

Chapitre 4

CONVECTION DANS LES FLUIDES COMPLEXES

Il vaut mieux un qui sait que cent qui cherchent.

Proverbe auvergnat

4.1. - PRÉSENTATION GÉNÉRALE

4.1.1. - Fluides newtoniens et fluides complexes

Nous avons déjà eu plusieurs fois l'occasion de souligner que le comportement mécanique du fluide a une influence majeure sur le champ de température dans un écoulement anisotherme. Toute modification des propriétés rhéologiques se répercute donc sur les transferts thermiques par convection.

La seule modification que nous avons envisagée jusqu'à présent concerne la thermodépendance du fluide. Mais on rencontre aussi des différences plus profondes puisqu'elles portent sur la loi de comportement, qui se distingue de la loi linéaire des fluides newtoniens. Les fluides concernés sont des liquides appelés "non-newtoniens" ou complexes.

On se trouve alors en présence de milieux où les contraintes de cisaillement ne sont plus proportionnelles aux taux de déformation, et qui sont de surcroît souvent fortement thermodépendants. Pour des conditions aux limites identiques, les profils de vitesse et de température ne seront donc plus les mêmes que dans un écoulement de fluide newtonien. Leur altération peut être très importante et affecter considérablement le frottement et le flux de chaleur au niveau des parois, d'autant plus que la viscosité des liquides complexes est généralement élevée, ce qui impose de prendre en compte la fonction de dissipation.

Ces propriétés non-newtoniennes concernent un grand nombre de produits traités couramment en génie des procédés, dans les industries agricoles,

alimentaires et même biomédicales (les fluides biologiques tels que le plasma sanguin sont non-newtoniens), pour lesquelles une meilleure maîtrise des conditions de température et d'écoulement est devenue indispensable, particulièrement dans les échangeurs où circulent ces produits.

Il est toutefois bien difficile de présenter des résultats généraux compte tenu de la multiplicité des paramètres à prendre en compte, de sorte que les informations disponibles concernant le coefficient de frottement et le nombre de Stanton sont naturellement fragmentaires et relatives à des cas particuliers.

4.1.2. - Rappels de rhéologie

Pour introduire efficacement les lois de comportement des fluides complexes, il est nécessaire de revenir rapidement sur les notions essentielles de rhéologie (FEMM, 1.2).

- ♣ Considérons un fluide en écoulement, caractérisé par un champ de vitesse $\vec{V}(M,t)$. On définit en chaque point M un tenseur des taux de déformation $\overline{\overline{D}}$ dont les composantes ε_{ij} ont pour expression :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.1)$$

Les indices i, j désignent les axes de coordonnées $(1,2,3)$ ou (x,y,z) , et V_i, V_j les composantes de $\vec{V}(M,t)$ selon ces directions.

Les grandeurs de la forme $\partial V_i / \partial x_j$ sont les gradients du champ des vitesses, encore appelés improprement "vitesses de déformation".

D'autre part, la contrainte locale \vec{T} , c'est à dire la force appliquée au sein du milieu sur un élément de surface unité, s'écrit :

$$\vec{T} = \overline{\overline{T}} \cdot \vec{n} \quad (4.2)$$

$\overline{\overline{T}}$ étant le tenseur des contraintes, de composantes σ_{ij} .

Dans un fluide isochore tel qu'un liquide, la liaison entre contraintes et déformations est exprimée par la relation :

$$\overline{\overline{T}} = -p \overline{\overline{I}} + \overline{\overline{\tau}} \quad (4.3)$$

où p est la pression (scalaire > 0), $\overline{\overline{I}}$ la matrice unité, et $\overline{\overline{\tau}}$ le tenseur des contraintes de viscosité, qui a pour composantes τ_{ij} .

- ◆ Si le fluide est *newtonien*, la relation entre contraintes de viscosité et déformations est linéaire, de la forme :

$$\overline{\overline{\tau}} = 2\mu \overline{\overline{D}} \quad (4.4a)$$

où le facteur de proportionnalité μ est une caractéristique du fluide, appelée "viscosité dynamique". On a donc, en revenant aux composantes de $\overline{\tau}$ et \overline{D} :

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} = \mu \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.4b)$$

♥ Avec les fluides *non-newtoniens* ou *complexes*, la loi (4.4) est mise en défaut, τ_{ij} n'étant plus proportionnelle à ε_{ij} .

