Journée SFT du 8 Juin 2023

Groupe "Mesures thermiques et techniques inverses « (METTI)

Construction de modèles convolutifs transitoires ou paramétriques (ARX) pour une utilisation ultérieure directe ou inverse en thermique

Denis Maillet, Benjamin Rémy, Adrien Barthélemy
LEMTA (Université de Lorraine & CNRS , Nancy

denis.maillet@univ-lorraine.fr

Plan de l'exposé

- 1. **Modèle convolutif** transitoire générique en diffusion/advection thermique : conditions d'application, propriétés et expressions
- 2. Un modèle paramétrique: le **modèle ARX** (AutoRégressif à variable(s) Exogène(s))
- 3. liens entre modèles **ARX** et **convolutif**: choix du nombre de paramètres et reconstruction de la réponse impulsionnelle
- 4. Conclusions/perspectives

1.1 Rappel: Transformée de Laplace transform et Equation différentielle ordinaire Linéaire à coefficients Indépendants du Temps (LTI)

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a\,y = b\,u \ ; \ \ a \text{ et } b : \text{constantes} \\ y\,(t=\mathbf{0}) = y_{\mathbf{0}} \end{cases}$$

TRANSFORMATION DE LAPLACE : $\bar{y}\,(p) = \mathcal{L}\,[\,y\,(t)\,] = \int_0^\infty \exp\,(-\,p\,t)\;y\,(t)\;\mathrm{d}t$

variable de Laplace

Propriété 1 : $\mathcal{L}\left[\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right] = p\,\bar{y} - y_0$

$$\bar{y}\,(p) = \frac{b}{p+a}\,\bar{u}\,(p) + \frac{\mathbf{1}}{p+a}\,y_{\mathbf{0}} = \bar{y}_{\,forcé}\,(p) + \bar{y}_{\,relax}\,(p)$$

$$\bar{y}_{\,forced}\,(p) = \bar{h}\,(p)\;\bar{u}\,(p)$$

fonction de transfert

$$\bar{u}\,(p) \longrightarrow \boxed{\bar{h}\,(p)} \longrightarrow \bar{y}_{\,forcé}\,(p)$$

$$\overline{y}_{forced}\,(p) = \underbrace{\overline{h}}_{\text{fonction de transfert}}\,(p)\;\overline{u}\,(p)$$

$$\overline{u}\,(p) \longrightarrow \boxed{\overline{h}\,(p)} \longrightarrow \overline{y}_{forcé}\,(p)$$

Propriété 2 : $\mathcal{L}^{-1}\left[\,\overline{h}(p)\,\overline{u}\,(p)\,\right] = \underbrace{(h * u)\,(t)}_{\text{produit de convolution}} \equiv \int_0^t h(t-t')\,u(t')\,\mathrm{d}t' = \int_0^t h(t')\,u(t-t')\,\mathrm{d}t'$

$$\underbrace{y_{forced}}_{\substack{\text{Sortie}\\ \text{Réponse}\\ \text{(conséquence)}}}\,(t) = (\underbrace{h}_{\substack{\text{Réponse}\\ \text{impulsionnelle}}} * \underbrace{u}_{\substack{\text{Entrée}\\ \text{Excitation}\\ \text{(cause)}}})\,(t) = \int_0^t h(t-t')\,u(t')\,\mathrm{d}t'$$

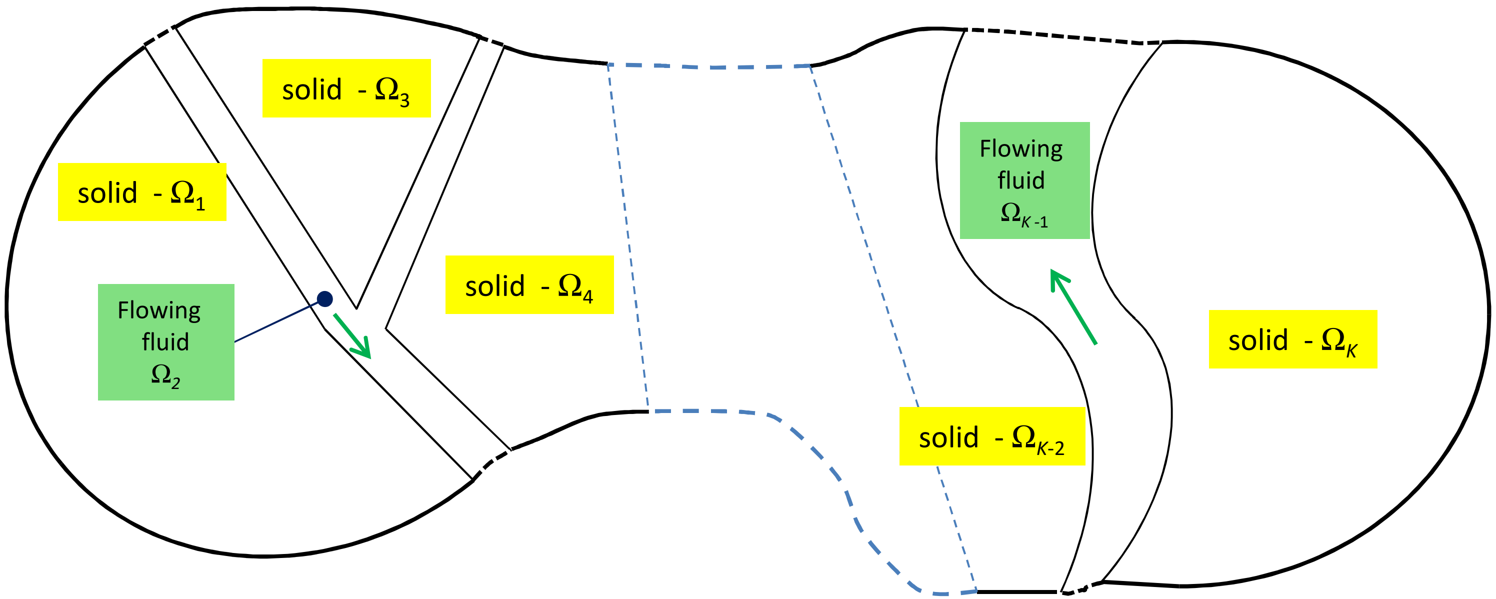
Ici, ***problème mathématique***:

