

## Chapitre 7

# LA CONVECTION MASSIQUE

*Rien n'est plus semblable à l'identique que ce qui est pareil à la même chose.*

Pierre DAC

La convection massique, basée sur la diffusion d'un fluide dans un autre, trouve de nombreuses applications dans les problèmes de séchage, d'évaporation ou de condensation, de mélange, ainsi qu'en électrochimie et dans certaines opérations de séparation par diffusion. Sa modélisation s'appuie sur le même cadre que la convection thermique, et le passage de l'une à l'autre ne comporte aucune difficulté, du moins dans les cas où il n'y a pas d'interférences avec un transfert de chaleur. Nous nous limiterons donc à en présenter les points essentiels.

### 7.1. - TRANSFERT PAR DIFFUSION

Comme dans la convection thermique, la convection massique est la superposition de deux mécanismes de transferts : transport dû au mouvement de la matière, et diffusion moléculaire.

Les phénomènes de diffusion pure constituent des exemples de transfert d'une grandeur extensive sans mouvement apparent à l'échelle macroscopique. Ils sont gouvernés par le gradient de densité volumique locale  $\left(\overrightarrow{\text{grad } C}\right)$  de la grandeur considérée, et par le coefficient de diffusion  $D$  caractéristique du phénomène et du milieu, sous la forme :

$$\vec{q}_s = -D \overrightarrow{\text{grad } C} \quad (7.1)$$

$\vec{q}_s$  étant la densité de flux locale de  $C$ .

En pratique, on rencontre trois grandes familles de transferts par diffusion (FEMM, Ch. 1) (auxquelles s'ajoute la diffusion en milieu poreux, qui constitue un cas particulier) :

- La diffusion de quantité de mouvement, due au phénomène de viscosité, et pour laquelle le coefficient  $D$  est la viscosité cinématique  $\nu$  du fluide. Elle est exprimée par le terme  $div(\overline{\nu grad \vec{V}})$  dans le bilan local de quantité de mouvement.

- La diffusion de chaleur, caractérisée par la diffusivité thermique du milieu, et représentée dans l'équation d'énergie par le terme  $div\left(a \overrightarrow{grad T}\right)$ .

- Enfin, la diffusion de masse, que l'on peut observer dans un mélange de plusieurs espèces pour lesquelles la concentration locale n'est pas uniforme. Une tendance à l'homogénéisation se manifeste alors par le biais d'une diffusion moléculaire réciproque des différentes espèces les unes au sein des autres. On trouve un exemple élémentaire de ce mécanisme dans tous les cours de thermodynamique : celui d'une enceinte contenant deux gaz différents séparés par une paroi amovible. Si on retire la paroi, on se retrouve au bout d'un certain temps avec un mélange parfaitement homogène qui résulte de la diffusion des deux gaz l'un dans l'autre, sans mouvement macroscopique d'ensemble.

Il existe donc une homologie très étroite entre diffusion thermique et diffusion massique, souvent appelée "*analogie chaleur-masse*", la concentration et la température jouant dans l'une ou dans l'autre un rôle similaire. En particulier, on pourra rencontrer de la *convection forcée massique* et de la *convection naturelle massique*, y compris dans des milieux isothermes.

Cette ressemblance formelle est mise à profit dans les méthodes de calcul et dans une technique expérimentale comme la méthode polarographique (§ 7.4).

## 7.2. - CONVECTION FORCÉE MASSIQUE

### 7.2.1. - Formulation du transfert convectif

- ♣ Dans un problème de convection forcée massique, le mouvement du fluide reste gouverné par la conservation de la masse totale et par le théorème des quantités de mouvement. Les équations fondamentales de bilan local pour ces deux grandeurs restent donc inchangées, à savoir, en considérant un mélange globalement isochore :

$$div \vec{V} = 0 \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overline{\overline{grad \vec{V}}} = -\frac{1}{\rho} \overrightarrow{grad p^*} + div(\overline{\nu grad \vec{V}}) \quad (7.3)$$

(pour les équations de bilan intégral, on se reportera à FEMM (1.31) et (1.64)).

