

## Chapitre 2

# SIMILITUDE ET ADIMENSIONNEMENT

*Il y a encore une grande découverte à faire en littérature : ce serait de payer les écrivains selon la quantité de livres qu'ils s'engageraient à ne pas écrire.*

Thomas CARLYLE

### 2.1. – PROBLÉMATIQUE

Les équations générales établies au chapitre 1 doivent permettre, en théorie, de résoudre tous les problèmes de transferts relatifs aux fluides newtoniens. En pratique cependant, il y a une quasi-impossibilité à résoudre complètement ces équations à chaque instant et en tout point de l'écoulement, sauf dans quelques cas particuliers. Il est donc indispensable de procéder à une simplification, en établissant une méthode de travail plus opérationnelle, et en élaborant des modèles schématisés qui constituent cependant une description aussi fidèle que possible de la réalité observable. On pourra ainsi établir des lois phénoménologiques d'un usage beaucoup plus commode.

Dans ce but, et vu la multiplicité des paramètres qui interviennent dans l'ensemble des équations de bilans, il peut paraître judicieux de les agglomérer sous forme de groupements adimensionnels, pour faciliter l'interprétation et la comparaison des résultats expérimentaux. Pour ce faire, la méthode la plus naturelle consiste à implanter des grandeurs sans dimension dans les équations.

Avec les démarches classiques comme l'analyse dimensionnelle ou l'analyse d'échelle, la signification physique des nombres sans dimension ne ressort pas toujours clairement, et certains d'entre eux sont introduits d'une façon quelque peu arbitraire. Nous cherchons dans ce chapitre à montrer l'intérêt que présente l'élaboration d'une méthode systématique.

A cet égard, l'outil que constitue l'équation générale de bilan manifeste ici sa fécondité. Partant de l'équation locale pour une grandeur  $C$ , on l'écrit sous forme adimensionnelle, en faisant en sorte que le coefficient du terme de transport par la matière soit égal à 1.

Apparaissent alors des « *critères de similitude* », groupements sans dimension associés chacun à un terme de source, et tels que deux expériences différentes donneront des résultats semblables si les critères de similitude ont la même valeur dans l'une et dans l'autre. La signification physique et la fonction de ces paramètres sont alors nettement marquées. Par exemple, dans ce formalisme, le nombre de Reynolds apparaît comme un critère de similitude relatif aux contraintes visqueuses dans le bilan de quantité de mouvement, alors que l'interprétation traditionnelle le donne pour un « rapport entre les forces d'inertie et les forces

de viscosité », ce qui est plus ou moins convaincant (comment donc expliquer ce qu'est une « force d'inertie » dans un écoulement non accéléré ?).

On doit bien souligner le fait que si tous les critères de similitude sont, par essence, des nombres sans dimension, tous les nombres sans dimension ne sont pas des critères de similitude. Nous verrons que parmi les nombres sans dimension d'usage courant, certains jouent effectivement ce rôle (nombres de Reynolds, de Stanton ...); d'autres se présentent comme des termes de couplage entre des sources de même nature, mais ne relevant pas des mêmes bilans (nombre de Prandtl ...); d'autres enfin ne sont que des paramètres adimensionnés (nombre de Nusselt ...).

Il est à noter aussi que la méthode s'applique à toutes les équations de bilans, y compris les équations intégrales, et peut générer de nouveaux critères de similitude qui ne seront tributaires d'aucun choix arbitraire.

Dans la dernière partie, nous attirons l'attention sur les avantages de la similitude, mais aussi sur ses limites, et nous mettons le lecteur en garde contre les risques d'un emploi trop systématique, ou mal maîtrisé, des nombres sans dimension.

Pour commencer, un retour à l'expérience va permettre de discerner les éléments essentiels à une telle démarche, ce qui nous conduira à une méthodologie basée sur la notion de similitude; plus tard, l'analyse des données expérimentales aboutira à la mise en place de deux modèles descriptifs: le modèle de couche limite et le modèle statistique de la turbulence.

## **2.2. – PREMIERS APPORTS DE L'EXPÉRIENCE**

### **2.2.1. – Expérience de Reynolds (1883)**

#### 2.2.1.1. – DESCRIPTION

L'expérience sur laquelle nous allons nous appuyer appartient, comme celle de Couette (§ 1.1.3), à cette catégorie de réalisations qui, tout en étant très simples dans leur principe, possèdent une grande richesse heuristique et pédagogique. De plus, historiquement, il s'agit sans doute de la première véritable expérience de visualisation.

Elle consiste à observer l'écoulement d'un liquide dans un tube transparent dont la paroi intérieure est peu rugueuse. Le tube est alimenté par un réservoir à niveau constant (fig. 2.1) et il comporte une vanne  $R$  à son extrémité.

Pour visualiser la structure de l'écoulement, on y introduit un colorant liquide au moyen d'une pipette fine placée à l'entrée du tube, aussi rigoureusement que possible dans l'axe de celui-ci. L'alimentation en colorant est également réalisée au moyen d'un réservoir à niveau constant, un petit robinet  $R'$  permettant d'ajuster la vitesse du colorant à celle du fluide.

#### 2.2.1.2. – OBSERVATION

Au départ, la vanne  $R$  est fermée; l'expérience consiste à l'ouvrir progressivement, par étapes, et donc à augmenter pas à pas la vitesse  $V$  du liquide dans le tube. Le comportement du colorant met alors clairement en évidence trois phases dans l'aspect de l'écoulement.

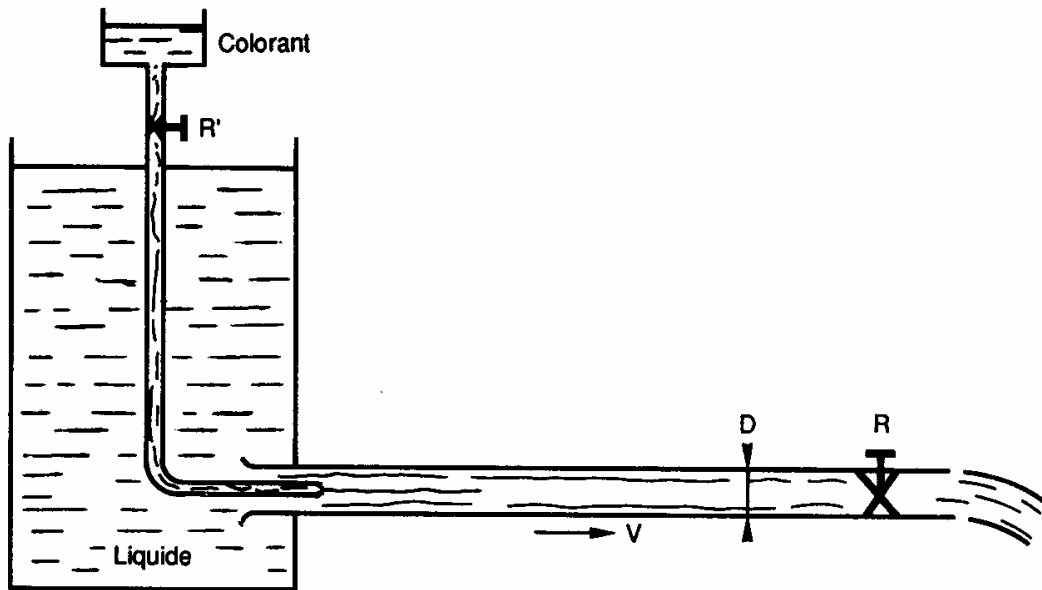


FIG. 2.1. – *Expérience de Reynolds.*

*Phase 1.* – Au début, pour les vitesses faibles, le filet coloré issu de la pipette est parfaitement rectiligne jusqu'à la sortie du tube. On n'observe aucun mélange entre le colorant et le liquide (fig. 2.2).

*Phase 2.* – A partir d'une certaine valeur de la vitesse  $V$ , le filet coloré se met à onduler et s'épaissit progressivement vers l'aval de l'écoulement. Lorsqu'on augmente encore la vitesse, les ondulations s'amplifient et il apparaît en aval une zone de mélange où le colorant se disperse totalement dans l'écoulement. Cette zone de mélange se déplace vers l'amont en même temps que  $V$  croît.

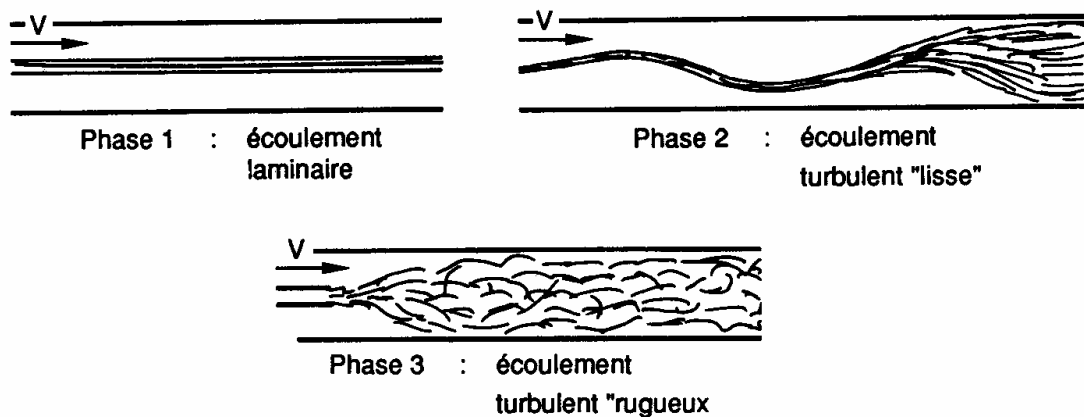


FIG. 2.2. – *Régimes d'écoulement dans une canalisation.*

*Phase 3.* – La zone de mélange atteint l'entrée du tube. Dès son éjection, le colorant est entièrement dilué dans le liquide, ce qui implique un brassage complet des particules fluides dans le tube.

Les trois types d'écoulements mis en évidence par l'expérience sont respectivement qualifiés de *laminaire* (phase 1) et *turbulent* (phases 2 et 3). Pour des raisons qui seront justifiées plus loin, on appelle turbulent « lisse » le régime correspondant à la phase 2, et turbulent « rugueux » celui qui correspond à la phase 3.

De plus, Reynolds a montré, en utilisant différents liquides et différents diamètres de tubes, que la transition laminaire – turbulent (phase 1 – phase 2) ne dépend pas séparément des paramètres  $V$ , ou  $\mu$  (viscosité dynamique du liquide), ou  $\rho$  (masse volumique) ou  $D$  (diamètre du tube), mais uniquement du groupement  $\rho V D / \mu$ , qui est un nombre sans dimension.

Il fut convenu par la suite d'appeler *nombre de Reynolds* ce groupement que nous noterons désormais  $Re$ .

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu}$$

La valeur critique  $Re_c$  du nombre de Reynolds qui caractérise la transition laminaire – turbulent peut varier légèrement avec certaines conditions expérimentales (géométrie de l'entrée du tube par exemple), mais elle n'est jamais inférieure à 2000, sa valeur la plus courante étant voisine de 2200.

### 2.2.2. – Expérience de la plaque plane

On peut se demander si certains aspects des observations précédentes ne sont pas liés au caractère particulier de la géométrie cylindrique ou à la nature du fluide (l'expérience est plus difficile à mettre en oeuvre avec un gaz). Une série d'observations complémentaires réalisées en géométrie plane montre qu'il n'en est rien.

Une plaque plane de surface lisse est plongée dans un écoulement de fluide (gaz ou liquide) dont la vitesse  $U_\infty$  est uniforme ; elle est disposée parallèlement à la direction de  $U_\infty$ , et son bord d'attaque est biseauté pour éviter des phénomènes parasites (fig. 2.3).

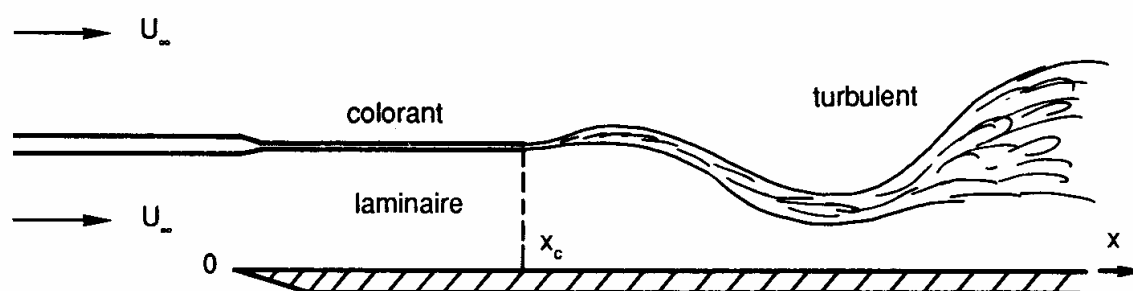


FIG. 2.3. – Régimes d'écoulement sur une plaque plane

En un point choisi à proximité de la plaque et du bord d'attaque, on fait arriver un filet de colorant (liquide ou gaz selon la nature de l'écoulement principal), à la même vitesse  $U_\infty$ . Comme dans l'expérience de Reynolds, on observe le comportement du colorant et l'on constate l'apparition de phénomènes analogues :

- Le filet coloré est d'abord rectiligne et bien individualisé, ce qui correspond, d'après la définition du paragraphe précédent, à une zone d'*écoulement laminaire*.
- Arrivé à une certaine distance du bord d'attaque, le filet commence à onduler en s'épaississant, puis se dilue dans le fluide ; on reconnaît ici une zone d'*écoulement turbulent*.