S'agissant d'écoulements en canalisations, le terme dominant dans les gradients de vitesse est $\partial U / \partial y$ (ou $\partial U / \partial r$). Le taux de déformation correspondant ε_{xy} est noté simplement ε :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (4.5a)$$

ou encore, pour adopter une écriture plus compacte :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \dot{\gamma} \quad \text{avec} \quad \dot{\gamma} = \frac{\partial U}{\partial y} \quad (4.5b)$$

De même, la contrainte de cisaillement τ_{xy} est désignée simplement par τ :

$$\tau_{xy} \equiv \tau \quad (4.5c)$$

La forme la plus générale de la relation entre contraintes et déformations est alors :

$$\tau = f \left(U, \frac{\partial U}{\partial y}, t \right) \quad (4.6)$$

Nous verrons que différentes catégories de fluides complexes peuvent être distinguées selon la forme de la fonction f . Mais la principale conséquence du passage de (4.4) à (4.6) est que la notion de viscosité va perdre en partie son sens physique puisque μ ne sera plus une propriété intrinsèque du fluide. Elle n'aura en général qu'un rôle formel, un peu comparable à celui de la viscosité turbulente.

♠ En ce qui concerne les équations de bilans, leur écriture sera adaptée à la situation, et fera seulement apparaître la contrainte τ .

Cela ne concerne pas l'équation de continuité, qui reste :

$$\text{div } \vec{V} = 0$$

Pour l'équation de quantité de mouvement, on partira des relations établies dans FEMM (1.32, 1.33 et 1.38) qui permettent d'écrire :

$$\frac{\partial (\rho \vec{V})}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \overline{\text{grad}} \vec{V} = -\rho \vec{g} + \text{div } \overline{\overline{T}} \quad (4.7)$$

Les composantes du vecteur $\text{div } \overline{\overline{T}}$ ont comme expression, en coordonnées cartésiennes bidimensionnelles :

$$\left(\text{div } \overline{\overline{T}} \right)_k = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (4.8)$$

Selon la direction x , et compte tenu des spécifications (4.5), l'équation (4.7) devient :

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho V \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \quad (4.9a)$$

où, en coordonnées axisymétriques :

$$\frac{\partial(\rho U)}{\partial t} + \rho U \frac{\partial U}{\partial x} + \rho V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r\tau)}{\partial r} \quad (4.9b)$$

Quant à l'équation d'énergie, elle n'est impliquée que si l'on tient compte de la fonction de dissipation Φ (FEMM, 1.42) (situation fréquente avec les liquides complexes) :

$$\Phi = \sum_{i,j} \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (4.10)$$

ce qui donne, en coordonnées cartésiennes :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p U \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_p V \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \tau \frac{\partial U}{\partial y} \quad (4.11a)$$

et en coordonnées axisymétriques :

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_p U \frac{\partial T}{\partial x} + \rho C_p V \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\lambda r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \tau \frac{\partial U}{\partial r} \quad (4.11b)$$

4.2. - COMPORTEMENT DÉPENDANT DE LA CONTRAINTE APPLIQUÉE

4.2.1. - Fluides sans contrainte critique

4.2.1.1. - LOI D'OSTWALD

Les fluides sans contrainte critique ont ceci de commun avec les fluides newtoniens que $\tau \rightarrow 0$ quand $\partial U / \partial y \rightarrow 0$, mais la loi d'évolution n'est plus linéaire.

Pour décrire leur comportement, qui est fonction de la contrainte appliquée, on utilise assez généralement la loi empirique d'Ostwald, qui est une loi en puissance :

$$\tau = K \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^n \quad (4.12)$$

Le paramètre K est appelé *consistance* du fluide, et l'exposant n *indice de structure* (ou *indice d'écoulement*).

L'explication physique de cette relation est que l'application d'une contrainte entraîne une organisation de l'écoulement, mais avec des mécanismes assez différents selon la nature du fluide considéré.

Malgré sa relative simplicité, la loi (4.12) n'est pas idéale du fait que la consistance K n'a aucun sens physique, sa dimension étant liée à la valeur de l'exposant n . Pour cette raison, on essaie de se raccrocher à la notion de viscosité en introduisant une "viscosité apparente" μ_a telle que :

$$\tau = \mu_a \frac{\partial U}{\partial y} \quad (4.13a)$$

soit :

$$\mu_a = K \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{n-1} \quad (4.13b)$$

ce qui n'est guère mieux puisque μ_a n'est évidemment pas une caractéristique propre du fluide.

