.2. Réduction de dimension par décomposition orthogonale propre

À chaque instant discret t_n , le champ de température tridimensionnel est représenté sous forme vectorielle par

$$\mathbf{T}(t_n) \in \mathbb{R}^{N_v} \quad (2)$$

où $N_v = N_x N_y N_z$ correspond au nombre total de voxels du volume, avec $N_x = 128$, $N_y = 128$ et $N_z = 13$. En empilant les vecteurs de température pour l'ensemble des instants d'acquisition, on définit la matrice de données

$$\mathbf{Y} = [\mathbf{T}(t_1)\mathbf{T}(t_2)\cdots\mathbf{T}(t_{N_t})] \in \mathbb{R}^{N_v \times N_t} \quad (3)$$

où $N_t = 190$ est le nombre total d'images temporelles.

La réduction de dimension du champ thermique est réalisée par décomposition orthogonale propre, obtenue à partir de la décomposition en valeurs singulières de la matrice

$$\mathbf{Y} = \mathbf{\Phi}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T \quad (4)$$

où $\mathbf{\Phi} \in \mathbb{R}^{N_v \times N_v}$ contient les modes spatiaux orthonormés, $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{N_v \times N_t}$ est une matrice rectangulaire dont les $\min(N_v, N_t)$ premiers coefficients diagonaux correspondent aux valeurs singulières décroissantes (les autres étant nuls), et $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{N_t \times N_t}$ contient les modes temporels orthonormés.

Un sous-espace réduit de dimension $r \ll N_v$ est construit en ne conservant que les r premiers modes associés aux plus grandes valeurs singulières. Le champ de température est alors approximé par

$$\mathbf{Y}(t) \approx \Phi_r \mathbf{X}(t) \quad (5)$$

où $\Phi_r \in \mathbb{R}^{N_v \times r}$ est la base réduite et $\mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^r$ est le vecteur des coordonnées réduites.

2.3. Identification d'un modèle dynamique réduit

La dynamique temporelle des coefficients réduits est modélisée par un système linéaire discret de type état-espace

$$\mathbf{X}^{n+1} = \mathbf{A}_r \mathbf{X}^n + \mathbf{B}_r u^n \quad (6)$$

où $\mathbf{A}_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ est la matrice de dynamique interne, $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{r \times 1}$ est le vecteur d'influence de la source thermique, et u^n est une entrée scalaire inconnue représentant l'intensité effective du dépôt d'énergie micro-ondes. Dans le contexte de l'ablation thermique, l'entrée u^n est contrainte dans l'intervalle $[0, 1]$, où 0 correspond à l'absence de chauffage et 1 à l'activation maximale du dispositif de chauffage. À la première itération, \mathbf{u} est initialisé comme un vecteur constant de uns, ce qui correspond à supposer un chauffage maximal pendant toute la durée de l'acquisition. Cette initialisation permet de calculer une première estimation des matrices \mathbf{A}_r et \mathbf{B}_r , après quoi u^n sera itérativement affiné à mesure que la dynamique est mise à jour.

Le modèle discret d'état conduit à un problème de régression linéaire de la forme

$$\mathbf{X}^{n+1} \approx [\mathbf{X}^n \ u^n] \mathbf{O} \quad (7)$$

où $\mathbf{O} = [\mathbf{A}_r \ \mathbf{B}_r]^\top$.

On définit la matrice de données \mathcal{D} comme la matrice dont chaque ligne contient le vecteur d'état \mathbf{X}^n au temps n et l'entrée correspondante u^n . La matrice de sorties \mathcal{H} est formée des vecteurs d'état suivants \mathbf{X}^{n+1} pour chaque instant n .

Le système linéaire discret peut alors s'écrire de manière compacte :

$$\mathcal{D} \mathbf{O} \approx \mathcal{H} \quad (8)$$

admettant la solution en moindres carrés

$$\mathbf{O} = (\mathcal{D}^\top \mathcal{D})^{-1} \mathcal{D}^\top \mathcal{H}. \quad (9)$$

Cette expression fournit les estimations mises à jour de \mathbf{A}_r et \mathbf{B}_r à chaque itération, tandis que l'entrée u^n est raffinée dans un processus d'optimisation alternée.