Il en va de même avec le bilan d'énergie, traduit par l'équation :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = \text{div} \left( a \overrightarrow{\text{grad}} T \right) \quad (7.4)$$

- ◆ Prenons maintenant en compte le fait que notre fluide est un mélange de plusieurs espèces A, B, C, ..., et considérons par exemple l'espèce A. Sa masse volumique locale est  $\rho_A$  et son coefficient de diffusion (ou diffusivité moléculaire) dans le mélange est noté  $D_A$ .

Le bilan local de l'espèce A obéit à l'équation générale (FEMM, 1.29) :

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \text{div} \rho_A \vec{V} = q_{IA} - \text{div} \vec{q}_{SA} \quad (7.5)$$

où  $\vec{q}_{SA}$  est la densité de flux massique de A (en kg/m<sup>2</sup>.s) diffusée selon la loi de Fick :

$$\vec{q}_{SA} = -D_A \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A \quad (7.6)$$

la diffusivité moléculaire  $D_A$  s'exprimant en m<sup>2</sup>/s.

Si le mélange n'est pas réactif, la composition chimique ne change pas et le terme de source  $q_{IA}$  est nul. Le bilan de masse pour A s'écrit alors :

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \text{div} \rho_A \vec{V} = \text{div} \left( D_A \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A \right) \quad (7.7)$$

avec :

$$\text{div} \rho_A \vec{V} = \rho_A \text{div} \vec{V} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A$$

du fait que  $\text{div} \vec{V} = 0$ .

Il vient finalement :

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A = \text{div} \left( D_A \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A \right) \quad (7.8)$$

Avec un mélange de deux constituants A et B, la fermeture du système d'équations (7.2, 3 et 8) est assurée puisque la masse volumique locale de B est donnée par  $\rho_B = \rho - \rho_A$ . Dans le cas de trois constituants, il faut ajouter une autre équation de bilan pour l'espèce B et ainsi de suite.

- ♥ Lorsque la diffusion s'opère en phase gazeuse, il est plus commode de travailler avec la pression partielle de A, donnée par :

$$p_A = \rho_A r_A T \quad (7.9)$$

(où  $r_A = R/m_A$ ,  $R = 8,31 \text{ J/kg.K}$ ,  $m_A = \text{masse molaire de l'espèce A}$ ), de sorte que l'équation (7.8) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p_A}{T} \right) + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \frac{p_A}{T} = \text{div} \left( D_A \overrightarrow{\text{grad}} \frac{p_A}{T} \right) \quad (7.10a)$$

avec comme cas particulier la diffusion isotherme, telle que :

$$\frac{\partial p_A}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p_A = \text{div} \left( D_A \overrightarrow{\text{grad}} p_A \right) \quad (7.10b)$$

⚠ On voit ici que, en convection forcée anisotherme, la diffusion gazeuse introduit un couplage entre transfert de chaleur et transfert de masse.

♠ Notons enfin que la diffusivité moléculaire est généralement considérée comme une constante, ce qui permet d'écrire (7.8) plus simplement :

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A = D_A \Delta \rho_A \quad (7.11)$$

### 7.2.2. - Critères de similitude en convection massique

En ce qui concerne la notion de similitude et les équations adimensionnées, on retrouve avec la convection massique les mêmes concepts que pour la convection thermique. Les critères de similitude relatifs aux bilans de quantité de mouvement et d'énergie sont évidemment conservés.

Pour le bilan de masse, l'équivalent du nombre de Prandtl est le "*nombre de Schmidt*"  $Sc$  :

$$Sc = \frac{V}{D_A} \quad (7.12)$$

Contrairement au nombre de Prandtl, ce nombre de Schmidt n'est pas une caractéristique propre à un fluide particulier, mais une propriété du *mélange* considéré, puisque la diffusivité  $D_A$  dépend elle-même des corps A, B, ... en présence. Pour les gaz,  $Sc$  se situe grosso modo entre 0,2 et 2, et aux environs de  $5 \cdot 10^3$  à  $10^5$  dans les électrolytes.