Expression analytique de la réponse imulsionnelleof impulse response: $h\,(t) = b\exp(\,-a\,t)$

Expression analytique du terme de relaxation: $y_{relax}\,(t) = y_0\,\exp\,(-a\,t)$

1.2 Transformée de Laplace et transfert 3 D

Système physique multicomposant = K domaines solides ou fluides



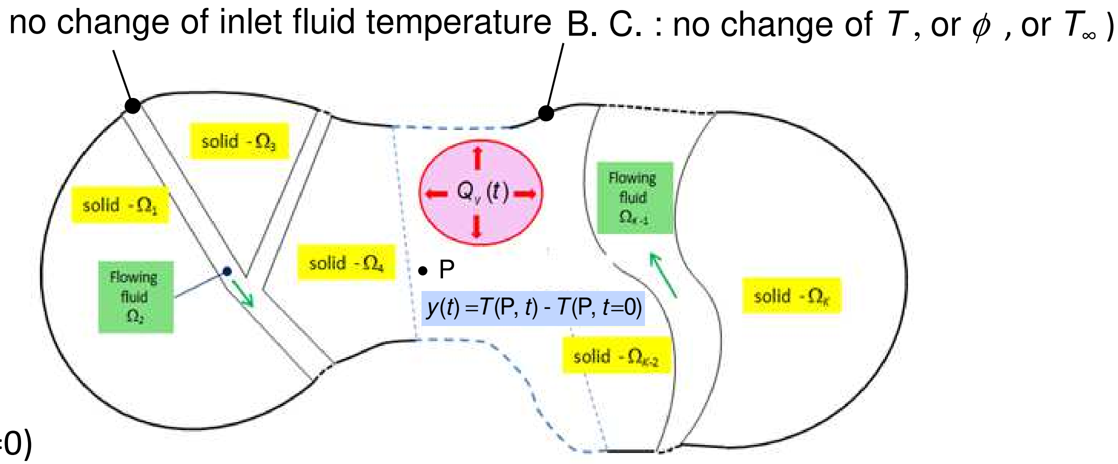
Hypothèses: **propriétés thermophysiques** et **champ des vitesses** **invariants en temps** *hypothèses :* - régime initial permanent + (éventuellement) multiplicité sources permanentes (puissances thermiques et/ou températures imposées) dont 1 excitation volumique d'intensité uniforme Q_v^{ss} sur une une portion du domaine

- à l'instant $t = 0^+$, on change Q_v^{ss} en $Q^{ss} + Q_v(t)$ (perturbation)

- pas de changement des autres sources, ni de T_∞ , ni des coeffs. échange externes, ni de(s) température(s) d'entrée des fluide(s) interne(s)

Variation température en tout point P ($t > 0$):

$$\theta\,(\mathrm{P}, t) = T\,(\mathrm{P}, t) - T_{init}\,(\mathrm{P})$$



Soustraction: E. chaleur ($t > 0$) – E chaleur ($t <=0$)

$$\underbrace{\boxed{\rho c(\mathrm{P})\frac{\partial\,\theta}{\partial\,t}(\mathrm{P},t)}}_{\text{Transient}} + \underbrace{\boxed{\rho c(\mathrm{P})\vec{u}\,(\mathrm{P})\,.\,\vec{\nabla}\theta(\mathrm{P},t)}}_{\text{Advection}} = \underbrace{\boxed{\vec{\nabla}\,.\,\left(\lambda(\mathrm{P})\,\vec{\nabla}\theta(\mathrm{P},t)\right)}}_{\text{Conduction}} + \underbrace{\boxed{\frac{f(\mathrm{P})}{V_{\text{source}}}\,Q_v\,(t)}}_{\text{Internal source}}$$

EDP + conditions limites: *Linéaires à coefficients Invariants en Temps (LTI)* + *source séparable* + *régime initial permanent*