Une fois \mathbf{A}_r et \mathbf{B}_r estimées, u^n est calculée en minimisant l'écart

$$\mathbf{X}^{n+1} - \mathbf{A}_r \mathbf{X}^n \approx \mathbf{B}_r u^n.$$

Étant donné que u^n est inconnu a priori mais borné, l'estimation est formulée comme un problème d'optimisation contraint :

$$\min_{0 \leq u \leq 1} \left\| \text{vec}(\mathbf{X}^{n+1} - \mathbf{A}_r \mathbf{X}^n) - (I \otimes \mathbf{B}_r) u \right\|_2^2 + \lambda_u \|Du\|_2^2, \quad (10)$$

où $\|\cdot\|_2$ est la norme Euclidienne, D est un opérateur dérivé discret qui impose la régularité temporelle, et $\lambda_u > 0$ contrôle le compromis entre fidélité aux données et lissage de u^n .

L'optimisation alternée se déroule selon les étapes suivantes :

1. Avec l'estimation actuelle de u^n , mettre à jour \mathbf{A}_r et \mathbf{B}_r via l'équation 9.
2. Avec \mathbf{A}_r et \mathbf{B}_r mises à jour, résoudre le problème de moindres carrés régularisé et contraint Eq. 10 pour actualiser u^n , en respectant $0 \leq u^n \leq 1$.
3. Répéter les étapes 1 et 2 jusqu'à convergence, mesurée par les variations relatives de \mathbf{A}_r , \mathbf{B}_r et u^n .

Cette optimisation alternée permet l'identification simultanée de la dynamique réduite et de l'entrée inconnue, produisant un profil de chauffage physiquement plausible, tout en intégrant le bruit et les effets de la réduction de modèle.

3. Résultats et Discussion

À partir des données expérimentales obtenues sur un foie bovin *ex vivo*, présentées à la Fig. 1(a), la méthodologie de réduction de modèle combinée à l'estimation simultanée de la dynamique et de l'entrée thermique a été appliquée. Cette approche conduit à l'identification d'un modèle d'ordre réduit, dont les champs de température reconstruits sont présentés à la Fig. 1(b).