Le critère de similitude relatif à la diffusion moléculaire a pour expression (FEMM, § 2.5) :

$$\Gamma_{AD} = \frac{I}{\Re Sc} = \frac{D_A}{V^0 L^0} \quad (7.13a)$$

Il est conforme à l'usage de le remplacer par un "*nombre de Péclet massique*"  $Pe_m$  :

$$Pe_m = \frac{V^0 L^0}{D_A} = \Re Sc \quad (7.13b)$$

D'autre part, la masse volumique adimensionnée  $\rho_A^+$  n'est autre que la *densité* de A dans le mélange :

$$\rho_A^+ = \frac{\rho_A}{\rho} \quad (7.14)$$

de sorte que l'équation (7.11) adimensionnée s'écrit (en régime permanent) :

$$\vec{V}^+ \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A^+ = \frac{l}{Pe_m} \Delta \rho_A^+ \quad (7.15)$$

⚠ Signalons au passage que dans plusieurs spécialités (comme l'électrochimie) on préfère remplacer la masse volumique  $\rho_A$  par la "concentration molaire"  $c_A$ , exprimée en mol/m<sup>3</sup> de mélange. Cela ne change absolument rien à l'ensemble de la démarche.

Enfin, les parois peuvent être le siège d'un flux de masse (évaporation à la surface d'un liquide, ou émission d'ions à la surface d'une électrode dans une solution d'électrolyte...). Soit  $q_{Ap}$  la densité de flux de masse de l'espèce A à la paroi (en kg/m<sup>2</sup>.s). Par analogie avec la définition du coefficient d'échange thermique  $h$ , on pose :

$$q_{Ap} = k (\rho_{Ap} - \rho_{A\infty}) \quad (7.16)$$

où  $\rho_{Ap}$  et  $\rho_{A\infty}$  sont respectivement les masses volumiques locales de A à la paroi et au loin. Cette relation définit un "coefficient de convection massique"  $k$  (encore appelé *vitesse de diffusion*) qui s'exprime en m/s.

L'équivalent du nombre de Stanton (FEMM, § 2.5.2) est alors le "nombre de Stanton massique"  $St_m$  (ou  $\Gamma_{Ap}$ ) :

$$St_m = \frac{q_{Ap}}{(\rho_{Ap} - \rho_{A\infty})V^0} = \frac{k}{V^0} \quad (7.17a)$$

Par analogie avec le nombre de Nusselt, on introduit souvent le "nombre de Sherwood"  $Sh$  :

$$Sh = \frac{k L^0}{D_A} \quad (7.17b)$$

de sorte que :

$$St_m = \frac{Sh}{\Re Sc} \quad (7.17c)$$

On remarquera bien l'homologie des équations et des conditions aux limites entre bilan d'énergie et bilan de masse. D'un point de vue pratique, on passe aisément de l'un à l'autre par les permutations suivantes :

$$\begin{aligned} a \rightarrow D_A ; T \rightarrow \rho_A ; \overrightarrow{\varphi}_p = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T \rightarrow \overrightarrow{q}_{Ap} = -D_A \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A \\ Pr \rightarrow Sc ; Pe \rightarrow Pe_m ; St \rightarrow St_m \end{aligned} \quad (7.18)$$

Tous les concepts et les calculs présentés pour la convection thermique se transposent donc immédiatement à la convection massique. Comme illustration de ceci, nous choisirons le modèle de couche limite.

### 7.2.3. - Couches limites de concentration

Pour raisonner sur un exemple simple et concret, reprenons le cas classique de la plaque plane, en supposant que la paroi est une électrode et le fluide un électrolyte. Le passage d'un courant électrique va conduire à une décomposition de l'électrolyte, entraînant l'apparition à la surface de l'électrode d'une espèce A constituée d'ions. La concentration de A est maximale au voisinage de la paroi et diminue lorsqu'on s'en éloigne, d'abord très rapidement puis de plus en plus lentement, à l'image de ce qui se passe pour la température lorsque l'écoulement est anisotherme.