Toutefois, on observe que μ_a tend vers une valeur limite constante μ_∞ lorsque $\partial U / \partial y$ est assez grand, la loi de comportement devenant alors linéaire :

$$\mu_\infty = (\lim \mu_a)_{\partial U / \partial y \text{ grand}} \quad (4.13c)$$

Cette limite μ_∞ est bien une propriété du fluide, mais d'un intérêt pratique limité.

Pour certains fluides cependant, on est obligé de faire intervenir une "viscosité à cisaillement nul" μ_0 :

$$\mu_0 = (\lim \mu_a)_{\partial U / \partial y \rightarrow 0}$$

évidemment incompatible avec la loi d'Ostwald. Il faut alors recourir à des modèles plus complexes.

Ajoutons à ceci que la consistance K est en général fortement thermodépendante, du genre :

$$K = K_0 e^{-bT} \quad (4.14)$$

et que les effets de cette propriété sont souvent amplifiés par une dissipation visqueuse importante dans l'écoulement.

Les fluides qui obéissent globalement à la loi générale d'Ostwald se subdivisent encore en deux catégories selon que l'indice de structure n est supérieur ou inférieur à 1.

4.2.1.2. - FLUIDES PSEUDO-PLASTIQUES OU RHÉOFLUIDIFIANTS

Dans le cas des fluides dits pseudo-plastiques, on a un indice de structure :

$$0 < n < 1$$

Alors, la viscosité apparente μ_a diminue quand le gradient de vitesse augmente (formule 4.13b), d'où le terme de *rhéofluidifiant* parfois utilisé pour désigner ce type de comportement. L'allure de la courbe correspondant à la loi d'Ostwald est donnée sur la figure 4.1.

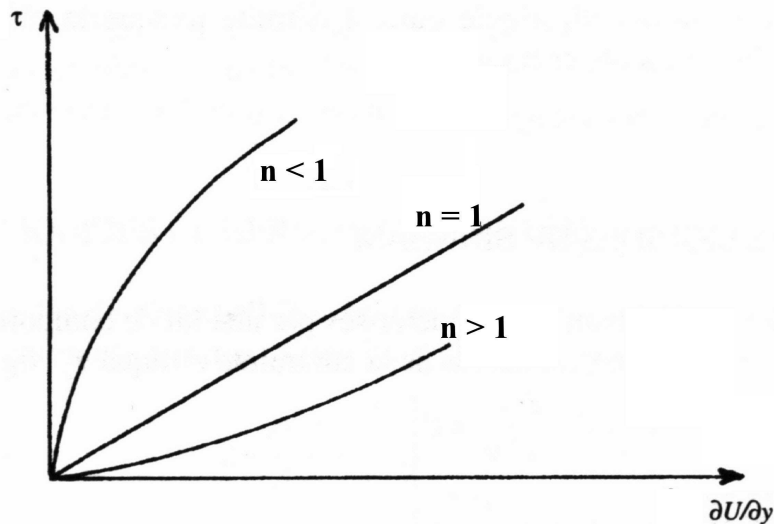


FIG. 4.1 - Représentation de la loi d'Ostwald pour les fluides sans contrainte critique ; $n < 1$: rhéofluidifiants ; $n > 1$: rhéoépaississants ; $n = 1$: newtoniens.

Parmi les fluides pseudo-plastiques on peut citer : solutions de polymères cellulosiques, pâte à papier, polymères fondus, ciment (c'est pour cette raison que les camions de ciment ont des cuves tournantes), savon liquide, suspensions de détergents, diverses peintures, ainsi que les encres d'imprimerie.

Le comportement rhéofluidifiant peut être un avantage dans certaines situations, par exemple avec les peintures auxquelles on demande d'être fluides quand on les applique et de ne pas couler ensuite. Par contre, le pompage de ciment liquide avec une pompe à eau ne donne pas toujours les résultats escomptés !