Consequences : *Equation de la chaleur dans le domaine de* Laplace* (disparition dérivée temporelle)

$$\boxed{\rho c(\mathrm{P})\, p\bar{\theta}(\mathrm{P},p)} + \boxed{\rho c(\mathrm{P})\vec{u}(\mathrm{P}) . \vec{\nabla}\bar{\theta}(\mathrm{P},p)} = \boxed{\vec{\nabla} . \left(\lambda(\mathrm{P})\,\vec{\nabla}\bar{\theta}(\mathrm{P},p)\right)} + \boxed{\frac{f(\mathrm{P})}{V_{\text{source}}}\,\bar{Q}_v(p)}$$

Transient | Advection | Conduction | Internal source

entrée : $\bar{u}(p) \equiv \bar{Q}_v(p)$ $\Rightarrow$ solution = sortie $\bar{y}(\mathrm{P}, t)$ en température ou en densité de flux en tout point P

$$\bar{y}(\mathrm{P}, p) = \bar{h}(\mathrm{P}, p)\;\bar{u}(p)$$

proportionalité

ou produit convolution (en temps)

excitation

Réponse forcée

$$y(\mathrm{P}, t) = h(\mathrm{P}, t) * u(t) = \int_0^t h(\mathrm{P}, t-t')\,u(t')\,\mathrm{d}t'$$

Transient variation of excitation :

$u(t) = Q_v(t) - Q_v^{init}$ or $Q_s(t) - Q_s^{init}$

or $T_s(t)$ - T_s^{init} or $T_\infty(t)$ - T_∞^{init}

or $T_b^{in}(t)$ - $T_b^{in,init}$

Impulse response

$$\rightarrow \boxed{h(\mathrm{P}, t)} \rightarrow$$

« init »= initial steady state

Transient variation of temperature at point P :

$y(t) = T(\mathrm{P}, t)$ - $T_{init}(\mathrm{P})$

or variation of local heat flux $\phi_x(\mathrm{P}, t)$

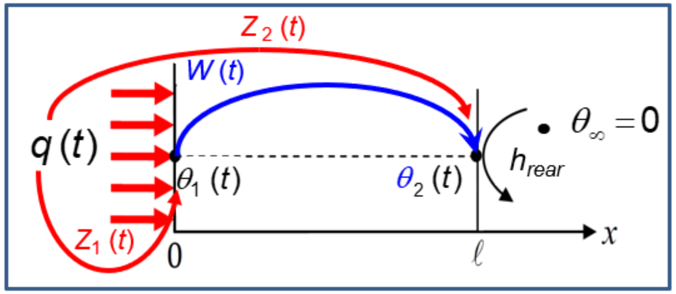
in any direction x

---

* W. Al Hadad, D. Maillet, Y. Jannot, Modeling unsteady diffusive and advective heat transfer for linear dynamical systems: A transfer function approach, International Journal of Heat and Mass Transfer 115 (2017) 304–313.

Excitation u	Response y	Transfer function H
Power source Q (watts)	Temperature difference θ (kelvins)	Impedance Z ($K.J^{-1}$)
Temperature difference θ (kelvins)	Temperature difference θ (kelvins)	Transmittance W (s^{-1})
Power source Q (watts)	Rate of heat flow Φ (watts)	Transmittance W (s^{-1})
Temperature difference θ (kelvins)	Rate of heat flow Φ (watts)	Admittance Y ($W.K^{-1}.s^{-1}$)

1.3 Ecriture d'unproduit de convolution discret (cas d'une transmittance paramétrisée)



$q\,(t)$: vraie source
$u\,(t) = \theta_1\,(t)$: pseudo-source = entrée
$y\,(t) = \theta_2\,(t)$: sortie

response transmittance unique pseudo source

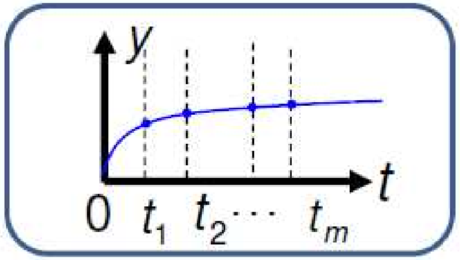
$$y(t) = (w * u)(t)$$

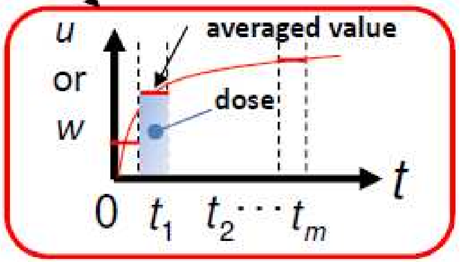
$$= \int_0^t u(t-t')\, w(t')\, dt'$$

$$y(t_i) \approx \Delta t \sum_{j=1}^{m} \tilde{u}_{i-j+1}\, \tilde{w}_j$$

sampled

Parameterization:
averaged over 1 time interval





Forme vectorielle/matricielle d'un produit de convolution discret

Introduction of a square matrix, function **N** (.) that depends on a column-vector $\boldsymbol{x}$:

N ($\boldsymbol{x}$) is a **Lower Triangular Toeplitz matrix (LTTM)**
(nice mathematical properties: set of LTTM = commutative ring*)

$$\mathbf{N}\,(\boldsymbol{x}) \equiv \begin{bmatrix} x_1 & & & & \\ x_2 & x_1 & & 0 & \\ x_3 & x_2 & x_1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ x_k & x_{k-1} & x_{k-2} & \cdots & x_1 \end{bmatrix}$$