Autrement dit, il se développe dans l'écoulement une "*couche limite de concentration*" analogue à la couche limite thermique, dont l'épaisseur  $\delta_c$  est définie de la même façon, par :

$$\frac{\rho_{Ap} - \rho_A(\delta_c)}{\rho_{Ap} - \rho_{A\infty}} = 0,99 \quad (7.19)$$

Les hypothèses de la couche limite de concentration sont également les mêmes que pour la vitesse et la température. Le système d'équations pour un écoulement de couche limite est alors le suivant, dans le cas général où on se trouve à la fois en présence de convection thermique et de convection massique (la dernière équation provenant de 7.11) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ U \frac{\partial \rho_A}{\partial x} + V \frac{\partial \rho_A}{\partial y} &= D_A \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (7.20)$$

En ce qui concerne les conditions aux limites pour l'espèce A, elles sont essentiellement du type " $\rho_{Ap}$  imposée" ou " $q_{Ap}$  imposé".

On voit que si la masse volumique  $\rho_A$  et la diffusivité  $D_A$  sont indépendantes de la température, il y a simple coexistence d'une convection thermique et d'une convection massique, sans couplage entre les deux phénomènes. Tous les calculs et les raisonnements conduits dans les chapitres 1 à 3 restent donc intégralement valables pour le champ de masse volumique  $\rho_A$ , sous réserve d'opérer les permutations (7.18). En particulier, on aura pour les épaisseurs de couches limites :

$$\frac{\delta}{\delta_T} = Pr^{1/3} \quad ; \quad \frac{\delta}{\delta_c} = Sc^{1/3}$$

d'où :

$$\frac{\delta_T}{\delta_c} = \left( \frac{Sc}{Pr} \right)^{1/3} \quad (7.21a)$$

Lorsqu'il s'agit de gaz, les épaisseurs de couche limite thermique et de couche limite de concentration sont du même ordre de grandeur. Par contre, avec les liquides,  $\delta_c$  est de 5 à 30 fois plus faible que  $\delta_T$ .

Enfin, signalons à toutes fins utiles la définition du "nombre de Lewis" :

$$Le = \frac{Sc}{Pr} = \frac{a}{D_A} \quad (7.21b)$$

## 7.3. - CONVECTION NATURELLE MASSIQUE

### 7.3.1. - Mécanisme

Nous avons vu que l'existence d'une convection massique est liée à la présence de gradients de masse volumique chez les différents constituants d'un mélange.

Cette inhomogénéité de composition se répercute en général, quoique faiblement, sur la masse volumique locale  $\rho$  du mélange. Les conséquences sont négligeables en convection forcée. Par contre, en l'absence d'un mouvement d'ensemble imposé par une source extérieure, la présence d'un gradient de masse volumique dans le champ de pesanteur conduit à un mouvement de convection naturelle, exactement comme lorsque la non-uniformité de  $\rho$  est due à des variations de température. On est alors en présence d'une convection naturelle massique : les zones de masse volumique plus faible ont tendance à monter tandis qu'un mouvement descendant s'installe là où  $\rho$  est plus grande. Point n'est besoin d'aller chercher des exemples très loin : tout le monde sait bien que lorsqu'on sert une menthe à l'eau, si le sirop de menthe est versé dans l'eau, sans brassage, il tend à s'accumuler naturellement au fond du verre (et c'est la même chose avec un blanc-cassis). Ajoutons que ce phénomène peut aussi donner naissance à des "panaches massiques", à l'image des panaches thermiques.

### 7.3.2. - Équations de la convection naturelle massique

En convection naturelle massique, l'équation de quantité de mouvement est, au départ, la même qu'en convection naturelle thermique, à savoir (5.7a) :

$$\vec{V} \cdot \overline{\text{grad}} \vec{V} = \frac{\rho - \rho_\infty}{\rho_\infty} \vec{g} - \frac{1}{\rho_\infty} \overline{\text{grad}} p^* + \nu \Delta \vec{V} \quad (7.22)$$

mais les variations de  $\rho$  sont dues non plus à des différences de température, mais à des différences de composition. Ici,  $\rho$  désigne la masse volumique locale du mélange, et  $\rho_\infty$  sa valeur de référence.