4.2.1.3. - FLUIDES DILATANTS OU RHÉOÉPAISSISSANTS

Les fluides dilatants sont assez comparables aux pseudo-plastiques, mais leur indice de structure est supérieur à 1 :

$$n > 1$$

et dans ce cas la viscosité apparente augmente avec la déformation, d'où le qualificatif de *rhéoépaississants* qui leur est attribué (fig. 4.1).

Ce comportement est plus rare, et concerne surtout des liquides contenant des suspensions solides.

4.2.2. - Fluides à contrainte critique, ou viscoplastiques

Les fluides à contrainte critique sont des milieux qui tiennent à la fois du solide et du fluide : ils refusent obstinément de s'écouler si on ne les pousse pas assez fort, c'est à dire si la contrainte appliquée reste inférieure à un seuil critique. En gros, ceci est dû au fait que, au repos, il existe dans ces milieux une structure tridimensionnelle rigide qui est détruite lorsque la contrainte devient supérieure à la contrainte critique.

On en distingue deux catégories.

4.2.2.1. - LES LIQUIDES DE BINGHAM

Les fluides de Bingham sont caractérisés par une loi de comportement linéaire, c'est à dire newtonienne, au-dessus de la contrainte critique τ_c (fig. 4.2) :

$$\left. \begin{array}{l} \tau \leq \tau_c \quad : \quad U = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ \tau > \tau_c \quad : \quad \tau = \tau_c + \mu \frac{\partial U}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (4.15)$$

On retrouve ici une viscosité *vraie*, caractéristique du fluide, comme dans les milieux newtoniens.

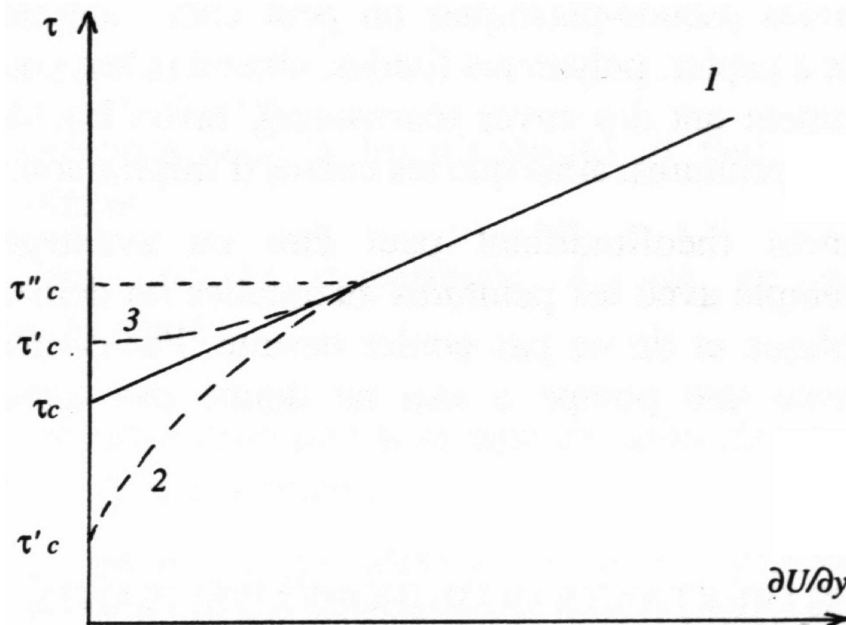


FIG. 4.2 - Fluides viscoplastiques. 1 : Bingham. 2 : Herschell-Bulkley, $n < 1$. 3 : Herschell-Bulkley, $n > 1$.

Avec les fluides à contrainte critique apparaît un nouveau type d'écoulement : "l'écoulement piston". Il se produit lorsque le cisaillement τ est légèrement

supérieur à τ_c ; à ce moment, dans le milieu, la contrainte nécessaire pour obtenir l'écoulement n'est atteinte que près des parois (c'est toujours là que se produit le cisaillement maximum), la partie centrale restant solide, avec une vitesse U indépendante de y . Mais si τ augmente, on retrouve un profil $U(y)$ classique.

Il y a des corps très connus parmi les fluides de Bingham : dentifrice, margarine, ciment frais (au début de la prise) ; mais on y trouve aussi des suspensions concentrées de particules solides dans un liquide (transport du charbon en poudre dans de l'eau) et certaines boues argileuses.