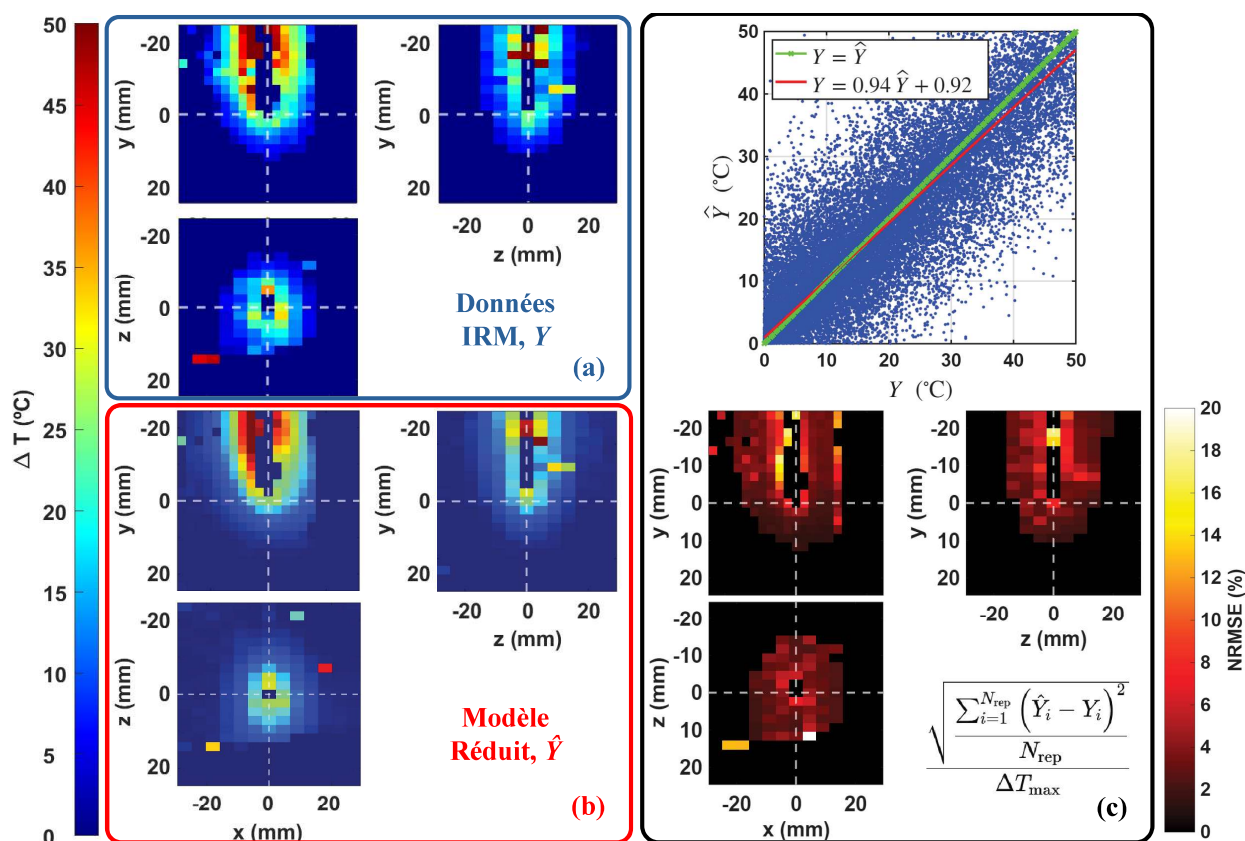


Figure 1 : (a) Champs de température expérimentaux obtenus par IRM lors d'une procédure d'ablation thermique sur foie bovin *ex vivo*. (b) Champs de température reconstruits à l'aide du modèle d'ordre réduit ($r=8$) identifié à partir des données expérimentales. (c) En haut : diagramme de dispersion entre les températures expérimentales et reconstruites. En bas : carte spatiale du NRMSE normalisé par l'élévation maximale de température.

Les résultats indiquent que la matrice dynamique réduite \mathbf{A} identifiée capture efficacement les modes dominants de l'évolution thermique, ce qui se traduit par une excellente reproduction

de la géométrie de l'ablation et des gradients thermiques macroscopiques. Toutefois, cette dynamique reste essentiellement descriptive : les coefficients de \mathbf{A} ne possèdent pas, dans l'état actuel, d'interprétation physique directe en termes de diffusion thermique, de perfusion ou de pertes thermiques effectives. En particulier, l'absence explicite de contraintes issues de la physique conduit à une dynamique qui s'adapte étroitement aux données disponibles.

La Fig. 1(c) (partie supérieure) présente le diagramme de dispersion entre les températures expérimentales, \mathbf{Y} , et celles reconstruites par le modèle, $\hat{\mathbf{Y}}$. Les indicateurs statistiques confirment une forte cohérence globale entre données et modèle, avec un coefficient de corrélation linéaire $r = 0,97$ et un coefficient de détermination $r^2 = 0,94$. Les coefficients de la régression linéaire indiquent aussi une bonne adéquation quantitative entre les champs reconstruits et les données expérimentales. La distribution quasi symétrique des résidus suggère en outre que le bruit de mesure n'introduit pas de biais systématique dans la reconstruction.

La Fig. 1(c) (partie inférieure) présente la carte spatiale du *Normalized Root Mean Square Error* (NRMSE), défini comme la racine de l'erreur quadratique moyenne entre \mathbf{Y} et $\hat{\mathbf{Y}}$, normalisée par l'élévation maximale de température observée ΔT_{\max} . Sur l'ensemble du domaine, le NRMSE reste inférieur à 20% de ΔT_{\max} , ce qui atteste de la bonne précision globale du modèle réduit, malgré la complexité du phénomène thermique et le bruit inhérent aux mesures IRM. L'analyse spatiale des erreurs met en évidence des zones ponctuelles de sensibilité accrue au bruit, en particulier à proximité de la source de chauffage, où les fluctuations des mesures IRM peuvent être interprétées comme une dynamique physique et induire des variations locales non physiques.