Continuous time domain:

$$y\,(t) = (h * u)\,(t)$$

$$\Longleftrightarrow$$

Laplace domain :

$$\bar{y}\,(\mathrm{p}) = \bar{h}\,(p)\;\bar{u}\,(p)$$

Discrete vector form (numerical quadrature for each line) :

$$\boxed{\boldsymbol{y} = \mathbf{N}\,(\widehat{\boldsymbol{h}})\;\tilde{\boldsymbol{u}} = \mathbf{N}\,(\tilde{\boldsymbol{u}})\;\widehat{\boldsymbol{h}}}$$

$\boldsymbol{y}$: vector of **instant values** of output

$\tilde{\boldsymbol{u}}$: vector of **averaged values** of $u\,(t)$

$\widehat{\boldsymbol{h}}$: vector of **doses** of $h\,(t)$

* H. Dogan, K. A. Khalil, L. R. Suarez, Some results on the ideals of real-valued lower triangular Toeplitz matrices, Turk. J. Math. Comput. Sci.vol. 9, pp. 50–54, 2018

Matrices de **convolution M** (.)

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{x}) \equiv \mathbf{N}^2(\boldsymbol{f})\,\mathbf{N}(\boldsymbol{x})$$

avec $\boldsymbol{f} = \frac{1}{2}\left[1\ 1\ 0 \cdots 0\right]^T$

NB1 : $\mathbf{M}(\boldsymbol{x}) = \Delta t\ \mathbf{N}(\tilde{\tilde{\boldsymbol{x}}})$

avec $\tilde{\tilde{x}}_i = \frac{1}{4}\left(x(t_{i-2}) + 2\ x(t_{i-1}) + x(t_i)\right)$

NB2 : $(\mathbf{N}(\boldsymbol{f}))^{-1} = \mathbf{N}(\boldsymbol{f}^+)$

avec $\boldsymbol{f}^+ = 2\left[1\ \ -1\ \ 1\ \ -1\ \ \cdots\ \ (-1)^{m-1}\right]^T$

vecteur des moyennes par intervale : $\tilde{\boldsymbol{x}} = \mathbf{N}(\boldsymbol{x})$

vecteur des doses : $\hat{\boldsymbol{x}} = \Delta t\ \tilde{\boldsymbol{x}}$

$$\boxed{\boldsymbol{y} = \mathbf{M}(\boldsymbol{u})\ \boldsymbol{h} = \mathbf{M}(\boldsymbol{h})\ \boldsymbol{u}}$$

modèle pour identifier ***h***

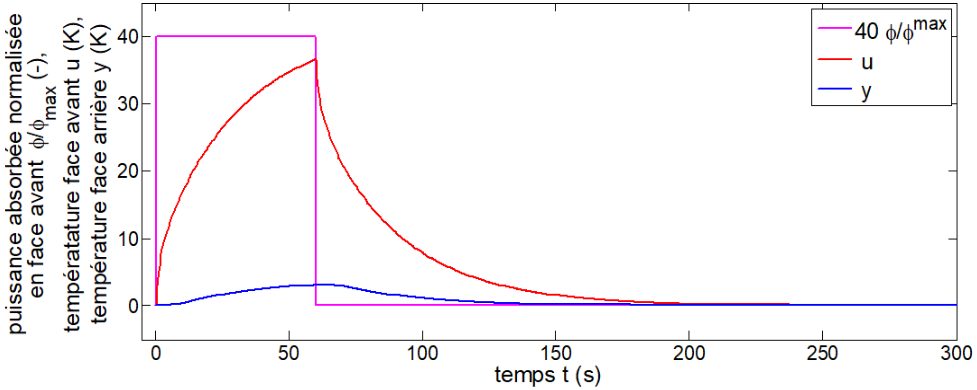
modèle pour estimer ***u***

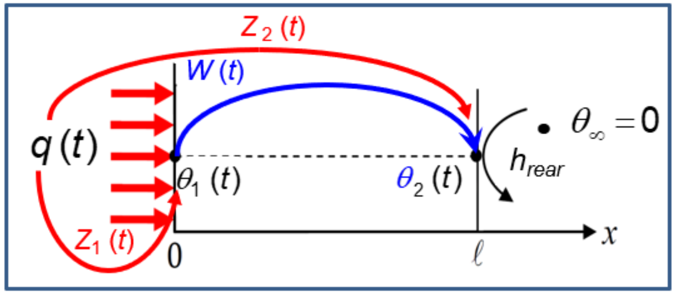
y : vector of **instant values** of output $y(t)$