Dans le cas présent, il n'est donc pas nécessaire de faire varier la vitesse pour observer les différentes structures d'écoulement puisque celles-ci coexistent le long de la plaque plane.

En réitérant l'expérience pour différentes vitesses et différentes viscosités de fluides, on constate en outre que la transition laminaire – turbulent est caractérisée par une valeur critique du groupement  $\rho U_\infty x / \mu$ , l'abscisse  $x$  étant mesurée le long de la paroi à partir du bord d'attaque.

La parenté de ce terme sans dimension avec le paramètre  $\rho V D / \mu$  de l'expérience précédente conduisit à l'appeler également *nombre de Reynolds*. On a donc ici :

$$Re = \frac{\rho U_\infty x}{\mu}$$

Si  $x_c$  est l'abscisse de transition, la valeur critique de  $Re$ , soit  $Re_{xc} = \rho U_\infty x_c / \mu$ , est de l'ordre de  $10^5$ .

### 2.2.3. – Exploitation des expériences

Ainsi qu'il a déjà été annoncé au début de ce chapitre, les expériences que l'on vient de décrire ont l'intérêt d'être simples à interpréter et de suggérer à la fois des modèles pour les écoulements laminaires et turbulents, et une méthode générale de travail.

#### 2.2.3.1. – ANALYSE QUALITATIVE ET MODÉLISATION

♣ L'écoulement laminaire se caractérise par une quasi absence de mélange entre le fluide et le colorant. Il se produit bien un mélange dû à la diffusion moléculaire, mais celui-ci est très lent. Tout se passe donc en fait comme si les particules fluides suivaient des trajets qui ne s'entrecroisent jamais. Toutes les particules issues d'un même point forment une sorte de « filet fluide » analogue à un rail qui ne comporterait pas d'aiguillages. Pour des conditions aux limites stationnaires, les paramètres de l'écoulement ( $p, \vec{V}, T$ , etc.) sont des constantes.

A partir de ces apparences, on peut dessiner un premier modèle où le fluide en écoulement serait constitué de lames minces (d'où le terme de *laminaire*) qui glisseraient les unes sur les autres, en exerçant sur leur surface de contact un effort de frottement  $\tau_{ij}$  dû à la viscosité. Cet aspect a déjà été évoqué à propos de l'écoulement de Couette (§ 1.1.3.2).

◆ D'autre part, dans le second type d'écoulement, qualifié de *turbulent*, il se produit pendant le déplacement un mélange progressif entre le fluide et le colorant, puis un brassage général. Ceci exige un enchevêtrement des trajectoires suivies par les particules fluides, et indique l'apparition locale de mouvements instationnaires tridimensionnels qui ne sont pas induits directement par les conditions aux limites puisqu'ils se manifestent même lorsque celles-ci sont stationnaires.

On ne peut donc plus parler ici de filets fluides ou de lames fluides. La notion de trajectoire garde évidemment un sens physique mais perd tout intérêt opérationnel.

Cette interprétation conduit tout naturellement à un modèle d'écoulement turbulent dans lequel un mouvement chaotique, d'apparence aléatoire, se superposerait à un mouvement d'ensemble considéré comme mouvement moyen, c'est-à-dire pour le premier à un modèle statistique. Ce mouvement, d'aspect irrégulier (du moins à première vue) constitue le phénomène de la *turbulence*. La description des écoulements turbulents fera l'objet du chapitre 3.

#### 2.2.3.2. – UNE MÉTHODE DE TRAVAIL : LA SIMILITUDE

Penchons-nous maintenant sur le dernier enseignement des expériences précédentes. Celle-ci mettent en jeu quatre paramètres que l'on peut modifier : la vitesse du fluide ( $V$  ou  $U_\infty$ ), une longueur (diamètre  $D$  du tube ou longueur de la plaque), la masse volumique  $\rho$  et la viscosité dynamique  $\mu$  du fluide. Mais on observe que le critère de transition laminaire – turbulent fait intervenir un seul paramètre adimensionnel  $Re$  qui combine les quatre précédents.

On peut alors légitimement se demander si d'autres propriétés des fluides en écoulement ne pourraient pas être décrites également par un nombre réduit de groupements sans dimension.

Plus précisément, eu égard au nombre élevé de paramètres nécessaires pour décrire complètement un problème d'écoulement anisotherme ( $\rho, \vec{V}, T, p, \mu$ , etc.), l'interrogation essentielle doit être formulée en ces termes : « A quelle condition peut-on attribuer une valeur générale à une expérience particulière ? ». Ou encore : « Peut-on établir des lois de comportement qui ne fassent pas intervenir les conditions particulières relatives à telle ou telle expérience ? ». La méthode qui permet de répondre par l'affirmative à ces questions porte le nom de *similitude*.

Bien entendu, la même question se pose dans toutes les branches de la physique, mais elle prend une importance majeure en thermoconvection pour la raison indiquée plus haut. En outre, si elle se pose d'abord au théoricien, elle présente aussi un intérêt tout particulier pour l'ingénieur qui ne peut, dans bien des cas, ni résoudre son problème complet par le calcul (encore que les choses commencent à changer dans ce domaine), ni prendre le risque financier d'une expérimentation directe en grandeur nature et dans les conditions normales d'utilisation. Ce sera le rôle d'une étude sur *maquette* que d'apporter des renseignements sur le comportement du modèle définitif, la similitude permettant de transposer de l'une à l'autre les résultats obtenus.

Intuitivement, on se rend compte, par exemple que, pour qu'il y ait similitude entre deux écoulements, il est nécessaire que les trajectoires des particules fluides soient semblables (similitude géométrique, impliquant celle des frontières) et que les particules occupent des positions homologues à des instants homologues (similitude cinématique).

Il reste maintenant à préciser et à compléter ces données intuitives.

#### 2.2.3.3. – UN OUTIL DE TRAVAIL : L'ADIMENSIONNEMENT

D'une façon moins contraignante, on peut aussi se contenter d'utiliser des groupements sans dimension uniquement pour diminuer le nombre des paramètres mis en jeu, sans faire spécifiquement référence à la similitude. Ceci élargit l'éventail des possibilités, car il existe des nombres sans dimension qui ne sont pas représentatifs d'une similitude, mais qui sont néanmoins des outils de travail utiles et appréciés. Nous les passerons en revue au § 2.5.

## 2.3. – LES FONDEMENTS DE LA SIMILITUDE

Avant de nous intéresser de façon plus approfondie aux modèles d'écoulements (ch. 3 et suivants) nous examinerons d'abord la question de la similitude, en essayant de poser le problème dans toute sa généralité.

### 2.3.1. – Forme adimensionnelle d'une équation de bilan

Nous partirons de l'équation générale de bilan local (1.24) pour une entité physique scalaire :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(C\vec{V}) = q_I - \text{div}\vec{q}_S$$

en rappelant le sens des notations :

$C$  = densité volumique de l'entité considérée

$q_I$  = débit local des sources de volume

$\vec{q}_S$  = densité de flux locale des sources de surface

Il va nous être utile d'indiquer, dans l'écriture de l'équation précédente, que pour une entité donnée, les sources de surface aussi bien que de volume peuvent être de plusieurs sortes, ce que nous symboliserons par des sommations sur deux indices  $n$  et  $m$  :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \text{div}(C\vec{V}) = \sum_n q_{In} - \sum_m \text{div}\vec{q}_{Sm} \quad (2.1)$$

Si l'on veut faire apparaître dans cette équation des groupements sans dimension, et s'affranchir pour sa résolution des valeurs particulières de certains paramètres, on est conduit à y introduire des variables adimensionnelles. Il convient pour cela de comparer chaque variable à une valeur de référence (à l'inverse, l'idée même de comparaison conduit tout naturellement à la notion de grandeur sans dimension). Pour les coordonnées d'espace et de temps, on choisira ainsi :

$L^\circ$  : longueur de référence relative à la géométrie de l'écoulement (ou « échelle de longueur »)  
 $t^\circ$  : durée de référence (ou « échelle de temps »).

Les grandeurs de référence relatives à  $C$ ,  $\vec{V}$ ,  $q_{In}$ ,  $\vec{q}_{Sm}$  seront, quant à elles, notées  $C^\circ$ ,  $V^\circ$  (grandeur scalaire)  $q_{In}^\circ$  et  $q_{Sm}^\circ$  (scalaire également).

Les *variables adimensionnelles* (ou *variables réduites*) sont alors définies de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x^+ &= \frac{x}{L^\circ}; & y^+ &= \frac{y}{L^\circ}; & z^+ &= \frac{z}{L^\circ}; & t^+ &= \frac{t}{t^\circ} \\ C^+ &= \frac{C}{C^\circ}; & \vec{V}^+ &= \frac{\vec{V}}{V^\circ} \\ q_{In}^+ &= \frac{q_{In}}{q_{In}^\circ}; & \vec{q}_{Sm}^+ &= \frac{\vec{q}_{Sm}}{q_{Sm}^\circ} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Deux remarques s'imposent à propos des définitions précédentes. Premièrement, puisqu'on ne peut pas diviser un vecteur par un autre, la référence d'une grandeur vectorielle est obligatoirement un scalaire. Deuxièmement, le choix d'une même longueur de référence  $L^o$  dans les trois directions de l'espace paraît à première vue une nécessité logique, mais il y a des exemples (comme les entrées de canalisations) où ce choix est physiquement inapproprié. Nous en parlerons au chapitre 6 (§ 6.5).

Remplaçons maintenant  $x, y, z, t, C, q_{In}, \vec{V}$  et  $\vec{q}_{Sm}$  en fonction des nouvelles variables dans l'équation (2.1). On a en particulier :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{C^o}{t^o} \frac{\partial C^+}{\partial t^+}$$

$$\frac{\partial C \vec{V}}{\partial x} = \frac{C^o V^o}{L^o} \frac{\partial (C^+ \vec{V}^+)}{\partial x^+} \quad (\text{et de même pour } y \text{ et } z).$$

L'équation (2.1) s'écrit donc :

$$\frac{C^o}{t^o} \frac{\partial C^+}{\partial t^+} + \frac{C^o V^o}{L^o} \text{div } C^+ \vec{V}^+ = \sum_n q_{In}^o q_{In}^+ - \sum_m \frac{q_{Sm}^o}{L^o} \text{div } \vec{q}_{Sm}^+ \quad (2.3)$$

où tous les coefficients sont de dimension  $[C] [t]^{-1}$ .

Nous pouvons rendre cette relation complètement adimensionnelle en multipliant les deux membres par  $L^o/C^o V^o$ , qui est de dimension  $[t][C]^{-1}$ . L'opération présente en particulier l'avantage d'isoler le terme de transport :  $\text{div } C^+ \vec{V}^+$ . On obtient ainsi :

$$\frac{L^o}{t^o V^o} \frac{\partial C^+}{\partial t^+} + \text{div } C^+ \vec{V}^+ = \sum_n \frac{q_{In}^o L^o}{C^o V^o} q_{In}^+ - \sum_m \frac{q_{Sm}^o}{C^o V^o} \text{div } \vec{q}_{Sm}^+ \quad (2.4)$$

Bien entendu, tout ceci n'a de sens que si les grandeurs de référence  $C^o, L^o, \dots$  sont des constantes.

Les groupements sans dimension qui sont apparus dans l'équation (2.4) présentent un grand intérêt. Nous les noterons respectivement  $\Gamma_t, \Gamma_{In}, \Gamma_{Sm}$  :

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_t &= \frac{L^o}{t^o V^o} \\ \Gamma_{In} &= \frac{q_{In}^o L^o}{C^o V^o} \\ \Gamma_{Sm} &= \frac{q_{Sm}^o}{C^o V^o} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

d'où l'écriture définitive de l'équation générale adimensionnelle de bilan local :

$$\boxed{\Gamma_t \frac{\partial C^+}{\partial t^+} + \text{div } C^+ \vec{V}^+ = \sum_n \Gamma_{In} q_{In}^+ - \sum_m \Gamma_{Sm} \text{div } \vec{q}_{Sm}^+} \quad (2.6)$$



On aboutit à des coefficients  $\Gamma$  identiques aux précédents si l'on raisonne sur une grandeur vectorielle. La méthode possède donc une validité tout à fait générale.