Une analyse locale est présentée à la Fig. 2. Un noyau spatial de 4×3 voxels, indiqué sur la carte supérieure droite, est utilisé pour comparer les évolutions temporelles de température. Les résultats montrent une excellente reproduction des dynamiques temporelles expérimentales, à l'exception des fluctuations liées au bruit de mesure, par exemple en $(-5, -5, 0)$ mm. Cette observation souligne une limite intrinsèque de l'approche guidée par les données : bien que la réduction de modèle induise un filtrage implicite, elle ne permet pas d'éliminer entièrement les effets du bruit. L'introduction de régularisations explicites ou de modèles de bruit plus réalistes apparaît ainsi comme une piste pertinente pour améliorer la robustesse de l'identification.

L'entrée thermique estimée u , également présentée à la Fig. 2 (coin inférieur droit), reproduit correctement les principales phases du protocole expérimental : le chauffage est actif pendant environ 7 min 30 s, précédé d'environ 2 min 30 s de mesures avant activation, ces durées étant déduites des variations de température observées. L'entrée estimée présente une tendance globale cohérente avec cette chronologie, bien que perturbée par le bruit et par les effets d'inertie liés à l'activation et à la désactivation du flux thermique. Par ailleurs, le décroissement progressif de u observé pendant la phase active suggère l'existence de mécanismes non modélisés. Cette tendance peut être associée soit à la régulation thermique interne de la sonde (cycles automatiques d'activation et de désactivation), soit à des effets thermiques cumulatifs tels que la modification des propriétés thermophysiques du tissu avec la température ou l'apparition de zones nécrosées modifiant la diffusion thermique.

Comparé aux modèles précédemment développés sur les mêmes données [17], le modèle actuel offre une amélioration significative en termes de précision géométrique et temporelle, ainsi qu'une meilleure cohérence globale avec les mesures expérimentales. Toutefois, cette amélioration s'accompagne d'une perte de capacité prédictive hors du domaine observé : le modèle reste strictement limité au maillage IRM et ne permet ni l'extrapolation vers des régions non mesurées, ni l'évaluation du champ thermique sur un maillage plus fin. Ainsi, dans sa confi-