4.2.2.2 - LES LIQUIDES DE HERSHEY-BULKLEY

Avec les fluides de Herschell-Bulkley on rencontre la juxtaposition, en trois étapes, d'une contrainte critique, d'une loi d'Ostwald puis d'une loi newtonienne (fig. 4.2) :

$$\left. \begin{array}{l} \tau \leq \tau'_c \quad : \quad U = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \\ \tau'_c < \tau < \tau''_c \quad : \quad \tau = \tau'_c + K \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^n \\ \tau > \tau''_c \quad : \quad \tau = \tau_c + \mu \frac{\partial U}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (4.16)$$

Récapitulons les trois phases. La première est donc liée à l'existence d'une contrainte critique, notée ici τ'_c . La seconde correspond à une loi en puissance : on y retrouve la consistance K et un indice de structure n qui peut être inférieur ou supérieur à 1, comme dans la loi d'Ostwald (fig. 4.2, courbes 2 et 3). Enfin, à partir d'une valeur τ''_c de la contrainte, le comportement devient newtonien, comme dans les fluides de Bingham, et il est représenté sur la figure 4.2 par une droite dont l'ordonnée à l'origine est égale à τ_c . Mais bien entendu les paramètres τ_c , τ'_c , τ''_c dépendent du fluide considéré.

Les propriétés de type Herschell-Bulkley se rencontrent principalement dans des solutions de polymères.

4.3. - COMPORTEMENT DÉPENDANT DU TEMPS

La seconde grande catégorie de milieux non newtoniens est constituée par des liquides dont le comportement varie en fonction du temps. Elle se subdivise elle-même en deux.

4.3.1. - Fluides viscoélastiques

Quand on applique des contraintes à un fluide viscoélastique, les déformations de structure qui en résultent se traduisent par une variation d'énergie interne : c'est le phénomène de viscoélasticité. Il s'agit en général de structures macromoléculaires, mais cela concerne aussi la déformation de gouttes d'eau dans une suspension, etc... La loi de comportement est alors de la forme :

$$\tau = \tau \left(U, \frac{\partial U}{\partial y}, t \right)$$

et les équations de bilans (4.9) et (4.11) doivent inclure le terme en $\partial / \partial t$.

Concrètement, le phénomène se manifeste sous plusieurs aspects :

- 1) il existe un temps de retard t_r entre l'application de la contrainte et la réponse du fluide.
- 2) on observe une forte réduction du coefficient de frottement, même pour de très faibles dilutions lorsqu'il s'agit de solutions de composés macromoléculaires.
- 3) on note aussi l'apparition de contraintes normales importantes perpendiculairement au gradient de vitesse, ce qui conduit à des comportements en apparence déroutants, comme avec le blanc d'œuf qui remonte le long d'un batteur rotatif, alors qu'un tourbillon de liquide newtonien se creuse au centre.

Les solutions de polyéthylène, la pâte à pain, le sable mouillé, les fibres textiles artificielles sont des fluides viscoélastiques.

4.3.2. - Fluides thixotropes

Avec les fluides thixotropes, les phénomènes gagnent encore en complexité car la contrainte τ dépend à la fois du gradient de vitesse et de la durée du cisaillement.

Tout d'abord, si un fluide thixotrope est soumis à un gradient $\partial U / \partial y$ constant appliqué après un long temps de repos, le cisaillement diminue au cours du temps pour se stabiliser à une valeur asymptotique τ_∞ (fig. 4.3). On observe de plus que τ_∞ est d'autant plus faible que $\partial U / \partial y$ est plus grand.

Ceci correspond à une diminution de la viscosité, qui s'explique par la dislocation de structures présentes dans le liquide, telles que des amas de macromolécules. Mais le phénomène est réversible : quand l'écoulement est arrêté, μ augmente et revient à sa valeur initiale si le repos a été assez long ; il y a donc reconstitution des structures détruites.