### 2.3.2. – Les critères de similitude

♣ L'étude d'un problème de thermoconvection sous forme adimensionnelle conduit donc à résoudre un système de plusieurs équations de bilans du type (2.6), équations relatives aux différentes entités physiques qui doivent être prises en compte. Les inconnues sont habituellement les distributions  $C^+(x^+, y^+, z^+, t^+)$  des grandeurs physiques considérées. Les termes de sources  $q_{ln}^+, \vec{q}_{sm}^+$  et les vitesses dépendent en général des grandeurs  $C^+$ . A titre d'aide-mémoire, on trouvera en annexe (2.A.1) des tableaux rappelant les principales sources impliquées dans les bilans que nous aurons à utiliser.

On voit que deux problèmes différents pourront être qualifiés de *semblables* s'ils ont des solutions adimensionnelles identiques, car alors, en tous points homologues des deux écoulements (points ayant les mêmes coordonnées réduites  $x^+, y^+, z^+$ ), les grandeurs  $C, \vec{V}, q_{ln}, \vec{q}_{sm}$  seront dans des rapports constants.

L'identité des solutions implique en particulier que les coefficients  $\Gamma$  définis par (2.5) soient respectivement égaux. *Les  $\Gamma$  constituent donc un ensemble de « critères de similitude », chacun d'eux étant relatif à une grandeur  $C$  et à une source données, c'est-à-dire à un problème physique bien précis (sauf  $\Gamma_t$ , sur lequel nous reviendrons dans un instant)..* Corrélativement, il y a invariance des solutions dans toute transformation réalisée à  $\Gamma$  constants. Enfin, les critères de similitude sont évidemment indépendants du système d'unités puisqu'ils sont sans dimension.

Le choix que nous avons fait dans la construction des équations adimensionnées (coefficient 1 devant le terme de transport) revient à imposer la similitude à l'échelle 1 par rapport au flux transporté, et à chercher à quelles conditions une similitude sera également assurée pour les sources.

◆ Cependant, l'égalité des coefficients  $\Gamma$  ne suffit pas à assurer l'identité des solutions. Il faut en outre vérifier l'identité des conditions aux limites et des conditions initiales, exprimées également sous forme adimensionnelle.

En particulier, les surfaces frontières des systèmes considérés devront avoir les mêmes équations en  $x^+, y^+, z^+$ . Ceci implique la *similitude géométrique* des frontières des deux écoulements.

A ce propos, la réalisation d'une maquette expérimentale est ordinairement entendue dans un sens diminutif, « *maquette* » étant identifiée à « *modèle réduit* » ; cette conception est trop restrictive, car la similitude autorise parfaitement l'usage de « *modèles agrandis* » si les dimensions du système à étudier sont trop petites.

♥ Les critères de similitude sont construits à partir de grandeurs de référence sur lesquelles nous n'avons donné pour l'instant aucune précision.

En fait, les choix de ces grandeurs sont *a priori* arbitraires mais, en pratique, ils doivent être en relation avec les phénomènes physiques considérés. Par exemple, pour un écoulement dans un tuyau de section circulaire, l'expérience de Reynolds nous montre que la dimension caractéristique du phénomène n'est pas la longueur du tube, mais son diamètre. La longueur de référence  $L^\circ$  sera donc ici le diamètre  $D$ . A l'inverse, pour l'écoulement sur une

plaque plane, l'expérience montre que c'est la longueur  $L$  mesurée depuis le bord d'attaque qui est représentative du phénomène, et c'est donc elle qui sera naturellement choisie comme valeur de  $L^\circ$ .

Toutes précisions sur les choix des grandeurs de référence seront données au fur et à mesure des besoins dans les chapitres d'applications. Signalons toutefois dès maintenant, car ceci est important, que d'une façon générale les grandeurs de référence seront choisies sur des surfaces frontières. Ce seront donc des conditions aux limites. Lorsque l'on veut rendre deux problèmes semblables, l'égalité des coefficients  $\Gamma$  assure alors *ipso facto* l'identité de certaines conditions aux limites.

♠ Si le problème étudié comporte au total  $N$  sources, il n'y aura pas forcément  $N$  critères  $\Gamma$  indépendants. En effet, certaines sources sont couplées entre elles, ce qui se traduit par des relations de dépendance entre les  $\Gamma$  correspondants (§ 2.5). Avec l'introduction de la similitude, l'un des buts poursuivis sera d'établir la forme de ces relations.

Enfin, en l'absence de sources, une équation de bilan devient une simple équation de conservation. En régime permanent, il n'y a plus de critères de similitude. Pour que deux problèmes soient semblables, il suffit alors que les conditions aux limites exprimées en variables adimensionnelles soient identiques.

### 2.3.3. – Conditions de validité de la similitude

L'invariance des lois physiques entre modèle et maquette est évidemment l'essence même de la similitude. *A contrario*, aucune similitude n'est possible si les lois qui gouvernent les transferts ne sont pas conservées lors d'un changement d'échelle (au sens large du terme : échelle de temps, de longueur, de température, échelle dans les propriétés thermophysiques ...).

Pour donner un exemple concret, on ne peut pas envisager de similitude entre un écoulement d'air à l'échelle centimétrique et à pression ambiante, et un écoulement d'air à échelle micrométrique ou à très faible pression : le changement d'échelle fait que le libre parcours moyen des molécules devient du même ordre de grandeur que les dimensions du système ; le gaz ne peut plus alors être considéré comme un milieu continu (cf. § 1.1.1) et les lois de comportement (relations contraintes / déformations ou flux de chaleur / écart de température) changent de forme.

Mais bien entendu, on peut toujours construire une similitude dans tout domaine à l'intérieur duquel les lois physiques sont conservées, les définitions générales des critères  $\Gamma$  relatifs à chaque source restant valables dans leur forme générale (2.5).

## 2.4. – PANORAMA DES CRITÈRES DE SIMILITUDE

### 2.4.1. – Les principes et l'usage

Après cette présentation globale, il convient maintenant de préciser les expressions des critères de similitude qui interviennent dans les relations de bilans établies au chapitre 1.

Malheureusement, l'usage a imposé des nombres sans dimension qui ne coïncident pas exactement avec les coefficients  $\Gamma$ . C'est ainsi que les nombres de Strouhal (2.9), de Reynolds (2.26) ou de Péclet (2.57) sont les inverses des  $\Gamma$  correspondants, tandis que

d'autres (nombre de Grashof ( 2.29), de Boussinesq (2.61) ...) en sont les inverses élevés au carré.

Dans le principe, ceci est regrettable, mais la signification de ces nombres comme critères de similitude n'est pas en cause pour autant : il y a seulement un renversement d'échelle, et en plus, dans le second cas, une distorsion dans l'échelle des valeurs numériques utilisées, par rapport à celles des critères  $\Gamma$ .

On trouvera en Annexe 2.A.1 des tableaux qui récapitulent l'ensemble des critères de similitude et des sources auxquelles ils se rattachent, ainsi que d'autres nombres sans dimension d'usage courant.

### 2.4.2. - Le critère de similitude temporelle

Commençons par le coefficient  $\Gamma_t$ , qui n'intervient que dans les phénomènes instationnaires (équation 2.6). Son expression est dans tous les cas :

$$\Gamma_t = \frac{L^\circ}{t^\circ V^\circ}$$

Il s'agit d'un *critère de similitude temporelle* pour lequel deux situations sont à considérer.

♣ *Le terme instationnaire  $\partial C^+ / \partial t^+$  est lié directement à l'évolution dans le temps des conditions aux limites.*

Par exemple, si la vitesse à l'entrée d'une canalisation varie en fonction du temps, la quantité de mouvement  $\rho \vec{V}$  dépendra de  $t$  en chaque point.

Soit  $\vec{dl}$  le déplacement d'une particule fluide pendant une durée  $dt$  :

$$\vec{dl} = \vec{V} dt$$

Posons :  $\vec{dl}^+ = \vec{dl} / L^\circ$  ; on a :

$$L^\circ \vec{dl}^+ = \vec{V} dt = V^\circ \vec{V}^+ . t^\circ dt^+ \quad (2.7)$$

Ici, on ne peut pas choisir la durée de référence  $t^\circ$  de façon arbitraire, si le choix de  $L^\circ$  et de  $V^\circ$  a déjà été fait, car on doit avoir, en coordonnées réduites :

$$\vec{dl}^+ = \vec{V}^+ dt^+$$

d'où en rapprochant de (2.7) :  $L^\circ = V^\circ t^\circ$

On a par conséquent :

$$t^\circ = \frac{L^\circ}{V^\circ}$$

et :  $\boxed{\Gamma_t = 1}$  (2.8)

*La similitude temporelle est automatiquement assurée à l'échelle 1.*

◆ *Le terme instationnaire  $\partial C^+ / \partial t^+$  n'est pas lié à l'évolution des conditions aux limites.*

C'est ce qu'il se passe par exemple dans un écoulement turbulent, où le mouvement est instationnaire même quand les conditions aux limites sont stationnaires (§ 2.2.3.1), ou

encore dans certains échangeurs thermiques qui sont parfois le siège de mouvements vibratoires...

S'il y a superposition d'un mouvement vibratoire à un mouvement moyen, le terme  $\partial C^+ / \partial t^+$  peut se dédoubler ; il faut donc *a priori* considérer deux critères de similitude temporelle :

- le premier, relatif au mouvement moyen, est égal à 1 d'après ce qui précède ;
- dans le second, on choisira pour durée de référence la *pseudo-période*  $t^\circ$  du phénomène. Le critère de similitude temporelle relatif au mouvement vibratoire sera donc :

$$\Gamma_t = L^\circ / t^\circ V^\circ \quad (2.9a)$$

L'usage a retenu, plutôt que le nombre  $\Gamma_t$ , son inverse (qui reste néanmoins un critère de similitude, cf. § 2.4.1) appelé **nombre de Strouhal S** :

$$\boxed{S = \frac{t^\circ V^\circ}{L^\circ}} \quad (2.9b)$$

!!! Ceci dit, dans la suite de ce chapitre nous considérerons uniquement des régimes permanents, indépendants du temps. En effet, dans la plupart des régimes variables, la caractérisation des grandeurs de référence pose de sérieux problèmes et limite l'intérêt de l'adimensionnement.

### 2.4.3. – Les critères de similitude relatifs aux sources de quantité de mouvement

Pour des raisons pratiques que l'on constatera plus loin, nous allons examiner d'abord l'application de la similitude aux transferts de quantité de mouvement.

#### 2.4.3.1. – GRANDEURS ET RELATIONS DE BASE

Comme nous l'avons déjà précisé en (2.3.1), le fait que la grandeur considérée soit vectorielle ne change rien à la définition (2.5) des nombres  $\Gamma$ , et les grandeurs de référence utilisées sont toujours des scalaires. Dans le cas présent, on a donc :

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \rho \vec{V} ; & C^\circ &= \rho^\circ V^\circ \\ \vec{C}^+ &= \frac{\rho}{\rho^\circ} \frac{\vec{V}}{V^\circ} = \rho^+ \vec{V}^+ \end{aligned} \quad (2.10)$$

Notre équation de départ sera la relation de bilan local (1.32) (en régime permanent) :

$$\text{div} \vec{P} = \rho \vec{F} + \text{div} \vec{T}$$

dans laquelle nous adopterons pour  $\vec{T}$  la forme (1.16b)

$$\vec{T} = -p \vec{I} + \vec{\tau}$$

$\vec{\tau}$  désignant le tenseur des contraintes de viscosité. Le bilan devient ainsi :

$$\text{div} \vec{P} = \rho \vec{F} - \text{div} p \vec{I} + \text{div} \vec{\tau}$$

ou plus simplement, d'après 1.A.2 ♦ :

$$\text{div} \vec{P} = \rho \vec{F} - \text{grad} p + \text{div} \vec{\tau} \quad (2.11)$$

### 2.4.3.2. – CRITÈRES RELATIFS AUX FORCES DE VOLUME

Dans beaucoup d'applications, les sources volumiques de quantité de mouvement (qui sont les forces de volume appliquées au fluide) sont négligeables devant les autres sources. Lorsqu'elles ne le sont pas, trois situations sont principalement à envisager.

♣ *Les forces de pesanteur sont prépondérantes devant les forces de pression (écoulements à surface libre, voir Ch. 8)*

Alors,  $\vec{q}_I = \rho \vec{F} = \rho \vec{g}$  et l'on devra prendre comme grandeur de référence un terme du même ordre, à savoir :  $q_I^0 = \rho^0 g$ .