Considérons pour simplifier le cas le plus courant, où le mélange ne comporte que deux constituants A et B. Soient  $\rho_A$  la masse volumique locale de l'espèce A dans le mélange, et  $\rho_{A\infty}$  sa valeur de référence (loin d'une paroi).

La masse volumique du mélange est reliée à celle de l'espèce A par la relation :

$$\rho = \rho_\infty + \frac{\partial \rho}{\partial \rho_A} (\rho_A - \rho_{A\infty}) \quad (7.23a)$$

que nous écrivons plutôt :

$$\boxed{\frac{\rho - \rho_\infty}{\rho_\infty} = \alpha (\rho_A - \rho_{A\infty})} \quad (7.23b)$$

Cette formulation introduit un coefficient  $\alpha$  appelé "*coefficient de densification*", qui joue le même rôle que la dilatabilité  $\beta$  en convection thermique, et qui s'exprime en  $\text{m}^3/\text{kg}$  (ou en  $\text{m}^3/\text{mol}$ . si  $\rho_A$  est remplacé par la concentration molaire  $c_A$ , § 7.2.2). Sa valeur numérique dépend de la nature des espèces en présence, de  $\rho_{A\infty}$  ainsi que de la température.

Concernant la similitude, les équivalents de  $Gr$  et  $Bo$  seront pour l'espèce A :

- le nombre de Grashof massique :

$$Gr_A = \frac{g \alpha (\rho_A - \rho_{A\infty}) (L^0)^3}{\nu^2} \quad (7.24a)$$

- le nombre de Boussinesq massique :

$$Bo_A = \frac{g \alpha (\rho_A - \rho_{A\infty}) (L^0)^3}{a^2} \quad (7.24b)$$

On rencontre également des situations de *convection mixte massique*, dans lesquelles la convection gravitaire se superpose à un mouvement d'ensemble du fluide (Chapitre 6). Il y a lieu alors d'introduire :

- le nombre de Richardson massique :

$$Ri_A = \frac{g \alpha (\rho_A - \rho_{A\infty}) L^0}{(V^0)^2} \quad (7.25a)$$

- le coefficient de poussée massique :

$$Ri_A \mathfrak{R} = \frac{g \alpha (\rho_A - \rho_{A\infty}) (L^0)^2}{\nu V^0} \quad (7.25b)$$



Dans le cas d'un écoulement de couche limite sur une paroi plane verticale (cf. § 5.4.1 pour l'analogie avec la convection thermique) les équations s'écrivent, l'axe  $x$  étant maintenant dirigé vers le haut ( $\vec{g} = -g \vec{x}$ ) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= -g \alpha (\rho_A - \rho_{A\infty}) + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ U \frac{\partial \rho_A}{\partial x} + V \frac{\partial \rho_A}{\partial y} &= D_A \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (7.26)$$

Dans les applications, les méthodes et les résultats des chapitres 5 et 6 peuvent être transposés sans modification.

### 7.3.3. - Couplage avec la convection thermique

Le cas le plus général est constitué par la combinaison de la convection naturelle thermique et de la convection naturelle massique, et porte le nom de "*convection thermosolutale*". Alors, (7.23a) est remplacée par :

$$\rho = \rho_\infty + \frac{\partial \rho}{\partial \rho_A} (\rho_A - \rho_{A\infty}) + \frac{\partial \rho}{\partial T} (T - T_\infty) \quad (7.27a)$$

soit, compte tenu de (5.1c) et de (7.23b) :

$$\frac{\rho - \rho_\infty}{\rho_\infty} = \alpha (\rho_A - \rho_{A\infty}) - \beta (T - T_\infty) \quad (7.27b)$$

Ainsi, le système d'équations devient (toujours avec l'axe des  $x$  dirigé vers le haut) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= 0 \\ U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} &= -g \alpha (\rho_A - \rho_{A\infty}) + g \beta (T - T_\infty) + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \\ U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial y} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \\ U \frac{\partial \rho_A}{\partial x} + V \frac{\partial \rho_A}{\partial y} &= D_A \frac{\partial^2 \rho_A}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (7.28)$$

Nous sommes maintenant face à un couplage total entre champ de vitesse, champ de température et champ de concentration, aucun des trois ne pouvant être déterminé indépendamment des deux autres.