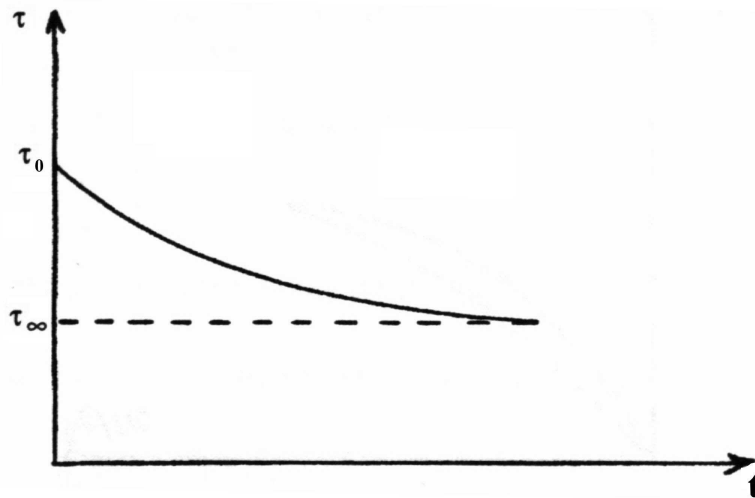


FIG. 4.3 - Evolution du cisaillement dans un fluide thixotrope, à gradient de vitesse imposé.

L'influence de ce temps de repos t_R est résumée sur la figure 4.4. : si l'on réitère immédiatement l'expérience ($t_R = 0$), le fluide a un comportement newtonien, avec une viscosité $\mu = \mu_\infty$. Sinon, la courbe $\tau(\partial U / \partial y)$ s'éloigne d'abord de la droite newtonienne, et s'en approche ensuite quand le gradient de vitesse devient important.

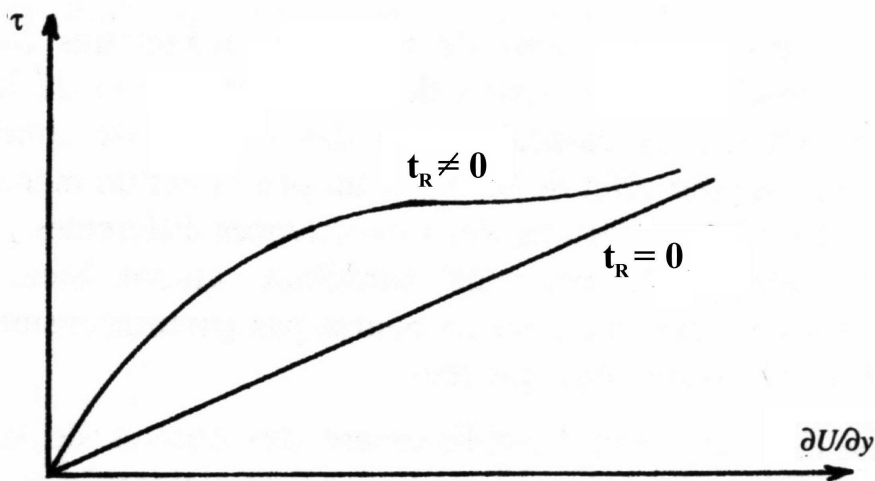


FIG. 4.4 - Fluides thixotropes : influence du temps de repos sur la loi de comportement.

Ceci explique un troisième aspect dans la rhéologie des liquides thixotropes : en faisant successivement croître et décroître le gradient de vitesse, on observe des cycles d'hystérésis, dont la forme change avec le fluide étudié. En effet, la thixotropie se superpose souvent à une autre propriété telle que la pseudoplasticité (exemple de la figure 4.5), l'existence d'une contrainte critique, etc...

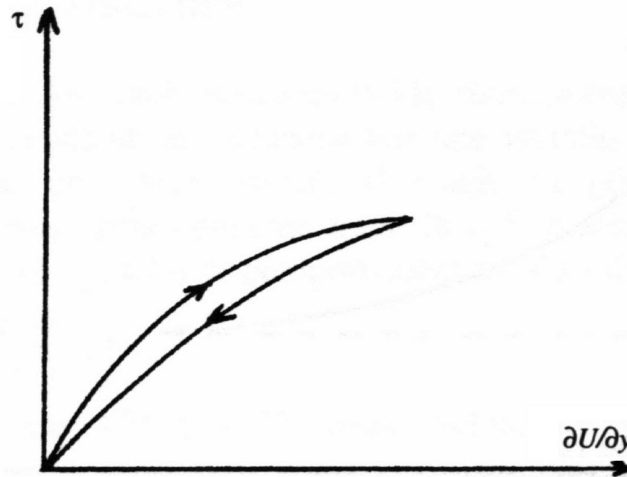


FIG. 4.5 - Cycle d'hystérésis d'un fluide thixotrope pseudo-plastique.