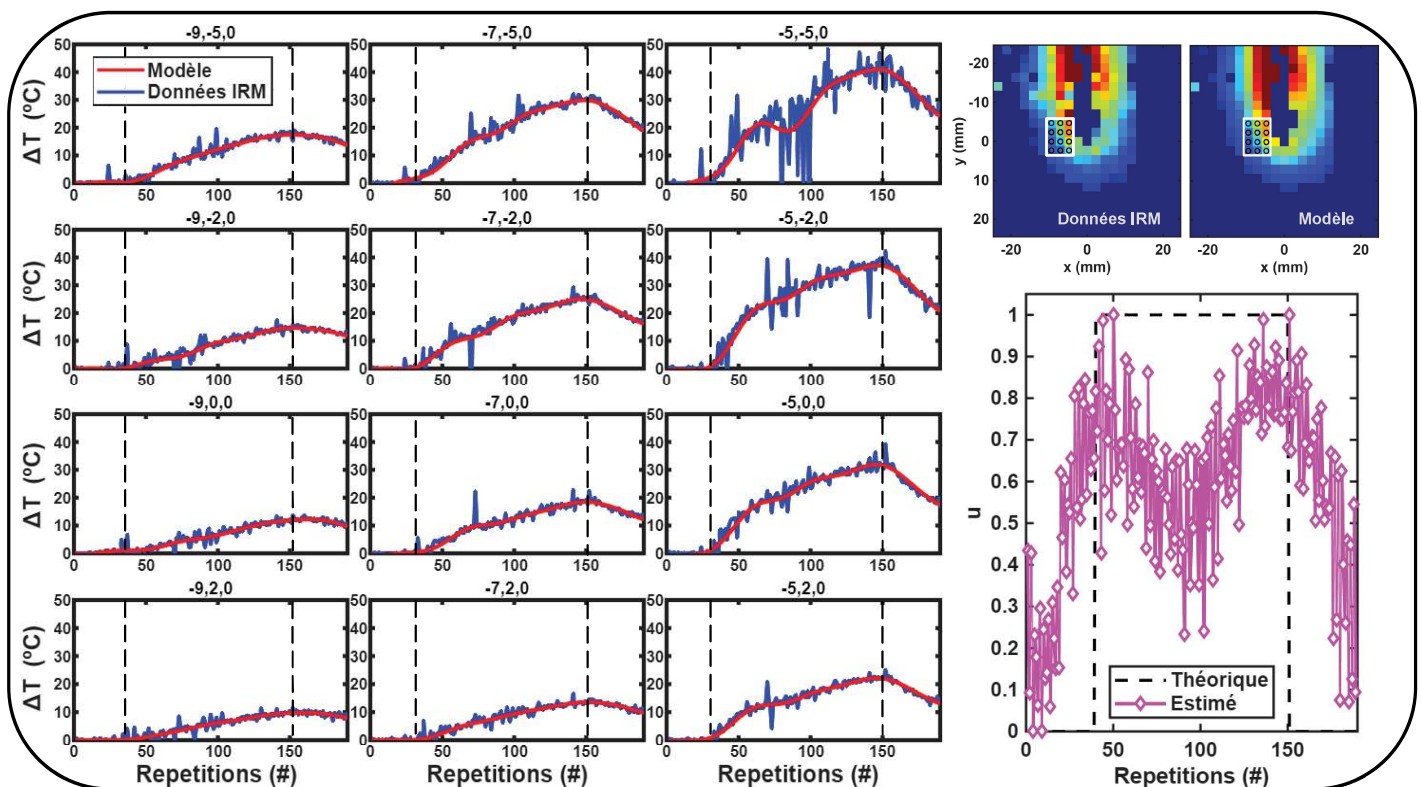


Figure 2 : Évolutions temporelles de la température expérimentale et reconstruite pour des voxels sélectionnés. À droite en haut : localisation des voxels. En bas : entrée thermique estimée u au cours de la procédure d'ablation.

guration actuelle, le modèle ne constitue pas un substitut aux modèles physiquement fondés pour la prédiction complète des champs thermiques, mais plutôt un outil efficace d'analyse et de reconstruction des données expérimentales disponibles.

L'un des résultats majeurs de cette étude réside dans le temps de calcul extrêmement réduit de l'ensemble de la procédure, inférieur à 0,2 s sur un processeur Intel® Core™ Ultra 5 135H (1,70 GHz) avec 16,0 Go de RAM, soit un ordre de grandeur bien inférieur au temps d'acquisition IRM d'environ 4 s par mesure. Cette performance ouvre la voie à une utilisation en ligne ou quasi temps réel, notamment pour le suivi et l'analyse rapide des procédures d'ablation.

Néanmoins, pour dépasser le stade de la preuve de concept, plusieurs extensions sont nécessaires. L'intégration de contraintes physiques dans l'identification permettrait de lever l'ambiguïté entre dynamique et entrée, tout en améliorant la robustesse face au bruit. De plus, l'introduction explicite d'effets vasculaires, modélisés par des opérateurs supplémentaires à identifier conjointement avec leurs localisations spatiales, constituerait une étape clé vers une représentation plus fidèle du processus thermique réel.

En résumé, les résultats démontrent que l'approche proposée est particulièrement efficace pour la reconstruction rapide et précise des dynamiques thermiques observées, mais mettent également en évidence la nécessité d'un enrichissement du modèle afin de renforcer son interprétabilité physique et sa capacité de généralisation.