Pour la résolution, rien ne s'oppose à l'emploi de la méthode différentielle ou de la méthode semi-intégrale : on aura seulement un système de trois équations au lieu de deux. Toutefois, on peut aboutir à des situations complexes dans la mesure où la "poussée massique" et la "poussée thermique" sont, soit de même sens, soit de sens contraire. Si l'on se tourne vers la méthode différentielle, il conviendra donc d'utiliser la technique d'extension présentée dans le chapitre 6. Avec la méthode de Karman-Pohlhausen, des polynômes d'ordre 4 paraissent mieux adaptés pour s'ajuster correctement aux solutions.

## **7.4. - HOMOLOGIE CHALEUR-MASSE : PRINCIPE DE LA MÉTHODE POLAROGRAPHIQUE**

### **7.4.1. - Méthodologie**

L'homologie chaleur-masse, telle qu'elle ressort des équations (7.4) et (7.7), est à la base d'une technique expérimentale communément appelée "*méthode polarographique*" (ou encore méthode électrochimique).

L'idée consiste à remplacer les mesures thermiques par des mesures électriques, souvent moins difficiles et plus précises, en substituant au transfert de chaleur dans un fluide homogène le transfert de masse dans un électrolyte. Celui-ci est constitué d'un couple oxydo-réducteur en solution dans un liquide conducteur de l'électricité (généralement de l'eau) ; le transfert de masse est réalisé à partir d'électrodes placées sur la ou les parois. L'application d'une différence de potentiel entre les électrodes se traduit par l'apparition d'ions (espèce A) à la surface, et d'un courant électrique proportionnel au flux de masse  $q_{Ap}$  de A entre la paroi et le fluide.

Considérons donc un problème de convection thermique, dans lequel les mesures présentent des difficultés pratiques, et que l'on veut étudier en réalisant une maquette basée sur la convection massique.

### **7.4.2. - Estimation d'un coefficient d'échange thermique à partir de la mesure d'un coefficient d'échange massique**

- ♣ Pour utiliser valablement la méthode polarographique, il faut être capable de répondre à la question suivante : sachant que nous avons mesuré une valeur  $k$  du coefficient d'échange massique, quelle est la valeur du coefficient  $h$  dans la situation correspondante de convection thermique ?

Reprenons d'abord les équations adimensionnées du transfert de chaleur et du transfert de masse (elles peuvent aussi s'écrire avec les nombres de Stanton  $St$  et  $St_m$ , cf. Annexe 1.A.1) :

$$\vec{V}^+ \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T^+ = \frac{1}{Pe} \text{div} \left( \overrightarrow{\text{grad}} T^+ \right) \quad (7.29a)$$

$$\vec{V}^+ \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A^+ = \frac{1}{Pe_m} \text{div} \left( \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A^+ \right) \quad (7.29b)$$

◆ La première exigence de similitude porte évidemment sur la similitude géométrique et sur l'égalité des nombres de Reynolds. Considérons qu'elle est satisfaite et n'en parlons plus.

♥ Ensuite, en regardant nos deux équations, on voit bien que notre travail sera assez simple si nous pouvons réaliser la condition :

$$Pe = Pe_m$$

c'est à dire :

$$\Re Pr = \Re Sc \quad , \quad \text{soit : } Pr = Sc \quad (7.30)$$

car alors, avec la similitude des conditions aux limites, les solutions adimensionnées seront identiques pour les deux cas. En particulier, les nombres de Stanton thermique et massique (7.17a) seront aussi égaux, ce qui va nous donner :

$$\frac{h}{\rho C_p V^0} = \frac{k}{V_m^0} \quad (7.31)$$

où  $V_m^0$  désigne la vitesse de référence dans l'expérience de convection massique, tandis que  $\rho$  est bien entendu la masse volumique du fluide caloporteur.