On trouve parmi les fluides thixotropes des boues argileuses (dont les propriétés sont souvent mises à profit sur les sites de forage), des peintures, la mayonnaise et le trop célèbre ketchup.

4.4. - CRITÈRES DE SIMILITUDE ET NOMBRES SANS DIMENSION

La présence dans les équations de bilans de paramètres thermophysiques essentiellement variables (en fonction de la température et de la déformation) ajoute des difficultés à la caractérisation des critères de similitude, et plus profondément, elle a pour effet de brouiller un peu la notion même de similitude ou d'invariants. En d'autres termes, deux expériences différentes construites avec les mêmes valeurs des critères de similitude auront bien des solutions adimensionnées identiques, mais on ne pourra pas garantir ensuite la qualité de leur transposition à l'espace physique réel.

La méthode générale pour l'établissement des critères de similitude a été présentée dans FEMM, Ch. 2. Nous l'appliquons simplement ici à quelques cas.

4.4.1. - Paramètres liés au bilan de quantité de mouvement

4.4.1.1. - FLUIDES PSEUDO-PLASTIQUES ET FLUIDES DILATANTS

Considérons d'abord des fluides sans contrainte critique obéissant à la loi d'Ostwald, et procédons à l'adimensionnement de l'équation (4.9). Avec

référence à l'écoulement (c'est à dire au champ de vitesse) nous sommes conduits à introduire la viscosité apparente (4.13b) :

$$\mu_a = K \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^{n-1}$$

et une viscosité de référence μ^0 telle que :

$$\mu^0 = K^0 \left(\frac{V^0}{L^0} \right)^{n-1} \quad (4.17)$$

où K^0 est elle-même une consistance de référence.

En *convection forcée*, le critère de similitude relatif aux forces de viscosité est :

$$\Gamma_v = \frac{\mu^0}{\rho V^0 L^0} = \frac{K^0}{\rho} \left(\frac{V^0}{L^0} \right)^{n-1} \frac{1}{V^0 L^0}$$

soit avec les références utilisées dans les écoulements internes (V et D_h) :

$$\Gamma_v = \frac{K^0}{\rho V^{2-n} D_h^n} \quad (4.18a)$$

Pour suivre l'usage, on introduira un nombre de Reynolds *adapté* à la situation :

$$\Re = \frac{\rho V^{2-n} D_h^n}{K^0} \quad (4.18b)$$

mais avec l'inconvénient déjà signalé que K est une fonction de n .

Par contre, si nous adoptons le système de référence au champ de contraintes, le critère de similitude, qui est le coefficient de frottement C_f , n'est pas modifié puisque :

$$\frac{1}{2} C_f = \frac{\tau_p}{\rho V^2}$$

En *convection libre* (nous anticipons légèrement sur le chapitre 5), le critère de similitude est Γ_{vl} , tandis que le paramètre usuel est le nombre de Grashof :

$$Gr = \left(\frac{1}{\Gamma_{vl}} \right)^2$$

soit :

$$Gr = \frac{\rho^2 g \beta \Delta T^0 (L^0)^3}{(\mu^0)^2}$$

Avec référence au champ de vitesse, nous devons retenir (4.17) pour la viscosité, mais avec ici une vitesse de référence :

$$V^0 = (g \beta \Delta T^0 L^0)^{\frac{1}{2}}, \text{ d'où } \mu^0 = \frac{(g \beta \Delta T^0 L^0)^{\frac{n-1}{2}}}{(L^0)^{n-1}}$$

et un nombre de Grashof *adapté* lui aussi, introduit par Shenoy (1991) :

$$Gr = \frac{\rho^2}{(K^0)^2} (g \beta \Delta T^0)^{2-n} (L^0)^{2+n} \quad (4.19)$$

4.4.1.2. - FLUIDES VISCOÉLASTIQUES

Lorsque le comportement du fluide dépend du temps, intervient le critère de similitude temporelle :

$$\Gamma_t = \frac{L^0}{t^0 V^0} \quad (4.20a)$$

ou plutôt le *nombre de Strouhal* qui est son inverse :

$$S = \frac{1}{\Gamma_t}$$

On adopte logiquement ici comme temps de référence t^0 le temps de retard t_r (§ 4.3.1). Le nombre de Strouhal s'est alors vu désigné comme "*nombre de Weissenberg*" :

$$W_s \equiv S = \frac{t_r V^0}{L^0} = \frac{t_r V}{D_h} \text{ en canalisation} \quad (4.20b)$$