u : vector of **instant values** of input $u(t)$

h : vector of **instant values** of impulse response $h(t)$

1.4 Identification d'une transmittance en 1D : plaque isolant léger & fortes pertes face arrière



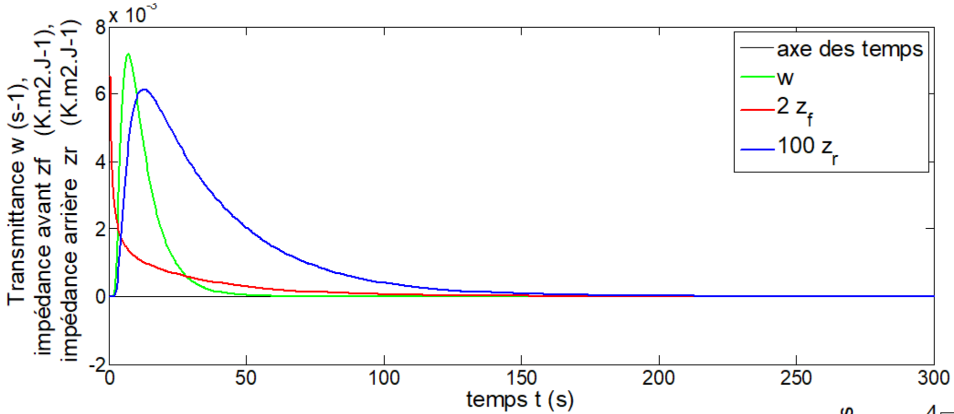


$q\,(t)$: vraie source

$u\,(t) = \theta_1\,(t)$: pseudo-source = entrée

$y\,(t) = \theta_2\,(t)$: sortie

Calcul direct en Laplace: quadripôles* (analytique + inversion numérique de Laplace (1000 temps)



cond ($\mathbf{M}$ ($\boldsymbol{u}$)) = 1.02 10^{23}

Ajout de bruit:

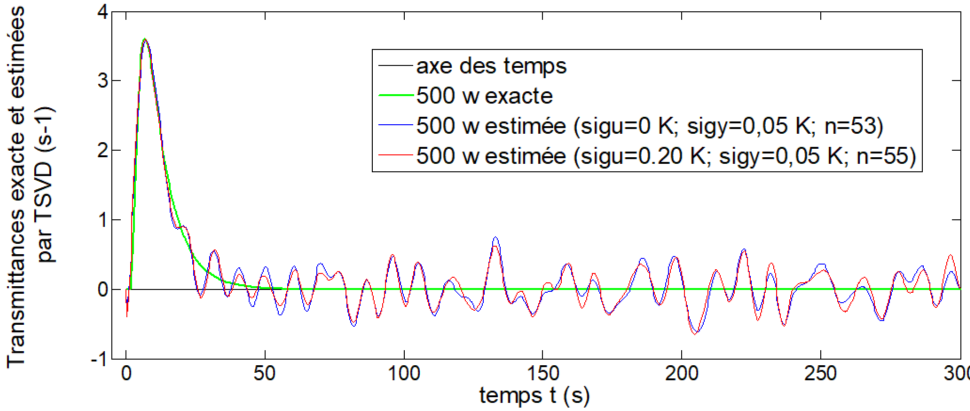
$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^{exact} + \boldsymbol{\varepsilon}_y$$

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{exact} + \boldsymbol{\varepsilon}_u$$

Régularisation par TSVD :

53 ou 55 valeurs singulières conservées

Résidus ≈ bruit sur sortie (Morozov)



* D. Maillet, S. André, J.C. Batsale, A. Degiovanni, C. Moyne, Thermal Quadrupoles – Solving the heat equation through integral transforms, Wiley, 2000

2. Modèles ARX

$$y_k = -\underbrace{\sum_{\substack{i=1 \\ i<k}}^{n_a} a_i \, y_{k-i}}_{\text{partie AutoRégressive}} + \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j\leq k}}^{n_b} b_j \, u_{k-j+1-n_r}}_{\text{partie eXogène}}$$

Modèle scalaire obtenu par pondération entre termes de relaxation et termes de forçage, en faisant glisser le temps initial*

4 étapes:

- Choix de l'ordre du modèle: *na*, *nb*, *nr* (retard)
- Calibrage = estimation des a_i et des b_j : moindres carrés ordinaires
- Calcul des résidus
- Validation en direct du jeu de coefficients sur une autre expérience

* D. Maillet, C. Zacharie, B. Rémy – Identification of an impulse response through a model of ARX structure – Journal of Physics: Conference Seriers – 2444 (2023) 01 2002 doi:10.1088/1742-6596/2444/1/012002

Sur **données exactes** (températures faces AV/AR de la plaque), sélection du meilleur jeu de *na, nb, nr* pour un jeu de paramètres entiers variant entre limites extrêmes, en minimisant le critère de Akaike:

$$AIC_c = m\ln\left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}(y_{mesure}[k]-y_{ARX}[k])^2\right)+2n+m[\ln(2\pi)+1]+\frac{2n(n+1)}{m-n-1}$$

Avec :

- m le nombre de mesures
- y_{mesure} la sortie « mesurée »
- y_{ARX} la sortie calculée par le modèle ARX (en mode « simulation »)
- n le nombre de paramètres ($n = n_a + n_b + 1$)