La mesure de  $k$  donne donc immédiatement  $h$  :

$$h = \frac{k}{V_m^0} (\rho C_p V^0)_{\text{thermique}} \quad (7.32)$$

♠ Malheureusement, la condition  $Sc = Pr$  n'est presque jamais réalisable, un électrolyte très dilué ayant un nombre de Schmidt supérieur à  $10^3$ . Les nombres de Stanton  $St$  et  $St_m$  ne peuvent donc plus être égaux. La question est alors de connaître leur rapport, appelé "facteur d'analogie"  $F$  :

$$F = \frac{St}{St_m} \quad (7.33)$$

Ce facteur d'analogie peut être estimé, au moins dans certains cas, par une analyse théorique et / ou par des recoupements expérimentaux. A ce moment là, on peut déduire  $h$  de  $k$ , la relation (7.32) devenant :

$$h = F \frac{k}{V_m^0} (\rho C_p V^0)_{\text{thermique}} \quad (7.34)$$

En première approximation, on obtient  $F$  à mieux que 15% près en écrivant :

$$F \approx \left( \frac{Sc}{Pr} \right)^{2/3} \quad (7.35a)$$

Plus précisément, pour un écoulement de couche limite sur une paroi plane, le facteur d'analogie a pour expression :

$$F = 0,98 \left( \frac{Sc}{Pr} \right)^{2/3} \quad (7.35b)$$

et au voisinage d'un point d'arrêt :

$$F = 0,86 \frac{Sc^{2/3}}{Pr^{0,63}} \quad (7.35c)$$

Sous certaines conditions, la mesure de  $k$  permet également d'accéder au coefficient de frottement  $C_f$  [Lebouché, Martin, 1970, 1975].

---

## PROBLÈME

### PROBLÈME 7.1

#### Énoncé

La surface libre d'un récipient rempli d'eau est balayée par un courant d'air horizontal, de vitesse uniforme  $U_\infty = 3 \text{ m/s}$  (on admettra qu'elle est indéformable). Des mesures de pression partielle de la vapeur d'eau  $p_A$  à proximité immédiate de la surface et dans l'écoulement incident donnent les valeurs suivantes :

$$p_{Ap} = 0,10 \text{ bar} \quad ; \quad p_{A\infty} = 0,02 \text{ bar}$$

La diffusivité moléculaire de la vapeur d'eau dans l'air est estimée à :

$$D_A = 0,275 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 / \text{s}$$

L'eau est à une température uniforme  $T_p = 320 \text{ K}$ , et l'air à une température  $T_\infty = 298 \text{ K}$ . On admettra que les propriétés thermophysiques du mélange air-vapeur d'eau sont peu différentes de celles de l'air sec.

1 - Calculer le coefficient de convection thermique local  $h_L$  à une distance  $L = 15 \text{ cm}$  du bord d'attaque, et le coefficient moyen sur la longueur  $L$ .

2 - En considérant que  $p_{Ap}$  est indépendante de  $x$ , calculer le coefficient de convection massique  $k_L$  à l'abscisse  $L$  ainsi que sa valeur moyenne  $k$ .

3 - Calculer la densité de flux de masse  $q_{Ap}$  à l'abscisse  $x$  et en moyenne (on admettra pour simplifier une diffusion quasi-isotherme de la vapeur d'eau à la température de film).

4 - Evaluer la densité de flux de chaleur totale transférée de l'eau vers l'air (en moyenne sur la distance  $L$ ).

### Solution

1 - D'après (1.35), sur une paroi isotherme, le nombre de Stanton à l'abscisse  $x$  a pour expression :

$$St_x = \frac{1}{3} \Re_x^{-1/2} Pr^{-2/3}$$

Compte tenu des indications de l'énoncé, on prend  $Pr \approx 0,7$  (air sec).