Le critère de similitude relatif aux forces de pesanteur est ici (cf. 2.5) :

$$\Gamma_g = \frac{q_I^0 L^0}{\rho^0 V^0 \cdot V^0} = \frac{\rho^0 g L^0}{\rho^0 (V^0)^2}$$

$$\Gamma_g = \frac{g L^0}{(V^0)^2} \quad (2.12a)$$

L'inverse de  $\Gamma_g$  est connu sous le nom de **nombre de Froude Fr** :

$$\boxed{Fr = \frac{1}{\Gamma_g} = \frac{(V^0)^2}{g L^0}} \quad (2.12b)$$

◆ *Les forces de pesanteur sont du même ordre de grandeur que les forces de pression (écoulements en charge, voir Ch. 6)*

Comme on a dans un écoulement isochore  $\vec{q}_I = \rho \vec{g} = -\overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z)$ , où  $\rho g z$  est homogène à une pression, on voit qu'il est également possible de prendre pour valeur de référence  $q_I^0$  un gradient de pression caractéristique de l'écoulement. La pression statique  $p$  étant liée à la vitesse, on convient ordinairement de choisir :

$$p^0 = \rho^0 (V^0)^2 \quad (2.13a)$$

c'est-à-dire :  $p^0 = 2$  fois la pression dynamique correspondant à la vitesse de référence.

Quant à la référence  $q_I^0$  (qui doit être une grandeur scalaire, cf. § 2.4.3.1), ce sera tout naturellement le quotient de la pression de référence par la longueur de référence :

$$q_I^0 = (\overrightarrow{\text{grad}} p)^0 = \frac{p^0}{L^0} \quad (2.13b)$$

d'où, en appliquant la définition (2.5) :

$$\Gamma_p = \frac{q_I^0 L^0}{\rho^0 V^0 \cdot V^0} = \frac{p^0 (V^0)^2}{L^0} \frac{L^0}{\rho^0 (V^0)^2}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\Gamma_p = 1} \quad (2.13c)$$

Il n'y a donc plus ici de condition de similitude vis-à-vis des forces de pesanteur : cette similitude se trouve automatiquement assurée avec un rapport d'échelle égal à 1.

🎵 On aura noté qu'ici, le terme  $\overrightarrow{\text{grad } p}$  a été traité comme une source volumique, ce qui est parfaitement licite vu le caractère bivalent de la pression, signalé au paragraphe 1.3.4.4.

♥ *Les forces d'Archimède (ou forces de flottabilité) sont du même ordre de grandeur que les forces de pression (convection mixte)*

Sous l'influence du gradient de température, le fluide subit des variations de masse volumique à partir d'une valeur de référence  $\rho_\infty$  (PTC, Ch. 5 et 6).

La force ascensionnelle exercée sur une particule fluide s'écrit :

$$\vec{F} = - \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty} \vec{g}, \text{ et } \vec{q}_I = \rho \vec{F} \quad (2.14)$$

En introduisant la « dilatabilité » du fluide :

$$\beta = - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (2.15a)$$

et en admettant que  $\rho$  est une fonction linéaire de  $T$ , on peut faire apparaître les températures si l'on écrit :

$$\beta = - \frac{1}{\rho_\infty} \frac{\rho_\infty - \rho}{T_\infty - T}, \text{ soit : } \frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty} = \beta (T - T_\infty) \quad (2.15b)$$

De ce fait :

$$\vec{q}_I = \rho \beta (T - T_\infty) \vec{g} = \rho \beta \Delta T \vec{g} \quad (2.16a)$$

On prend alors pour valeur de référence :

$$q_I^0 = \rho^0 \beta^0 \Delta T^0 g \quad (2.16b)$$

où  $\Delta T^0$  est un écart caractéristique de température (en général  $T_{\text{paroi}} - T_\infty$ )

On doit donc compter dans le cas présent avec un nouveau critère de similitude :

$$\Gamma_\beta = \frac{q_I^0 L^0}{\rho^0 (V^0)^2} \text{ soit avec (2.16) : } \Gamma_\beta = \frac{g \beta^0 \Delta T^0 L^0}{(V^0)^2} \quad (2.17a)$$

Par chance, le nombre sans dimension employé dans la pratique coïncide avec  $\Gamma_\beta$  et n'est autre que le **nombre de Richardson Ri** (parfois appelé aussi **nombre d'Archimède**) :

$$\boxed{Ri = \Gamma_\beta = \frac{g \beta^0 \Delta T^0 L^0}{(V^0)^2}} \quad (2.17b)$$

### 2.4.3.3. – CRITÈRES RELATIFS AUX FORCES DE SURFACE

Les forces surfaciques se subdivisent en forces normales (pression) et en forces tangentielles. D'après (1.16b), (1.25) et (1.32), on a ici :

$$\bar{q}_s = \bar{T} = -p\bar{I} + \bar{\tau} \quad (2.18)$$

$$\bar{q}_s = \bar{q}_{s1} + \bar{q}_{s2}$$

Il y aura donc *a priori* deux critères de similitude correspondant respectivement à  $\bar{q}_{s1}$  (terme  $p\bar{I}$ ) et  $\bar{q}_{s2}$  (terme  $\bar{\tau}$ ).

### ♣ *Forces de pression*

1. En toute rigueur, la valeur de référence  $q_{s1}^0$  doit être une pression statique ou motrice  $p^0$  (ou une différence de pression). Selon (2.5), (2.10) et (2.13b), le critère  $\Gamma_{pstat}$  associé est donné par :

$$\Gamma_{pstat} = \frac{q_{s1}^0}{C^0 V^0} = \frac{p^0}{\rho^0 V^0 \cdot V^0} \quad (2.19)$$

Il prend alors le nom de **nombre d'Euler  $Eu$**  (ou très souvent de « *coefficient de pression* »  $C_p/2$ ) :

$$\boxed{Eu = \Gamma_{pstat} = \frac{p^0}{\rho^0 (V^0)^2}} \quad (2.20a)$$

2. Mais dans les écoulements isochores ou en convection forcée, on préfère généralement, comme il a déjà été dit au paragraphe 2.4.3.2. ♦, choisir pour  $p^0$  une pression dynamique en relation avec la vitesse de référence, à savoir :

$$q_{s1}^0 = p^0 = \rho^0 (V^0)^2 \quad (2.20b)$$

♪♪ Cette convention donne satisfaction dans les cas cités, mais elle n'est cependant pas la plus logique, et on verra qu'elle peut conduire à des erreurs d'interprétation en convection mixte (§ 2.5.2.2).

Alors, selon (2.5) et (2.10) et (2.13b), le critère  $\Gamma_p$  associé est cette fois :

$$\Gamma_{s1} = \frac{q_{s1}^0}{C^0 V^0} = \frac{p^0}{\rho^0 V^0 \cdot V^0}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\Gamma_p = 1} \quad (2.20c)$$

Il est normal d'aboutir aux mêmes conclusions que dans le paragraphe cité puisque la grandeur de référence est la même dans les deux cas.

### ♦ *Forces de viscosité*

Concernant les grandeurs de référence à prendre en compte, une question nouvelle et importante va maintenant être soulevée avec la caractérisation du critère de similitude relatif aux forces de viscosité. Pour les sources surfaciques engendrées par un mécanisme de diffusion (dans le cas présent, la diffusion de quantité de mouvement, cf. § 1.3.6.5 ; plus loin, la diffusion de masse ou de chaleur), on se trouve devant une alternative, selon que l'attention est portée en priorité sur le champ de la fonction inconnue (ici : le champ de vitesse) ou sur ses gradients (ici : les contraintes de viscosité).

### I. – Référence aux gradients de vitesse

Si l'on s'intéresse plutôt au champ des contraintes (qui sont proportionnelles aux gradients de vitesse, relation (1.18)), on reprendra la formulation (2.18) en écrivant :

$$\overline{q}_{S2} = \overline{\tau}$$

Ceci permet d'adopter comme valeur scalaire de référence  $q_{S2}^0$  une contrainte visqueuse à la paroi, que l'on note  $\tau_p$  :

$$q_{S2}^0 = \tau^0 = \tau_p \quad (\text{contrainte à la paroi}) \quad (2.21)$$

On obtient immédiatement le critère  $\Gamma_\tau$  correspondant en revenant à la définition (2.5) :

$$\Gamma_\tau = \frac{\tau_p}{\rho^0 (V^0)^2} \quad (2.22a)$$

Le nombre sans dimension usuel est le **coefficient de frottement**  $C_f$ , égal à  $2\Gamma_\tau$ ; on l'écrit habituellement :

$$\boxed{\frac{1}{2} C_f = \Gamma_\tau = \frac{\tau_p}{\rho^0 (V^0)^2}} \quad (2.22b)$$

L'introduction du facteur  $1/2$  a pour origine le souci d'exprimer le dénominateur de  $C_f$  comme une énergie cinétique ( $\rho V^2/2$ ). Ce n'est pas très heureux, mais c'est maintenant une tradition.

### II. - Référence au champ de vitesse

Si l'on veut au contraire mettre l'accent sur le champ de vitesse, il faut introduire l'expression détaillée de  $\tau$  :

$$\overline{q}_{S2} = \overline{\tau} = 2\mu \overline{D}$$

avec :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) = (D)_{ij} \quad (1.9)$$

et :

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial (V^0 V^+)}{\partial (L^0 x^+)} = \frac{V^0}{L^0} \frac{\partial V^+}{\partial x^+}$$

Pour établir la forme que doit avoir ici la grandeur de référence  $q_{S2}^0$ , on exprimera  $\tau_{ij}$  en fonction des grandeurs adimensionnelles déjà définies :

$$\tau_{ij} = 2\mu \varepsilon_{ij} = 2\mu^0 \mu^+ \frac{1}{2} \frac{V^0}{L^0} \left( \frac{\partial V_i^+}{\partial x_j^+} + \frac{\partial V_j^+}{\partial x_i^+} \right) \quad (2.23)$$

ce qui conduit à faire apparaître une viscosité dynamique de référence  $\mu^0$ , évaluée dans des conditions de température à préciser, telle que  $\mu^+ = \mu/\mu^0$ . D'où :

$$\overline{q}_{S2} = \overline{\tau} = \mu^0 \frac{V^0}{L^0} 2\mu^+ \overline{D}^+ \quad (2.24)$$

Puisque l'on doit pouvoir écrire :  $\overline{\tau} = \tau^0 \overline{\tau}^+$ , conformément à la définition des grandeurs réduites, il faut donc *obligatoirement* que :



$$\tau^0 = \mu^0 \frac{V^0}{L^0} \quad (2.25)$$

Toujours d'après (2.5), l'expression du critère de similitude est maintenant :

$$\Gamma_v = \frac{\tau^0}{\rho^0 V^0 \cdot V^0}$$

$$\Gamma_v = \frac{\mu^0}{\rho^0 V^0 L^0} = \frac{\nu^0}{V^0 L^0} \quad (2.26a)$$

Ce terme est plus connu sous sa forme  $l / \Gamma_v$ , qui est le **nombre de Reynolds  $Re$** , déjà cité au début du présent chapitre (§ 2.2.1 et 2.2.2) :

$$\boxed{Re = \frac{l}{\Gamma_v} = \frac{V^0 L^0}{\nu^0}} \quad (2.26b)$$

Comme il a été dit pour le nombre de Strouhal (§ 2.4.2),  $Re$  a toujours le sens d'un critère de similitude, mais l'échelle des valeurs numériques est inversée par rapport à  $\Gamma_v$ , ce qui est un peu regrettable.

#### 2.4.3.4. – CAS OÙ IL N'Y A PAS DE VITESSE EXPÉRIMENTALE DE RÉFÉRENCE

♣ C'est le cas qui se rencontre en convection libre, où le seul paramètre  $V^0$  expérimental que l'on puisse prendre pour référence (la vitesse du fluide loin des parois) est égal à zéro. La solution consiste alors à adopter pour  $V^0$  une grandeur homogène à une vitesse, et liée à d'autres paramètres pour lesquels existe une valeur expérimentale caractéristique.

En l'occurrence, sachant que la flottabilité qui est à l'origine de la convection naturelle est liée à l'existence d'un écart de température  $\Delta T^0$  et d'une dilatabilité  $\beta$  dans le fluide, ainsi qu'à la pesanteur, le groupement le plus simple homogène à une vitesse et contenant ces ingrédients est :

$$V^0 = (g \beta^0 \Delta T^0 L^0)^{1/2} \quad (2.27)$$

Les critères de similitude construits sur cette base seront affectés de l'indice «  $l$  » pour rappeler qu'il s'agit de convection *libre*.

◆ En remplaçant  $V^0$  par (2.27), le critère de similitude  $\Gamma_\beta$  (2.17) relatif aux forces de pesanteur :

$$\Gamma_\beta = \frac{g \beta^0 \Delta T^0 L^0}{(V^0)^2}$$

devient alors :

$$\boxed{\Gamma_{\beta l} = 1} \quad (2.28)$$

ce qui a pour conséquence d'assurer automatiquement la similitude à l'échelle 1 vis-à-vis des forces de pesanteur.