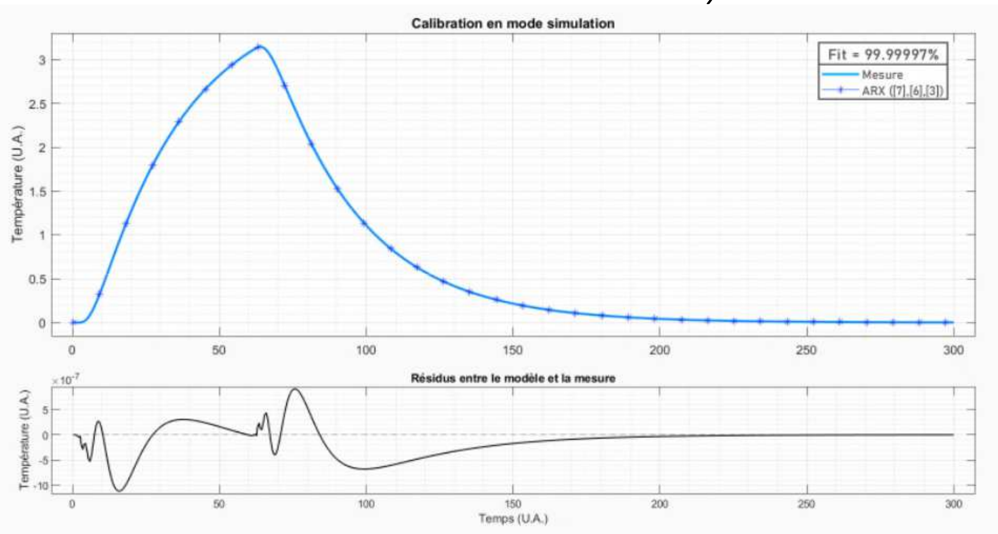
- Cas n°1 – $1 \leq n_a \leq 5$, $1 \leq n_b \leq 5$ et $n_r = 0$ (25 modèles ARX en compétition pour l'AICc)
- Cas n°2 – $1 \leq n_a \leq 5$, $1 \leq n_b \leq 5$ et $0 \leq n_r \leq 5$ (150 modèles ARX en compétition)
- Cas n°3 – $1 \leq n_a \leq 10$, $1 \leq n_b \leq 10$ et $n_r = 0$ (100 modèles ARX en compétition)
- Cas n°4 – $1 \leq n_a \leq 10$, $1 \leq n_b \leq 10$ et $0 \leq n_r \leq 10$ (1100 modèles ARX en compétition)

Résultats :

Cas	n_a	n_b	n_r	fit (%)
1	5	5	0	99.89886
2	5	5	4	99.99695
3	9	10	0	99.99954
4	7	6	3	99.99997

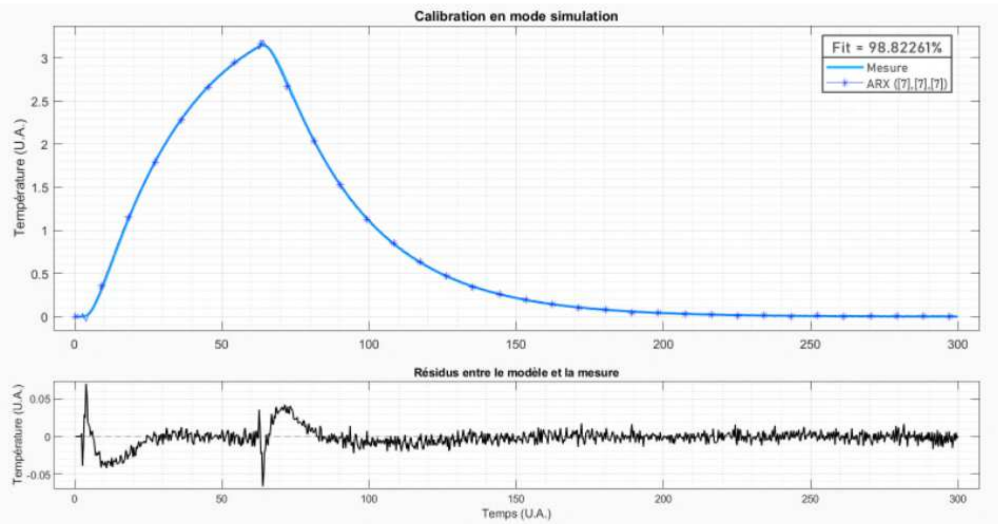
$$fit = \left(1 - \frac{\| \mathbf{y} - \mathbf{y}_{ARX}(\mathbf{a},\mathbf{b}) \|}{\| \mathbf{y} - \mathbf{y}_{average} \|}\right)$$

Sur **données exactes** (σ_u = 0 K, σ_y = 0 K)



Cas	n_a	n_b	n_r	fit (%)
1	5	5	0	99.89886
2	5	5	4	99.99695
3	9	10	0	99.99954
4	7	6	3	99.99997

Sur **données bruitées** (σ_u = 0.2 K, σ_y = 0.05 K)



Cas	n_a	n_b	n_r	fit (%) par rapport à y_{noise}	fit (%) par rapport à y_{exact}
1	4	5	0	94.32609	97.13266
2	4	5	5	94.39405	97.32243
3	4	10	0	94.57951	97.82692
4	7	7	7	94.86628	98.82261

3. Du modèles ARX au modèle convolutif

$$\boxed{\sum_{\substack{i=0 \\ i<k}}^{n_a} a_i \, y_{k-i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\le k}}^{n_b} b_j \, u_{k-j+1-n_r} \quad \text{où } a_0 = 1}$$