Calculons  $\Re_L$  à la température de film  $T_F = 309 \text{ K}$  (formule 1.72c), soit avec  $\nu = 1,67 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}$  et  $L = 0,15 \text{ m}$  :

$$\Re_L = \frac{3 \times 0,15}{1,67 \times 10^{-5}} = 2,7 \cdot 10^4$$

ce qui correspond bien à un écoulement laminaire. Donc :

$$St_L = \frac{1}{3} (2,7 \cdot 10^4)^{-1/2} \times (0,7)^{-2/3}$$

$$St_L = 2,56 \cdot 10^{-3}$$

d'où le coefficient d'échange (avec  $\rho \approx 1,14 \text{ kg} / \text{m}^3$  à  $309 \text{ K}$ ) :

$$h_L = St_L \rho C_p U_\infty = 2,56 \cdot 10^{-3} \times 1,14 \times 1006 \times 3$$

$$h_L = 8,8 \text{ W} / \text{m}^2 \cdot \text{K}$$

Sur la longueur  $L$ , le coefficient moyen vaut :  $h = 2h_L$  (formules 1.34 et 1.36) :

$$h = 17,6 \text{ W} / \text{m}^2 \cdot \text{K}$$

2 - Si  $p_{Ap} = cte$ , nous pouvons transposer la formule (1.35) selon les règles (7.18) :

$$St_{mx} = \frac{1}{3} \Re_x^{-1/2} Sc^{-2/3}$$

En ce qui concerne le nombre de Schmidt :

$$Sc = \frac{\nu}{D_A} = \frac{1,67 \cdot 10^{-5}}{0,275 \cdot 10^{-4}} \approx 0,61$$

A l'abscisse  $x = L$  :  $\Re_L = 2,7 \cdot 10^4$ . D'où :

$$St_{mL} = \frac{1}{3} (2,7 \cdot 10^4)^{-1/2} \times (0,61)^{-2/3}$$

$$\underline{St_{mL} = 2,77.10^{-3}}$$

et aussi (formule (7.17a) :

$$St_{mL} = \frac{k_L}{V^0} = \frac{k_L}{U_\infty}$$

On en déduit le coefficient de convection massique :

$$k_L = St_{mL} U_\infty = 2,77.10^{-3} \times 3$$

$$\underline{k_L = 8,3.10^{-3} \text{ m/s}}$$

ainsi que sa valeur moyenne  $k = 2k_L$  (comme pour  $h$ ) :

$$\underline{k = 16,6.10^{-3} \text{ m/s}}$$

3 - D'après la définition (7.16) de  $k$ , le flux de masse s'écrit :

$$q_{Ap} = k (\rho_{Ap} - \rho_{A\infty})$$

Dans le cas des gaz (relation 7.9), on a :

$$\rho_A = \frac{p_A}{r_A T}$$

avec  $r_A = R/m_A$ ,  $R = 8,31 \text{ J/kg.K}$  et  $m_A = 18 \text{ g/mol} = 18.10^{-3} \text{ kg/mol}$ .  
(masse molaire de l'eau).

L'énoncé nous dit de prendre  $T = T_F$  (calculée à la question 1). Donc, à l'abscisse  $L$  :

$$q_{ApL} = k_L \frac{m_A}{R T_F} (p_{Ap} - p_{A\infty})$$

$$p_{Ap} = 0,10 \text{ bar} = 10^4 \text{ Pa} \quad \text{et} \quad p_{A\infty} = 0,02 \text{ bar} = 2.10^3 \text{ Pa}$$

$$q_{ApL} = 8,3.10^{-3} \times \frac{18.10^{-3}}{8,31 \times 309} \times (10^4 - 2.10^3)$$

$$\underline{q_{ApL} = 0,465.10^{-3} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}}$$

En moyenne, puisque  $p_{Ap} = cte$ ,  $q_{Ap}$  obéit à la même loi que  $h$  et  $k$ , d'où :

$$q_{Ap} = 2 \times 0,465.10^{-3} = 0,93.10^{-3} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$$

4 - Le flux total est la somme du flux de chaleur sensible et du flux de chaleur latente (pour  $L_V$ , voir § 0.8).

$$\varphi_{pt} = h(T_p - T_\infty) + q_{Ap} L_V$$

$$\varphi_{pt} = 17,6 \times (320 - 298) + 0,93.10^{-3} \times 2250$$

$$\underline{\varphi_{pt} = 387 + 2092 \approx 2479 \text{ W/m}^2}$$

On voit que la chaleur transférée par convection thermique est faible par rapport à la chaleur transférée par évaporation et convection massique.