♥ Quant au critère de similitude relatif aux forces de viscosité, il peut là encore revêtir deux aspects :

I.- Avec référence au champ de vitesse

$$\Gamma_v = v^0 / V^0 L^0 \quad (2.26a)$$

devient :

$$\Gamma_{vl} = \frac{v^0}{(g \beta \Delta T^0)^{1/2} (L^0)^{3/2}} \quad (2.29a)$$

Le problème est qu'on ne l'utilise jamais ! Il a dès l'origine cédé la place à son inverse élevé au carré, baptisé **nombre de Grashof**  $Gr$  :

$$\boxed{Gr = \frac{1}{\Gamma_{vl}^2} = \frac{g \beta \Delta T^0 (L^0)^3}{(v^0)^2}} \quad (2.29b)$$

Une fois de plus, mais ce n'est pas la dernière, nous sommes confrontés à une tradition qui a imposé un nombre sans dimension très différent du critère de similitude originel. Malgré tout,  $Gr$  est aussi un critère de similitude (si  $\Gamma_{vl}$  a la même valeur dans deux systèmes différents, les nombres de Grashof sont égaux aussi), mais avec un renversement et une forte distorsion des valeurs numériques.

II.- Avec référence aux gradients de vitesse

$$\Gamma_\tau = \frac{\tau_p}{\rho^0 (V^0)^2} \quad (2.22a)$$

devient quant à lui :

$$\Gamma_{\tau l} = \frac{\tau_p}{\rho^0 g \beta^0 \Delta T^0 L^0} \quad (2.30)$$

Voilà un critère de similitude qui est resté complètement ignoré, et qui n'a donc jamais reçu de patronyme. On pourrait le considérer comme un *coefficient de frottement modifié*  $C_f^* / 2$ .

♠ Enfin, le critère  $\Gamma_p$  (2.19, 2.20) relatif aux forces de pression conserve la même expression formelle, dans laquelle la vitesse de référence  $V^0$  sera soit une vitesse mesurable (dans un écoulement interne), soit la vitesse conventionnelle  $\sqrt{g \beta \Delta T L}$ .

#### 2.4.3.5.- ÉCRITURE ADIMENSIONNELLE DU BILAN DE QUANTITÉ DE MOUVEMENT

##### 1. – **Base de départ**

Le bilan de quantité de mouvement est exprimé par l'équation (2.11), que nous rappelons tout d'abord :

$$\overline{\text{div}} \overline{\vec{P}} = \overline{\rho} \overline{\vec{F}} - \overline{\text{grad}} \overline{p} + \overline{\text{div}} \overline{\vec{\tau}}$$

avec, si l'on développe les termes en divergence selon (1.33a) et (1.33c) :

$$\begin{aligned} \overline{\text{div}} \overline{\vec{P}} &= \overline{\text{grad}} \overline{\vec{V}} \cdot \overline{\rho} \overline{\vec{V}} \\ \overline{\text{div}} \overline{\vec{\tau}} &= \mu \left( \overline{\Delta} \overline{\vec{V}} + \overline{\text{grad}} \overline{\text{div}} \overline{\vec{V}} \right) \end{aligned}$$

En adoptant des *références au champ de vitesse*, la transposition adimensionnelle de (2.11) aura la forme générale :

$$\begin{aligned} \overline{\text{grad}} \overline{V^+} \cdot \overline{\rho^+} \overline{V^+} &= (1 \text{ ou } \Gamma_g \text{ ou } \Gamma_\beta) \overline{\rho^+} \overline{F^+} - (1 \text{ ou } \Gamma_{p \text{ stat}}) \overline{\text{grad}} \overline{p^+} \\ &+ \Gamma_\nu \mu^+ \left( \overline{\Delta} \overline{V^+} + \overline{\text{grad}} \overline{\text{div}} \overline{V^+} \right) \end{aligned} \quad (2.31)$$

Nous donnons dans le paragraphe suivant les formes habituelles dans les principales situations rencontrées.

## 2. – Applications (avec références au champ de vitesse)

### ♣ *Ecoulements à surface libre* (§ 2.4.3.2. ♣ et Ch. 8)

S'agissant d'un fluide isochore dans le champ de pesanteur :  $\overline{\vec{F}} = \overline{\vec{g}}$ . Comme  $g$  et  $\rho$  sont des constantes,  $\overline{g^+} = \overline{g}/g$  est le vecteur unitaire selon la verticale descendante, et  $\overline{\rho^+} = 1$ .

En outre, les forces de gravité sont prépondérantes par rapport aux forces de pression. Les critères de similitude concernés sont donc les nombres de Froude et de Reynolds. Il vient alors :

$$\overline{\text{grad}} \overline{V^+} \cdot \overline{V^+} = \frac{1}{Fr} \overline{g^+} + \frac{1}{Re} \mu^+ \overline{\Delta} \overline{V^+} \quad (2.32)$$

### ◆ *Ecoulements en charge* (§ 2.4.3.2. ◆ et Ch. 5)

Les conditions sont les mêmes, à ceci près que les forces de gravité et de pression sont du même ordre de grandeur. On fait alors intervenir la pression motrice  $p^*$  (1.37a) :

$$\overline{\rho} \overline{\vec{g}} - \overline{\text{grad}} \overline{p} = - \overline{\text{grad}} \overline{p^*}$$

Le critère de similitude correspondant est  $\Gamma_p = 1$  (§ 2.4.3.2 ◆), d'où :

$$\overline{\text{grad}} \overline{V^+} \cdot \overline{V^+} = - \overline{\text{grad}} (\overline{p^*})^+ + \frac{1}{Re} \mu^+ \overline{\Delta} \overline{V^+} \quad (2.33a)$$

avec :

$$(\overline{p^*})^+ = \frac{p^*}{p^0} = \frac{p^*}{\rho^0 (V^0)^2} \quad (2.33b)$$

♥ *Convection mixte* (§ 2.4.3.2.♥ et PTC, Ch. 6)

A partir de (2.15) et (2.16), la température adimensionnée est définie par :

$$T^+ = T / \Delta T^0 \quad \text{ou} \quad \Delta T^+ = \Delta T / \Delta T^0 \quad (2.34a)$$

La masse volumique est toujours supposée constante, sauf dans le terme de flottabilité, donc  $\rho^+ = 1$ .

Les critères de similitude qui interviennent dans ce cas sont  $Ri$  (2.17b),  $Re$  (2.26b) et  $Eu$  (2.20a), de sorte que (2.31) s'écrit :

$$\overline{\overline{\text{grad} V^+}} \cdot \overline{V^+} = Ri T^+ \overline{g^+} - Eu \overline{\text{grad} (p^*)^+} + \frac{1}{Re} \mu^+ \overline{\Delta V^+} \quad (2.34b)$$

avec

$$(p^*)^+ = p^* / p^0 \quad (2.34c)$$

♠ *Convection libre* (§ 2.4.3.4 et PTC, Ch.5)

Le critère de similitude  $\Gamma_\beta$  relatif aux forces de pesanteur est égal à 1. Le critère relatif aux forces de viscosité est le nombre de Grashof ; celui relatif aux forces de pression reste  $\Gamma_p$

(§ 2.4.3.4♠). On a donc :

$$\overline{\overline{\text{grad} V^+}} \cdot \overline{V^+} = T^+ \overline{g^+} - \Gamma_p \overline{\text{grad} (p^*)^+} + \frac{1}{Gr^{1/2}} \mu^+ \overline{\Delta V^+} \quad (2.35)$$

### 3. – Avec référence aux gradients de vitesse

Si l'on choisit de se référer aux gradients de vitesse pour adimensionner le tenseur des contraintes (§ 2.4.3.3♦), le critère de similitude relatif aux forces de viscosité est le coefficient de frottement  $C_f$  et l'équation (2.11) devient :

$$\overline{\overline{\text{grad} V^+}} \cdot \rho^+ \overline{V^+} = (1 \text{ ou } \frac{1}{Fr} \text{ ou } Ri) \rho^+ \overline{F^+} - (1 \text{ ou } Eu) \overline{\text{grad} p^+} + \frac{1}{2} C_f \overline{\text{div} \tau^+} \quad (2.36)$$

Cette écriture est moins utilisée que la précédente pour le calcul du champ de vitesse. Par contre,  $C_f$  est un paramètre intéressant lorsqu'il s'agit de présenter des résultats qui font intervenir le frottement aux parois.

## 2.4.4. – Les critères de similitude relatifs aux sources de masse

### 2.4.4.1. – GRANDEURS ET RELATIONS DE BASE

La grandeur physique  $C$  qui intervient dans l'équation (2.6) est ici la masse volumique  $\rho$  :

$$C = \rho \quad (\text{ou } \rho_A \text{ pour un constituant } A \text{ d'un mélange})$$

$$C^0 = \rho^0 \quad (\text{ou } \rho_A^0) : \text{valeur de référence}$$

$$C^+ = \rho^+ = \frac{\rho}{\rho^0} \quad \left( \text{ou } \rho_A^+ = \frac{\rho_A}{\rho_A^0} \right) \quad (2.37)$$

Nous partirons maintenant de l'équation (1.65a) qui fait intervenir le terme de diffusion du constituant A dans le mélange :

$$\frac{\partial \rho_A}{\partial t} + \text{div}(\rho_A \vec{V}) = q_{IA} + \text{div}\left(\rho D_A \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\rho_A}{\rho}\right)$$

#### 2.4.4.2. – SOURCES VOLUMIQUES

Pour l'espèce A, dont le taux de production local est  $q_{IA}$ , on définit un taux de référence  $q_{IA}^0$ , d'où  $q_{IA}^+ = q_{IA} / q_{IA}^0$ . Le nombre  $\Gamma$  associé à  $q_{IA}$  est donc d'après (2.5) :

$$\boxed{\Gamma_{IA} = \frac{q_{IA}^0 L^0}{\rho_A^0 V^0}} \quad (2.38)$$

#### 2.4.4.3. – SOURCES SURFACIQUES

##### ♣ Point de départ

Si l'on est en présence d'un phénomène de diffusion, le débit-masse local du constituant A dans le mélange est, rappelons-le (§ 1.3.6.2) :

$$\vec{q}_{SA} = -\rho D_A \overrightarrow{\text{grad}} \frac{\rho_A}{\rho}$$

Dans ce qui va suivre, le raisonnement et les conclusions ne sont en rien modifiés si l'on se place dans le cas, plus simple à écrire, où  $\rho$  varie peu, car alors :

$$\vec{q}_{SA} = -\rho D_A \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A \quad (2.39)$$

Pour exprimer le critère de similitude  $\Gamma$  correspondant, on retrouve le même problème qu'avec la diffusion de quantité de mouvement (§ 2.4.3.3. ♦): deux possibilités se présentent, selon que la référence sera choisie dans le champ de concentration ou dans les gradients de concentration, c'est-à-dire dans les flux de masse.

##### ♦ Avec référence aux concentrations

Dans la première éventualité, on introduit à partir de (2.39) un scalaire de référence :

$$q_{SA}^0 = D_A^0 \left(\overrightarrow{\text{grad}} \rho_A\right)^0 \quad (2.40)$$

$D_A^0$  est un coefficient de diffusion évalué dans des conditions de référence ( $T^0$ ,  $p^0$ , etc.) à préciser. Si  $D_A$  varie peu en fonction des paramètres de l'écoulement, on aura évidemment  $D_A^0 = D_A$ , et  $D_A^+ = 1$ .

Le gradient de référence  $\left(\overrightarrow{\text{grad}} \rho_A\right)^0$ , quant à lui, est déterminé par le choix de  $\rho_A^0$  et de  $L^0$ . En effet, en passant en variables réduites :

$$\overrightarrow{\text{grad}} \rho_A = \frac{1}{L^0} \overrightarrow{\text{grad}} (\rho_A^+ \rho_A^0) = \frac{\rho_A^0}{L^0} \overrightarrow{\text{grad}} \rho_A^+ \quad (2.41a)$$

Ensuite, ce gradient est lui-même décomposé selon les caractéristiques du champ scalaire. Puisque  $\overrightarrow{\text{grad}} \rho_A^+ = \frac{\overrightarrow{\text{grad}} \rho_A}{(\overrightarrow{\text{grad}} \rho_A)^0}$  on a obligatoirement :

$$(\overrightarrow{\text{grad}} \rho_A)^0 = \frac{\rho_A^0}{L^0} \quad (2.41b)$$

D'après (2.5) le critère de similitude, que nous noterons  $\Gamma_{AD}$ , a pour expression :

$$\Gamma_{AD} = \frac{q_{SA}^0}{\rho_A^0 V^0} = \frac{1}{\rho_A^0 V^0} D_A^0 \frac{\rho_A^0}{L^0}$$

soit :  $\Gamma_{AD} = \frac{D_A^0}{V^0 L^0} \quad (2.42)$

On remarquera que  $\Gamma_{AD}$  peut s'écrire aussi :  $\Gamma_{AD} = \frac{D_A^0}{v^0} \frac{v^0}{V^0 L^0}$ , où le dernier groupement est égal à  $1/Re$ . Quant au premier groupement, nous le retrouverons au § 2.5.1. sous le patronyme de **nombre de Schmidt Sc** :

$$Sc = \frac{v^0}{D_A^0} \quad (2.43)$$

L'expression courante du critère de similitude  $\Gamma_{AD}$  est finalement :

$$\boxed{\Gamma_{AD} = \frac{1}{Sc Re}} \quad (2.44)$$

### ♥ Avec référence aux gradients de concentration

Dans le second cas, on choisira pour  $q_{SA}^0$  une densité de flux de référence au niveau d'une paroi :

$$q_{SA}^0 = q_{Ap} \quad \text{densité de flux à la paroi}$$

Selon (2.5) le critère de similitude, qui sera noté  $\Gamma_{Ap}$  pour le distinguer du précédent, s'écrira cette fois-ci :

$$\Gamma_{Ap} = \frac{q_{Ap}}{\rho_A^0 V^0} \quad (2.45)$$

Pour la formulation courante de ce paramètre, le lecteur voudra bien se reporter au paragraphe 2.5.3.1.