→ ressemble à un double produit de convolution discret

On complète les coefficients *a* et *b* par des zéros → vecteurs $\boldsymbol{a}_{\text{large}}$ et $\boldsymbol{b}_{\text{large}}$ (m x 1)

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{a}_{\text{large}})\,\boldsymbol{y}_{ARX} = \mathbf{N}(\boldsymbol{b}_{\text{large}})\,\boldsymbol{u}$$

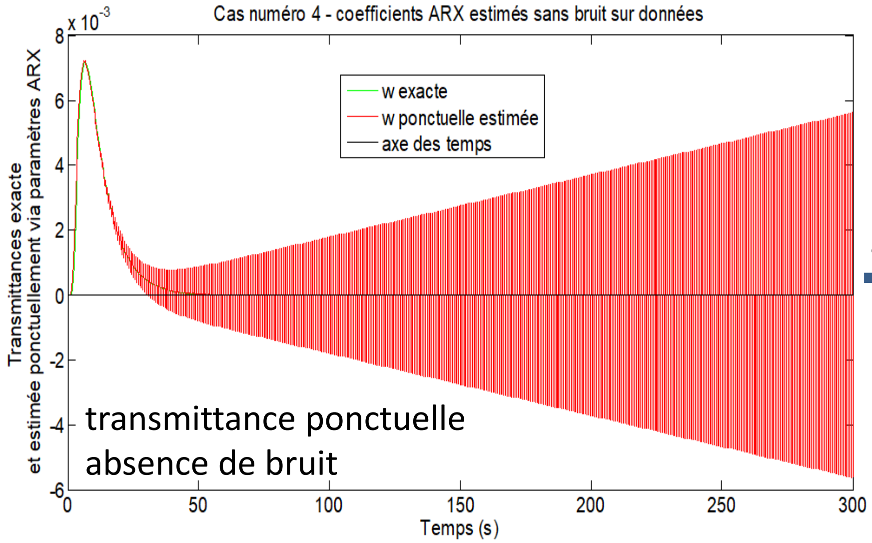
$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{y}_{ARX} = \left(\mathbf{N}(\boldsymbol{a}_{\text{large}})\right)^{-1}\mathbf{N}(\boldsymbol{b}_{\text{large}})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}$$

Rappel: $\boldsymbol{y}_{conv} = \Delta t \, \mathbf{N}^2(\boldsymbol{f}) \; \mathbf{N}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{u} = \mathbf{M}(\boldsymbol{w})\boldsymbol{u}$

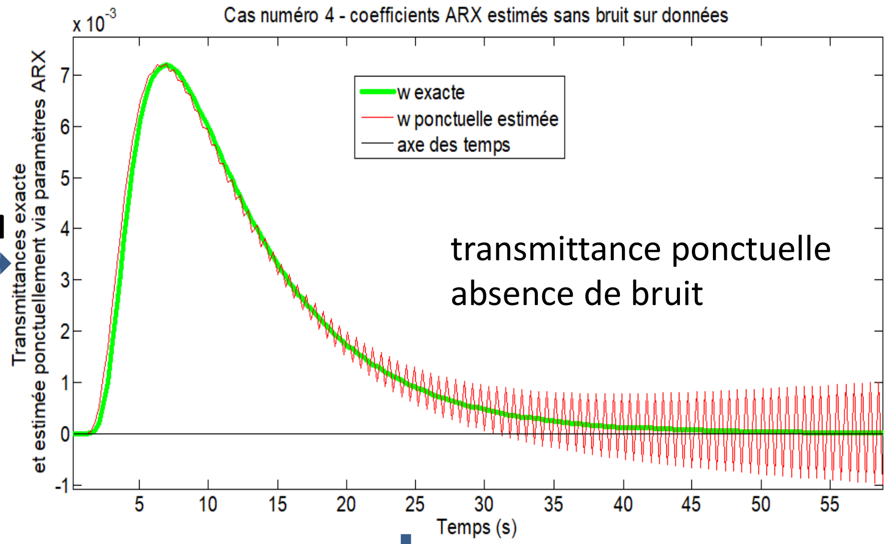
Identification: $\boldsymbol{y}_{conv} = \boldsymbol{y}_{ARX} \;\Rightarrow\; \mathbf{N}(\boldsymbol{w}) = \dfrac{1}{\Delta t}\mathbf{N}^2(\boldsymbol{f}^+)\,\boldsymbol{C}$

$\Rightarrow \boldsymbol{w}$ (valeurs échantillonnées de transmittance $w\,(t)$) = première colonne de $\dfrac{1}{\Delta t}\mathbf{N}^2(\boldsymbol{f}^+)\mathbf{N}^{-1}(\boldsymbol{a}_{\text{large}})\mathbf{N}(\boldsymbol{b}_{\text{large}})$