4. Conclusion

Ce travail montre qu'un modèle réduit guidé par les données permet de reconstruire avec précision les champs de température spatio-temporels lors de procédures d'ablation thermique à partir de mesures IRM *ex vivo*. L'approche capture les modes thermiques dominants et reproduit efficacement la géométrie de l'ablation et les gradients de température macroscopiques, tout en offrant des temps de calcul très courts, compatibles avec une utilisation temps réel. Cependant, les opérateurs réduits manquent d'interprétation physique directe et le modèle reste sensible au bruit. Les travaux futurs viseront à intégrer des contraintes physiques, à modéliser les effets vasculaires et à améliorer la gestion du bruit pour renforcer la robustesse et la capacité prédictive du modèle.

Références

- [1] S. Sartori, P. Tombesi, F. Di Vece, Radiofrequency, microwave, and laser ablation of liver tumors : time to move toward a tailored ablation technique ?, *Hepatoma Research*, 1 (2015) 52.
- [2] A. Vogel, et al., Hepatocellular carcinoma : ESMO Clinical Practice Guidelines for diagnosis, treatment and follow-up, *Annals of Oncology*, 29 (2018) iv238–iv255.
- [3] K. F. Chu, D. E. Dupuy, Thermal ablation of tumours : biological mechanisms and advances in therapy, *Nature Reviews Cancer*, 14 (2014) 199–208.
- [4] V. Ozenne, et al., Improved cardiac magnetic resonance thermometry and dosimetry for monitoring lesion formation during catheter ablation, *Magnetic Resonance in Medicine*, 77 (2017) 673–683.
- [5] O. Öcal, et al., Predicting liver ablation volumes with real-time MRI thermometry, *JHEP Reports*, 6 (2024) 101199.
- [6] S. M. Munier, et al., Characterization of magnetic resonance thermal imaging signal artifact during magnetic resonance guided laser-induced thermal therapy, *Operative Neurosurgery*, 19 (2020) 619–624.
- [7] R. L. Vincelette, et al., Appearance and modeling of bubble artifacts in intracranial magnetic resonance-guided laser interstitial thermal therapy temperature images, *Magnetic Resonance Imaging*, 101 (2023) 67–75.
- [8] M. López-Aguirre, et al., Lesion 3D modeling in transcranial MR-guided focused ultrasound thalamotomy, *Magnetic Resonance Imaging*, 80 (2021) 71–80.
- [9] P. Voglreiter, et al., RFA guardian : comprehensive simulation of radiofrequency ablation treatment of liver tumors, *Scientific Reports*, 8 (2018) 787.
- [10] P. Siena, et al., On the accuracy and efficiency of reduced order models : Towards real-world applications, *Advances in Applied Mechanics*, 59 (2024) 245–288.
- [11] M. R. Pfaller, et al., Using parametric model order reduction for inverse analysis of large nonlinear cardiac simulations, *International Journal for Numerical Methods in Biomedical Engineering*, 36 (2020) e3320.
- [12] J. R. Shenefelt, et al., Solution to inverse heat conduction problems employing singular value decomposition and model-reduction, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 45 (2001) 67–74.
- [13] E. Qian, et al., Transform & Learn : A data-driven approach to nonlinear model reduction, *AIAA Paper*, (2019) 3707.
- [14] O. Ghattas, K. Willcox, Learning physics-based models from data : perspectives from inverse problems and model reduction, *Acta Numerica*, (2021) 445–554.
- [15] B. Peherstorfer, K. Willcox, Data-driven operator inference for nonintrusive projection-based model reduction, *Computational Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 306 (2016) 196–215.
- [16] H. Odeen, D. L. Parker, Magnetic resonance thermometry and its biological applications—Physical principles and practical considerations, *Progress in Nuclear Magnetic Resonance Spectroscopy*, (2019).
- [17] M. De Melo Antunes, et al., New analytical and hybrid heat transfer models for thermal ablation procedures validated by MRI thermometry, *International Journal of Hyperthermia*, 41 (2025) 2594943.

Remerciements

Les auteurs remercient le soutien financier du projet ANR-DFG SMART-HEAT (ANR-24-CE92-0073-01) ainsi que des agences de financement brésiliennes CAPES et CNPq.