♠ *S'il n'y a pas de vitesse expérimentale de référence*

Cette situation, déjà envisagée au § 2.4.3.4., concerne ici la *convection libre massique*. Elle est analysée dans le chapitre 7 de PTC.

### 2.4.4.3. – ECRITURE ADIMENSIONNELLE DU BILAN DE MASSE

La transposition de l'équation générale (2.6) au bilan de masse peut maintenant s'écrire :

- avec référence aux concentrations :

$$\operatorname{div}(\rho_A^+ \vec{V}^+) = \Gamma_{IA} q_{IA}^+ - \frac{1}{Sc Re} \operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho_A^+ \quad (2.46a)$$

- avec référence aux flux de masse :

$$\operatorname{div}(\rho_A^+ \vec{V}^+) = \Gamma_{IA} q_{IA}^+ - \Gamma_{Ap} \operatorname{div} \vec{q}_{SA}^+ \quad (2.46b)$$

où  $\vec{q}_{SA}^+ = \vec{q}_{SA} / q_{Ap}$

## 2.4.5. - Les critères de similitude relatifs aux sources d'énergie

### 2.4.5.1. – GRANDEURS ET RELATIONS DE BASE

Comme on l'a expliqué au chapitre 1, le bilan d'enthalpie est beaucoup plus commode à utiliser que le bilan d'énergie. Pour établir les différents critères de similitude relatifs aux sources d'énergie, nous utiliserons donc la formulation enthalpique (1.52) en régime permanent :

$$\operatorname{div}(\rho h \vec{V}) = P + \Phi + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} p + \operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T) - \operatorname{div} \vec{\phi}_r \quad (2.47a)$$

dans laquelle les sources de volume sont  $P$ ,  $\Phi$ ,  $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} p$ , les sources de surface (flux de diffusion) étant représentées par  $\operatorname{div}(\lambda \overrightarrow{\operatorname{grad}} T)$  et  $\operatorname{div} \vec{\phi}_r$ .

Notons bien préalablement que les conclusions seraient identiques en partant de la forme (1.51) qui fait intervenir l'énergie interne  $e$ , puisque  $e$  et  $h$  ont la même dimension.

Nous avons donc ici :

$$\begin{aligned} C &= \rho h & ; & & C^\circ &= \rho^\circ h^\circ \\ C^+ &= \rho^+ h^+ & \text{avec} & & h^+ &= h / h^\circ \end{aligned} \quad (2.47b)$$

Pour la grandeur de référence  $h^0$ , comme l'enthalpie est liée à la température, on pose tout naturellement :

$$h^0 = C_p^0 T^0 \quad \text{soit :} \quad C^0 = \rho^0 C_p^0 T^0 \quad (2.47c)$$

En principe,  $C_p^0$  est une chaleur massique de référence, évaluée dans des conditions de température et de pression à préciser. Mais dans la majorité des cas, ce paramètre peut être considéré comme constant :

$$C_p^0 = C_p \quad ; \quad C_p^+ = 1$$

Quant à la température de référence, c'est en pratique *un écart de température caractéristique*  $\Delta T^0$ , dans la mesure où  $C^0$  ne représente pas une enthalpie totale, mais une différence entre deux états.

Voyons maintenant quels nouveaux critères  $\Gamma$  vont apparaître dans l'équation adimensionnelle de bilan.

#### 2.4.5.2. – SIMILITUDE VIS-A-VIS DES SOURCES VOLUMIQUES

##### ♣ Critère relatif à la puissance thermique $P$

Lorsqu'il existe, au sein du fluide, une source volumique de chaleur  $P = P(x, y, z, t)$  (dans les écoulements réactifs par exemple), on doit choisir pour celle-ci une valeur de référence  $P^0$ . Alors :

$$q_I = P \quad ; \quad q_I^0 = P^0$$

Le critère de similitude (2.5) relatif à une source de volume est, rappelons-le :

$$\Gamma_I = \frac{q_I^0 L^0}{C^0 V^0}$$

soit ici, en le notant  $\Gamma_P$  :

$$\boxed{\Gamma_P = \frac{P^0 L^0}{\rho^0 C_p \Delta T^0 V^0}} \quad (2.48)$$

Ce terme peu employé est resté dans l'anonymat.

##### ◆ Critère relatif à l'énergie de pression

Dans l'équation (1.52), la source de volume correspondante est :

$$q_I = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad } p}$$

dont la valeur de référence doit s'écrire, *en convection mixte* :

$$q_I^0 = V^0 \frac{p^0}{L^0}$$

Le critère de similitude  $\Gamma_{ep}$  relatif à cette source est :  $\Gamma_{ep} = \frac{q_I^0 L^0}{C^0 V^0}$ , soit :

$$\boxed{\Gamma_{ep} = \frac{p^0}{\rho^0 C_p \Delta T^0}} \quad (2.49a)$$



En convection forcée, avec  $p^0 = \rho^0 (V^0)^2$ , conformément à la convention usuelle (2.13a), le critère correspondant  $\Gamma_{epf}$  devient le **nombre d'Eckert  $Ec$**  :

$$Ec = \Gamma_{epf} = \frac{q_I^0 L^0}{C^0 V^0} = \frac{1}{\rho^0 C_p \Delta T^0 V^0} V^0 \frac{\rho^0 (V^0)^2}{L^0} L^0$$

$$\boxed{Ec = \Gamma_{epf} = \frac{(V^0)^2}{C_p \Delta T^0}} \quad (2.49b)$$

Revenant maintenant au critère  $\Gamma_{ep}$  précédent (2.49a), on voit qu'il peut aussi s'écrire comme le produit de  $Ec$  et du nombre d'Euler (2.20a) :

$$\boxed{\Gamma_{ep} = Eu Ec} \quad (2.49c)$$

### ♥ Critère relatif au terme de dissipation

Il s'agit maintenant de la fonction de dissipation (1.42) :  $\Phi = \tau_{ij} \partial V_i / \partial x_j$ .

De même que pour le bilan de quantité de mouvement (§.2.4.3.3 ♦, coefficients  $\Gamma_\tau$  et  $\Gamma_\nu$ ), deux voies peuvent être empruntées ici pour exprimer le terme de source et sa valeur de référence.

I. – Ou bien on écrit simplement :

$$q_I \approx \tau \frac{\partial V}{\partial x}$$

ce qui oblige à prendre comme grandeur de référence :

$$q_I^0 = \Phi^0 = \tau^0 \frac{V^0}{L^0} \quad (2.50)$$

avec, comme dans (2.21) :

$$\tau^0 = \tau_p \quad (\text{contrainte à la paroi}).$$

La condition de similitude s'exprime alors au moyen du nombre sans dimension :

$$\Gamma_{\Phi\tau} = \frac{q_I^0 L^0}{C^0 V^0} = \frac{1}{\rho^0 C_p \Delta T^0 V^0} \tau_p \frac{V^0}{L^0} L^0$$

$$\Gamma_{\Phi\tau} = \frac{\tau_p}{\rho^0 C_p \Delta T^0} \quad (2.51a)$$

Il se trouve que  $\Gamma_{\Phi\tau}$  est le produit de deux critères de similitude qui nous sont déjà connus, à savoir le coefficient de frottement  $\frac{1}{2} C_f$  et le nombre d'Eckert  $Ec$  (parag. précédent), si bien qu'il n'a jamais bénéficié d'une identité propre. On écrit simplement :

$$\boxed{\Gamma_{\Phi\tau} = \frac{1}{2} C_f Ec} \quad (2.51b)$$

II. – Ou bien on décompose  $\Phi$  :

$$\Phi = \tau_{ij} \frac{\partial V_i}{\partial x_j} = \mu \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial V_i}{\partial x_j}$$

ce qui conduit au choix d'une autre référence, de même forme que  $\Phi$  :

$$q_I^0 = \Phi^0 = \mu^0 \frac{V^0}{L^0} \frac{V^0}{L^0} \quad (2.52)$$

et donc à un autre critère de similitude (néanmoins équivalent au précédent) :

$$\Gamma_{\Phi_V} = \frac{l}{\rho^0 C_p \Delta T^0 V^0} \mu^0 \frac{(V^0)^2}{(L^0)^2} L^0$$

$$\Gamma_{\Phi_V} = \frac{v^0 V^0}{C_p \Delta T^0 L^0} \quad (2.53a)$$

Du côté de la terminologie, la situation est la même que pour le précédent critère. On vérifie facilement que  $\Gamma_{\Phi_V}$  est le quotient du nombre d'Eckert  $Ec$  par le nombre de Reynolds  $Re$ , et on se borne à écrire :

$$\boxed{\Gamma_{\Phi_V} = \frac{Ec}{Re}} \quad (2.53b)$$

#### 2.4.5.3. – SIMILITUDE VIS-A-VIS DES SOURCES SURFACIQUES

On se souvient que dans l'équation d'énergie les sources de surface sont constituées par la diffusion thermique et le terme de rayonnement.

##### ♣ Critère relatif à la diffusion thermique

Le terme source est la densité de flux de chaleur  $\varphi$  ( $W \cdot m^{-2}$ ).

$$\vec{q}_S = \vec{\varphi} = -\lambda \overrightarrow{\text{grad } T}$$

Une fois de plus, nous nous trouvons devant une alternative : mettre l'accent sur le flux thermique ou sur le champ de température.

##### I. – Avec référence au flux de chaleur

Dans la première éventualité, on est amené à choisir un flux de référence, habituellement sur une paroi, d'où la notation :  $\varphi_p$

$$q_S^0 = \varphi_p, \quad \text{flux thermique à la paroi}$$

$$q_S^+ = \varphi / \varphi_p \quad (2.54)$$

On obtient immédiatement le critère correspondant,  $\Gamma_\varphi = q_S^0 / C^0 V^0$ , qui est le **nombre de Stanton  $St$** , autrefois appelé dans la littérature francophone **nombre de Margoulis** :

$$\boxed{St = \Gamma_\varphi = \frac{\varphi_p}{\rho^0 C_p \Delta T^0 V^0}} \quad (2.55)$$

II. – Avec référence au champ de température

Dans la seconde éventualité, on décompose l'expression de  $q_S^0$ , comme dans (2.25) ou (2.41b) :

$$\begin{aligned} \vec{q}_S &= -\lambda \overrightarrow{\text{grad } T} \\ q_S^0 &= \lambda^0 \frac{\Delta T^0}{L^0} \end{aligned} \quad (2.56)$$

Le paramètre  $\lambda^0$  est une conductivité thermique de référence, évaluée dans des conditions conventionnelles.

Le critère de similitude s'écrit donc cette fois-ci :

$$\begin{aligned} \Gamma_a &= \frac{q_S^0}{C^0 V^0} = \frac{l}{\rho^0 C_p \Delta T^0 V^0} \frac{\lambda^0 \Delta T^0}{L^0} \\ \Gamma_a &= \frac{\lambda^0}{\rho^0 C_p V^0 L^0} = \frac{a^0}{V^0 L^0} \end{aligned} \quad (2.57a)$$

$a^0$  désignant la diffusivité thermique du fluide dans les conditions de référence. On reconnaît dans  $\Gamma_a$  l'inverse du **nombre de Péclet Pe**, d'où :

$$\boxed{Pe = \frac{l}{\Gamma_a} = \frac{V^0 L^0}{a^0}} \quad (2.57b)$$

Ce nombre de Péclet est donc représentatif de la similitude. Cela nous rappelle quelque chose : le nombre de Reynolds  $Re$  (voir 2.26b), qui est lui aussi l'inverse du critère de similitude  $\Gamma_v$ .