Concernant le *nombre de Reynolds*, certains auteurs lui conservent sa forme initiale en prenant simplement comme viscosité de référence μ^0 la *viscosité apparente à la paroi* μ_{ap} , soit :

$$\Re_a = \frac{\rho V D_h}{\mu_{ap}} \quad (4.21)$$

4.4.2. - Paramètres liés au bilan d'énergie

Limitons-nous ici au cas de la convection forcée dans les fluides d'Ostwald. Le critère de similitude relatif à la diffusion de la chaleur est Γ_v , ou le nombre de Péclet, $Pe = 1/\Gamma_v$:

$$Pe = \frac{a}{V^0 L^0}$$

Il est donc exempt de toute modification puisque la diffusivité thermique a n'est pas concernée, *et de même pour le nombre de Stanton*.

Quand la dissipation est importante, on doit prendre en considération le critère de similitude correspondant (avec référence au champ des vitesses) :

$$\Gamma_{\phi_v} = \frac{Ec}{\Re} \quad (4.22a)$$

où le nombre d'Eckert $Ec = (V^0)^2 / C_p \Delta T^0$ est conservé, tandis que \Re prend la forme (4.18b). Mais avec référence au champ des contraintes, le critère

$$\Gamma_{\phi\tau} = \frac{I}{2} C_f Ec \quad (4.22b)$$

n'est pas modifié.

Enfin, le terme de couplage entre diffusion de quantité de mouvement et diffusion thermique peut évidemment garder son appellation de "nombre de Prandtl" :

$$Pr = \frac{Pe}{\Re} = \frac{\mu^0 C_p}{\lambda} \quad (4.23a)$$

mais son contenu est différent puisqu'il combine des caractéristiques du fluide et de l'écoulement :

$$Pr = \frac{K^0 C_p}{\lambda} \left(\frac{V^0}{L^0} \right)^{n-1} \quad (4.23b)$$

et de surcroît, c'est encore une autre expression de Pr qui apparaîtra en convection libre.

4.5. - QUELQUES RÉSULTATS

Pour illustrer ce qui précède, voici trois résultats tirés de la littérature.

Ecoulement de fluide pseudo-plastique sur une paroi plane

En utilisant la méthode différentielle, Wichterle [1996] montre que localement :

$$\frac{Nu_x^{\frac{2n}{2+n}}}{\Re_x Pr^{\frac{n}{2+n}}} = \left[\frac{h_x^{3n} K^2}{\lambda^{2n} U_\infty^{4-n} \rho^{2+n} C_p^n} \right]^{\frac{1}{2+n}} = \frac{I}{2} C_{fx} \quad (4.24a)$$

avec:

$$\frac{I}{2} C_{fx} = C(n) \Re_x^{\frac{1}{2+n}} \quad (4.24b)$$

et \Re_x donné par (4.18b) (D_h étant remplacé par x).

La constante $C(n)$ de (4.24b) peut en première approximation être assimilée à $(1 - 0,65n)$. Le rapprochement de (4.24a et 4.24b) permet de remonter au coefficient d'échange h_x .

Ecoulement dans des tubes cylindriques

En régime permanent, les fluides viscoélastiques se comportent comme des fluides d'Ostwald. Les résultats ci-dessus s'appliquent donc aux deux catégories.

Pour un écoulement laminaire [El Ouardighi, 1990] :

$$C_f = \frac{16}{\Re^*} \quad \text{avec} \quad \Re^* = \frac{\rho V^{2-n} D_h^n}{8^{n-1} K \left\{ \frac{1+(2+\alpha)n}{2(1+\alpha)n} \right\}^n} \quad (4.25)$$

avec $\alpha = 0$ dans un canal plan, $\alpha = 1$ dans un tube cylindrique, D_h = diamètre hydraulique.

En régime turbulent, dans une solution de polyacrilide (Hartnett, 1990) :

$$C_f = 0,079 n^{0,675} (\Re^*)^{-0,25} \quad (4.26a)$$

avec cette fois-ci :

$$\Re^* = \frac{n}{0,25 + 0,75 n} \frac{\rho V D}{\mu_{ap}} \quad (4.26b)$$