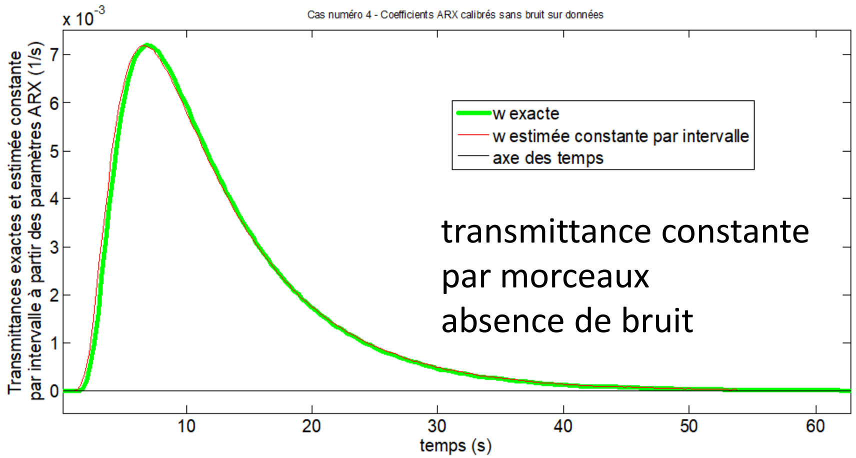
et $\tilde{\boldsymbol{w}} = \mathbf{N}(\boldsymbol{f})\boldsymbol{w}$ (valeurs moyennes par intervalle de $w\,(t)$) est égal à la première colonne de $\dfrac{1}{\Delta t}\mathbf{N}(\boldsymbol{f}^+)\mathbf{N}^{-1}(\boldsymbol{a}_{\text{large}})\mathbf{N}(\boldsymbol{b}_{\text{large}})$



ZOOM



$$\tilde{\boldsymbol{w}} = \mathbf{N}(\boldsymbol{f})\,\boldsymbol{w}$$

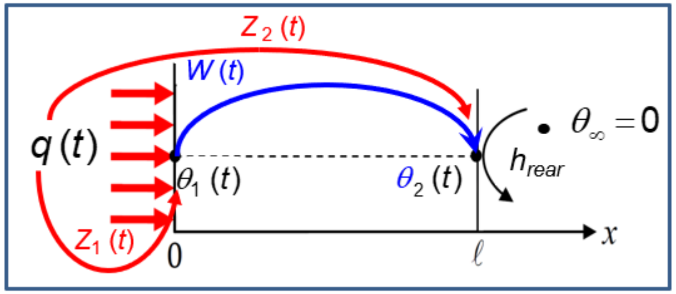


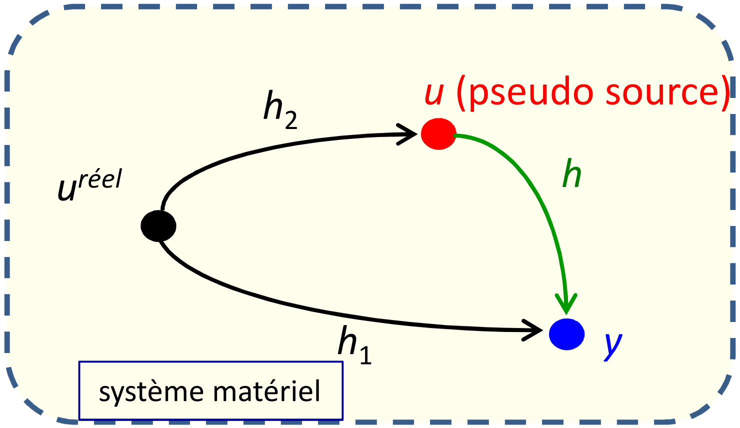
NB: La reconstruction de la transmittance ne fonctionne pas si les données u et y sont bruitées

Interprétation physique

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{M}(z_1)\,\boldsymbol{q}\ ;\quad \boldsymbol{u} = \mathbf{M}(z_2)\,\boldsymbol{q} \;\Rightarrow\; \mathbf{M}(z_2)\,\boldsymbol{y} = \mathbf{M}(z_1)\,\boldsymbol{u} \;\Leftrightarrow\; \boxed{z_2 * y = z_1 * u}$$

$$\mathbf{N}(\boldsymbol{a}_{\text{large}})\,\boldsymbol{y}_{ARX} = \mathbf{N}(\boldsymbol{b}_{\text{large}})\,\boldsymbol{u}$$





$q\,(t)$: source réelle
$\theta_1\,(t)$: pseudo source
$\theta_2\,(t)$: conséquence

4. Conclusions/perspectives

- Modèle convolutif générique universel en calcul direct (thermique instationnaire)
  si régime permanent initial, système LTI et excitation unique séparable
  mais identification de réponse impulsionnelle souvent difficile en inverse
  (algorithmes de régularisation: TSVD, Tikhonov, paramétrisation non isochrone*...)

- Résidus de calibration ARX faibles (cas avec ou sans bruit)
- Modèles ARX robustes en validation et utilisables en estimation de sources
- mais volatilité des paramètres *a* et *b* estimés
- lien modèle ARX/convolutif établi

- Perspectives : évaluer les écats types des *a* et *b* estimés lors de calibration

* D. Maillet, B. Rémy – Identification de la transmittance thermique transitoire d'un mur par déconvolution anisochrone – Congrès Français de Thermique 30 mai-2 juin 2023 - Reims