◆ *Critère relatif au terme de rayonnement*

Dans un milieu gris semi-transparent, isotrope et homogène, si le transfert de chaleur est gouverné par deux températures de référence  $T_1^0$  et  $T_2^0$ , la référence du terme radiatif peut s'approcher par :

$$q_S^0 = \varphi_r^0 = n^2 \sigma \left\{ (T_1^0)^4 - (T_2^0)^4 \right\} \quad (\text{W/m}^2) \quad (2.58)$$

où  $n$  est l'indice de réfraction du milieu (sans dimension), et  $\sigma$  la constante de Stefan-Boltzmann ( $\text{W/m}^2 \cdot \text{K}^4$ ).

Le critère de similitude correspondant  $\Gamma_r$  est alors :

$$\Gamma_r = \frac{q^0}{C^0 V^0} = \frac{n^2 \sigma \left\{ (T_1^0)^4 - (T_2^0)^4 \right\}}{\rho^0 C_p \Delta T^0 V^0} \quad (2.59a)$$

où  $\Delta T^0 = T_1^0 - T_2^0$

Lorsque l'écart des températures n'est pas trop grand, on peut adopter l'approximation linéaire :

$$(T_1^0)^4 - (T_2^0)^4 \approx 4 \Delta T^0 T_m^3$$

avec  $T_m = (T_1^0 + T_2^0) / 2$ .

Ceci donne une expression simplifiée du critère de similitude :

$$\boxed{\Gamma_r = \frac{4 n^2 \sigma T_m^3}{\rho^0 C_p V^0}} \quad (2.59b)$$

#### 2.4.5.4. – CAS OÙ IL N'Y A PAS DE $V^0$ EXPÉRIMENTAL

En convection libre, on retrouve le problème déjà soulevé avec l'équation de quantité de mouvement (§ 2.4.3.4), la seule vitesse expérimentale que l'on puisse prendre pour référence, celle du fluide loin des parois, étant nulle.

Nous avons vu que la difficulté était tournée en choisissant :

$$V^0 = (g \beta \Delta T^0 L^0)^{1/2}$$

Les termes  $\Phi$  et  $\vec{V} \cdot \overrightarrow{grad p}$  sont habituellement négligeables en convection libre. Les sources concernées sont donc :

♣ *La puissance thermique P*

Le critère  $\Gamma_P$  devient :

$$\Gamma_{Pl} = \frac{P^0 (L^0)^{1/2}}{\rho^0 C_p (g \beta)^{1/2} (\Delta T^0)^{3/2}} \quad (2.60)$$

◆ *La diffusion thermique*

Le critère  $\Gamma_a = 1/Pe = a^0/V^0 L^0$  est remplacé par :

$$\Gamma_{al} = \frac{a^0}{(g \beta \Delta T^0)^{1/2} (L^0)^{3/2}} \quad (2.61a)$$

Ce nombre sans dimension n'est pas utilisé. On rencontre parfois l'inverse de son carré (qui est donc également un critère de similitude) sous l'appellation de **nombre de Boussinesq Bo** :

$$\boxed{Bo = \frac{1}{\Gamma_{al}^2} = \frac{g \beta \Delta T^0 (L^0)^3}{(a^0)^2}} \quad (2.61b)$$

Quant au nombre de Stanton, il se transforme en :

$$\Gamma_{\phi l} = \frac{\phi_p}{\rho^0 C_p (g \beta L^0)^{1/2} (\Delta T^0)^{3/2}} \quad (2.62)$$

resté lui aussi inconnu et anonyme. Appelons-le *nombre de Stanton modifié St\**.

♥ *Le rayonnement*

Les écarts de température étant relativement faibles en convection libre, on peut partir de la forme linéarisée (2.59b) du critère de similitude  $\Gamma_r$ , qui devient donc ici :

$$\Gamma_{rl} = \frac{4 n^2 \sigma T_m^3}{\rho^0 C_p (g \beta \Delta T^0 L^0)^{1/2}} \quad (2.63)$$

2.4.5.5. – ÉCRITURE ADIMENSIONNELLE DE L'ÉQUATION D'ÉNERGIE

1. – *Base de départ*

Tout d'abord, dans le bilan d'énergie, le terme de transport se décompose ainsi :

$$\text{div}(\rho h \vec{V}) = h \text{div} \rho \vec{V} + \rho \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} h$$

En régime permanent :  $\text{div} \rho \vec{V} = 0$ . Sachant que  $h = \rho C_p T$ , l'équation (2.47a) se réduit à :

$$\rho C_p \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T = P + \Phi + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p + \text{div}(\lambda \overrightarrow{\text{grad}} T) + \text{div} \vec{q}_r \quad (2.64)$$

Compte tenu des différents coefficients qui viennent d'être définis, et *en adoptant des références au champ de température*, la transposition adimensionnelle de (2.64) aura la forme générale :

$$\begin{aligned} \vec{V}^+ \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T^+ &= \Gamma_P \text{ (ou } \Gamma_{Pl} \text{)} P^+ + \Gamma_{\Phi V} \Phi^+ + \Gamma_{ep} \vec{V}^+ \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p^+ \\ &+ \Gamma_a \text{ (ou } \Gamma_{al} \text{)} \text{div}(\lambda^+ \overrightarrow{\text{grad}} T^+) - \Gamma_r \text{ (ou } \Gamma_{rl} \text{)} \text{div} \vec{\varphi}_r^+ \end{aligned} \quad (2.65)$$

avec bien entendu  $T^+ = T / \Delta T^0$ ,  $P^+ = P / P^0$ ,  $\Phi^+ = \Phi / \Phi^0$  ( $\Phi^0$  donnée par 2.52) et  $\vec{\varphi}_r^+ = \vec{\varphi}_r / \varphi^0$ .

Compte tenu de la terminologie en usage pour les nombres sans dimension, nous donnons ci-dessous les écritures habituellement rencontrées dans la littérature.

2. – *Formulation habituelle avec référence au champ de température*

♣ *Convection mixte ou forcée*

$$\begin{aligned} \vec{V}^+ \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T^+ &= \Gamma_P P^+ + \frac{Ec}{Re} \Phi^+ + Eu Ec \vec{V}^+ \cdot \overrightarrow{\text{grad}} p^+ \\ &+ \frac{I}{Pe} \text{div}(\lambda^+ \overrightarrow{\text{grad}} T^+) - \Gamma_r \text{div} \vec{\varphi}_r^+ \end{aligned} \quad (2.66)$$

◆ *Convection libre*

$$\vec{V}^+ \cdot \overrightarrow{\text{grad}} T^+ = \Gamma_{Pl} P^+ + \frac{I}{Bo^{1/2}} \text{div}(\lambda^+ \overrightarrow{\text{grad}} T^+) - \Gamma_{rl} \text{div} \vec{\varphi}_r^+ \quad (2.67)$$

### 3. – Avec référence au gradient de température

Le terme de diffusion de la chaleur  $\frac{I}{Pe} \operatorname{div}(\lambda^+ \overrightarrow{\operatorname{grad}} T^+)$  est remplacé par  $St \operatorname{div} \vec{\varphi}^+$ ,  
où  $\vec{\varphi}^+ = \vec{\varphi} / \varphi_p$  (§ 2.4.5.3 ♣).

### 2.4.6. – Le critère de similitude relatif à l'équation d'état du fluide

L'équation d'état du fluide n'est évidemment pas une relation de bilan ; il s'agit d'une loi phénoménologique de comportement. Mais comme elle est appelée dans certains cas à intervenir en complément aux bilans, il n'est pas inutile de la mettre également sous forme réduite, de manière à voir comment elle s'adapte aux exigences de la similitude.

Nous ne considérons que le cas où l'équation d'état est celle du gaz parfait :

$$p/\rho = rT \quad (2.68a)$$

En variables réduites, cela donne :

$$\frac{p^0 p^+}{\rho^0 \rho^+} = r T^0 T^+ \quad (2.68b)$$

où la grandeur :

$$T^+ = T / T^0 \quad (2.68c)$$

est ici un rapport de deux températures absolues, à ne pas confondre avec un écart relatif  $\Delta T^+$  comme dans (2.34a) (voir aussi § 2.4.5.1).

Pour que la variable  $p^+$  soit la même que dans les équations de bilans, il faut prendre la même pression de référence (2.13a), c'est-à-dire :

$$p^0 = \rho^0 (V^0)^2$$

d'où l'on tire de (2.68b):

$$T^+ = \frac{p^+}{\rho^+} \frac{(V^0)^2}{r T^0} \quad (2.68c)$$

On voit donc apparaître un nouveau nombre sans dimension que nous noterons  $\Gamma_{et}$  :

$$\Gamma_{et} = \frac{(V^0)^2}{r T^0} \quad (2.69)$$

et l'équation d'état s'écrit sous forme adimensionnelle :

$$\boxed{T^+ = \Gamma_{et} \frac{p^+}{\rho^+}} \quad (2.70)$$

Visiblement, on est en droit de considérer  $\Gamma_{et}$  comme un critère de similitude relatif au comportement thermodynamique du fluide en écoulement : dans deux expériences caractérisées par une même valeur de ce paramètre  $\Gamma_{et}$ , les solutions de l'équation d'état adimensionnée seront les mêmes.

Cependant, le critère de similitude  $\Gamma_{et}$  (2.69) n'est pas utilisé sous cette forme. On écrit en effet :

$$\Gamma_{et} = \frac{\gamma(V^o)^2}{\gamma r T^o}$$

où  $\gamma$  est le coefficient de la loi isentropique pour le gaz considéré :  $\gamma = C_p / C_v$ . Sachant que la *célérité du son* dans un fluide à température  $T^o$  a pour valeur :

$$c^o = \gamma r T^o \quad (2.71)$$

on peut donc exprimer  $\Gamma_{et}$  sous la forme :

$$\Gamma_{et} = \gamma \left( \frac{V^o}{c^o} \right)^2$$

Le rapport  $V^o/c^o$  est appelé **nombre de Mach  $M$** , et l'on a :

$$\boxed{M = \frac{V^o}{c^o} = \left( \frac{\Gamma_{et}}{\gamma} \right)^{1/2}} \quad (2.72a)$$

d'où :

$$\boxed{\Gamma_{et} = \gamma M^2} \quad (2.72b)$$

Enfin, il va de soi – mais cela va encore mieux en le disant – que l'usage de l'équation d'état est incompatible avec l'hypothèse d'écoulement ou de fluide isochore.

### 2.4.7. – Bilans d'entropie et d'exergie

En ce qui concerne la question – moins classique – des critères de similitude relatifs aux sources d'entropie et d'exergie, elle fait l'objet d'un paragraphe en annexe 2.A.3.

## 2.5. – PARAMÈTRES DE COUPLAGE ET AUTRES NOMBRES SANS DIMENSION

### 2.5.1. – Couplage entre des sources ne relevant pas des mêmes bilans

Les sources de masse, de quantité de mouvement et d'énergie qui interviennent dans les relations de bilans ne sont pas forcément indépendantes les unes des autres, car chacun des fluides dont nous disposons, qu'il soit naturel ou artificiel, possède des propriétés mécaniques et thermiques bien spécifiques. Il se trouve que la similitude est un outil extrêmement intéressant pour mettre leurs couplages en évidence, puisqu'ils se traduisent alors par des relations de dépendance entre certains coefficients  $\Gamma$ , d'où va émerger une nouvelle famille de nombres sans dimension, les *paramètres de couplage*.

L'examen des critères de similitude relatifs aux différentes sources recensées et à la loi d'état (cf. tableau 4 en annexe) fait apparaître les paramètres de couplage les plus importants.

#### 2.5.1.1. – COUPLAGE ENTRE TENSION VISQUEUSE ET DIFFUSION DE MATIÈRE

Ces deux sources jouent le même rôle dans les équations (2.46a) et (2.31). Les critères de similitude  $\Gamma$  concernés sont :

$$\Gamma_{AD} = \frac{D_A^o}{V^o L^o} \quad (2.42) \quad \text{et} \quad \Gamma_v = \frac{v^o}{V^o L^o} \quad (2.26)$$

On observe que le rapport  $\Gamma_v/\Gamma_{AD}$  ne dépend que des propriétés du fluide dans les conditions de référence considérées. C'est le *nombre de Schmidt Sc*, déjà introduit dans les formules (2.43) et (2.44) :

$$\boxed{\frac{\Gamma_v}{\Gamma_{AD}} = Sc = \frac{v^o}{D_A^o}} \quad (2.73)$$

### 2.5.1.2. – COUPLAGE ENTRE DIFFUSION THERMIQUE ET DIFFUSION DE MATIÈRE

C'est maintenant dans les équations (2.46a) et (2.65) que ces deux sources jouent le même rôle. Les conditions de similitude s'expriment ici au moyen des coefficients :

$$\Gamma_{AD} = \frac{D_A^o}{V^o L^o} \quad (2.42) \quad \text{et} \quad \Gamma_a = \frac{a^o}{V^o L^o} \quad (2.57)$$

On découvre alors un autre paramètre de couplage, lui aussi caractéristique du fluide dans les conditions de référence, appelé *nombre de Lewis Le* :

$$\boxed{Le = \frac{\Gamma_a}{\Gamma_{AD}} = \frac{a^o}{D_A^o}} \quad (2.74)$$

### 2.5.1.3. – COUPLAGE ENTRE TENSION VISQUEUSE ET DIFFUSION THERMIQUE

Il existe enfin un troisième terme de couplage, analogue aux deux précédents, qui relie les propriétés diffusives du fluide vis-à-vis de la quantité de mouvement et de la chaleur. Il concerne  $\Gamma_v (= l/Re)$  et  $\Gamma_a (= l/Pe)$ . On le dénomme *nombre de Prandtl* et on le note : **Pr**.

$$Pr = \frac{\Gamma_v}{\Gamma_a} = \frac{Pe}{Re} \quad (2.75a)$$

soit :

$$\boxed{Pr = \frac{v^o}{a^o}} \quad (2.75b)$$

De ce fait, on écrit souvent le nombre de Péclet sous la forme :

$$Pe = Re Pr \quad (2.76)$$

On notera que *la situation est la même en convection libre*, où le rapport des paramètres  $\Gamma_{vl}$  (2.29) et  $\Gamma_{al}$  (2.61) est aussi égal à  $v^o/a^o$ .

Enfin, les trois nombres *Sc*, *Le* et *Pr* sont liés par la relation :

$$Sc = Le Pr \quad (2.77)$$



#### 2.5.1.4. – COUPLAGE ENTRE TENSION VISQUEUSE ET DISSIPATION VISQUEUSE

Nous avons laissé cet exemple pour la fin car il présente un caractère différent des précédents. Les critères  $\Gamma$  impliqués sont ici  $\Gamma_{\phi_v}$  et  $\Gamma_v$  (2.53, 2.26) (ou  $\Gamma_{\phi_\tau}$  et  $\Gamma_\tau$ ), présents dans les équations (2.31) et (2.65) :

$$\Gamma_{\phi_v} = \frac{v^o V^o}{C_p \Delta T^o L^o}, \quad \Gamma_v = \frac{v^o}{V^o L^o}$$

Ecrivons leur rapport. On retrouve le *nombre d'Eckert* (2.49b) :

$$\boxed{\frac{\Gamma_{\phi_v}}{\Gamma_v} = \frac{(V^o)^2}{C_p \Delta T^o} = \Gamma_{ep} = Ec} \quad (2.78)$$

On constate donc que le rapport de  $\Gamma_{\phi_v}$  à  $\Gamma_v$  n'est autre que le critère de similitude  $\Gamma_{ep}$  relatif à l'énergie de pression. Nous avons affaire ici à un nombre sans dimension qui est à la fois un critère de similitude et un paramètre de couplage, mais qui n'est pas caractéristique du fluide utilisé.

Bien évidemment, on aboutit à la même conclusion en comparant  $\Gamma_{\phi_\tau}$  et  $\Gamma_\tau$  (2.51, 2.22) :

$$\Gamma_{\phi_\tau} / \Gamma_\tau = \Gamma_{ep} = Ec \quad (2.79)$$

#### 2.5.1.5. – REMARQUE

Les nombres de Schmidt, Lewis et Prandtl interviennent comme éléments de compatibilité entre certains critères de similitude, puisque ce sont des caractéristiques du fluide concerné. Concrètement, cela signifie que, lorsqu'on étudie un écoulement, on ne peut pas fixer arbitrairement deux critères comme  $\Gamma_v$  et  $\Gamma_a$  si la nature du fluide est imposée : il faut aussi respecter la relation  $\Gamma_v / \Gamma_a = Pr$ .

D'autre part, comme on vient de le voir, ces trois nombres permettent de comparer les aptitudes d'un fluide à diffuser la masse, la quantité de mouvement ou la chaleur. Les valeurs numériques de  $Sc$ ,  $Le$ ,  $Pr$  et leurs conséquences physiques sur les transferts sont présentées et discutées dans PTC.

### 2.5.2. – Comparaison entre sources dans un même bilan

#### 2.5.2.1. – RETOUR SUR LE SENS DES CRITÈRES DE SIMILITUDE

Revenons sur la définition (2.5) des critères de similitude et sur le raisonnement qui l'a précédée. En dehors de leur signification vis-à-vis de la similitude, leur contenu physique est clair :

$$\Gamma = \frac{\text{flux de référence de la source}}{\text{flux de référence transporté par le fluide}} \quad (2.80a)$$

Une illustration très parlante nous en est donnée par le nombre de Stanton (2.55):

$$St = \Gamma_\varphi = \frac{\varphi_p}{\rho^0 C_p \Delta T^0 V^0} = \frac{\text{flux de chaleur à la paroi}}{\text{flux de chaleur transporté}} \quad (2.80b)$$

Intéressons-nous à deux sources 1 et 2 dans un même bilan, et aux critères de similitude associés,  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . Le flux de référence transporté par le fluide est évidemment le même pour les deux. On a donc :

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\text{flux de référence de la source 1}}{\text{flux de référence de la source 2}} \quad (2.81)$$

Ainsi, le rapport  $\Gamma_1 / \Gamma_2$  permet de comparer l'importance de deux sources : il indique l'ordre de grandeur moyen de leur rapport. Si la source 1 est négligeable,  $\Gamma_1 / \Gamma_2 \rightarrow 0$  ; si c'est la source 2 qui est négligeable,  $\Gamma_1 / \Gamma_2 \rightarrow \infty$ .

Cette constatation élémentaire va maintenant être appliquée à quelques cas particuliers.

### 2.5.2.2. – CONVECTION MIXTE

#### ♣ *Forces de flottabilité et forces de viscosité*

En convection mixte (équation 2.34b), les critères relatifs aux forces de flottabilité et de viscosité sont respectivement :

$$\Gamma_\beta = Ri \quad ; \quad \Gamma_\nu = \frac{1}{Re}$$

Leur rapport est le **coefficient de poussée thermique  $RiRe$**  :

$$\frac{\Gamma_\beta}{\Gamma_\nu} = Ri Re \quad (2.82a)$$

En convection forcée,  $Ri Re \rightarrow 0$ , et en convection naturelle  $Ri Re \rightarrow \infty$  : ce ne sont que des cas limites de la convection mixte. Cependant, un choix conventionnel mais judicieux de valeurs de  $RiRe$  peut permettre de fixer des seuils entre convection forcée dominante, convection mixte et convection naturelle dominante, ce qui revêt une certaine importance pratique.

#### ◆ *Forces de flottabilité et forces de pression*

Les critères de similitude à considérer pour comparer ces deux groupes de forces sont maintenant  $\Gamma_\beta = Ri$  et le nombre d'Euler  $Eu = \Gamma_{pstat}$  (2.20a) relatif aux forces de pression. Leur rapport est donc :

$$\frac{\Gamma_\beta}{\Gamma_{pstat}} = \frac{Ri}{Eu} \quad (2.82b)$$

⚠ *Contrairement à ce qu'on lit parfois dans la littérature, ce n'est donc pas le nombre de Richardson seul qui caractérise le rapport entre les forces d'Archimède et les forces de pression, mais bien le rapport  $Ri/Eu$ . Cette propriété se trouve masquée quand on choisit la pression dynamique  $\rho(V^0)^2$  comme pression de référence, car alors le nombre d'Euler devient égal à 1 (§ 2.4.3.3 ♣).*

### 2.5.2.3. – CONVECTION MIXTE OU FORCÉE : DISSIPATION VISQUEUSE ET FLUX DE CHALEUR

Les sources appartiennent maintenant au bilan d'énergie (2.66), et les critères  $\Gamma$  concernés sont :

$$\Gamma_{\phi v} = \frac{Ec}{Re} ; \Gamma_a = \frac{1}{Pe}$$

Sachant que le rapport  $Pe/Re$  est le nombre de Prandtl (2.75), il vient :

$$\frac{\Gamma_{\phi v}}{\Gamma_a} = Pr Ec \quad (2.83)$$

Le groupement  $PrEc$  est parfois appelé **nombre de Brinkman Br**. Il est nul quand la dissipation visqueuse est négligeable.

### 2.5.2.4. – MILIEUX SEMI-TRANSPARENTS : DIFFUSION THERMIQUE ET RAYONNEMENT

Une comparaison est également possible entre le flux radiatif et le flux conductif, représentés par les critères de similitude  $\Gamma_r$  (2.59) et  $\Gamma_a = 1/Pe$  (2.57).

Dans le cas linéarisé :

$$\frac{\Gamma_a}{\Gamma_r} = \frac{1}{Pe \Gamma_r} = \frac{\lambda^0}{\rho^0 C_p V^0 L^0} \frac{\rho^0 C_p V^0}{4 n^2 \sigma T_m^3}$$

$$\frac{\Gamma_a}{\Gamma_r} = \frac{\lambda^0}{4 n^2 \sigma T_m^3 L^0} \quad (2.84)$$

L'expression ci-dessus est valable aussi bien en convection forcée ou mixte qu'en convection naturelle puisque la vitesse de référence  $V^0$  n'y figure pas.

En outre, si l'on considère que la longueur de référence  $L^0$  de l'écoulement est égale à  $1/K$  ( $K$  : coefficient d'absorption du milieu, de dimension  $m^{-1}$ ), on retrouve le **nombre de Stark** :  $K \lambda^0 / 4 n^2 \sigma T_m^3$ .

## 2.5.3. – Autres nombres sans dimension usuels

Il doit être bien évident que les différents concepts mis en œuvre en thermique ne se sont pas toujours dégagés d'une façon linéaire et cohérente (comme dans beaucoup d'autres disciplines), si bien que l'Histoire nous a légué des nombres sans dimension souvent différents des critères de similitude définis par les coefficients  $\Gamma$ . Pire encore, certains d'entre eux ne sont pas du tout des critères de similitude ! Voici les plus utilisés.

### 2.5.3.1. – DIFFUSION MASSIQUE : RÉFÉRENCE AUX GRADIENTS DE CONCENTRATION

Nous avons signalé dans plusieurs précédents paragraphes (en particulier 2.4.3.3. ♦) que certains critères de similitude peuvent être construits à partir de valeurs de référence

prises soit dans le champ scalaire, soit dans le champ des gradients. C'est le cas en particulier pour la diffusion massique.

Il se trouve que le critère  $\Gamma_{Ap} = q_{Ap} / \rho_A^o V^o$  (2.45) relatif à la diffusion massique n'est généralement pas utilisé sous cette forme (rappelons que  $q_{Ap}$  est la densité de flux de masse à la paroi).

En effet, on introduit un *coefficient de convection massique* à la paroi par la relation :

$$\boxed{q_{Ap} = k (\rho_{Ap} - \rho_{A\infty})} \quad (2.85)$$

dans laquelle :

$\rho_{Ap}$  = masse volumique du constituant A à la paroi

$\rho_{A\infty}$  = masse volumique caractéristique de A loin de la paroi

$q_{Ap}$  s'exprime en kg/m<sup>2</sup>.s, et  $k$  en m/s (homogène à une vitesse)

On écrit alors les grandeurs adimensionnelles de l'équation de bilan (2.46b) en choisissant comme valeur de référence pour  $\rho$  :

$$\rho_A^o = \rho_{Ap} - \rho_{A\infty} \quad (2.86)$$

de telle sorte que ce terme disparaisse dans  $\Gamma_{Ap}$ , qui devient :

$$\Gamma_{Ap} = \frac{k}{V^o} \quad (2.87)$$

Mais traditionnellement, on présente  $\Gamma_{Ap}$  de manière encore différente, en faisant apparaître un nouveau nombre sans dimension :

$$\Gamma_{Ap} = \frac{k}{V^o} = \frac{k L^o}{D_A^o} \frac{D_A^o}{L^o V^o}$$

Il s'agit de  $k L^o / D_A^o$ , appelé *nombre de Sherwood Sh* :

$$\boxed{Sh = \frac{k L^o}{D_A^o}} \quad (2.88a)$$

Compte tenu de (2.44) qui définit le critère de similitude  $\Gamma_{AD}$  par référence au champ de concentration, le critère  $\Gamma_{Ap}$  s'exprime donc en fonction de  $Sh$ ,  $Sc$  et  $Re$  :

$$\boxed{\Gamma_{Ap} = \frac{Sh}{Sc Re}} \quad (2.88b)$$

et l'on voit bien que  $Sh$  n'est pas un critère de similitude car c'est le groupement  $Sh/ScRe$  qui joue ce rôle.

### 2.5.3.2. – DIFFUSION THERMIQUE : RÉFÉRENCE AU CHAMP DE TEMPÉRATURE

Il est très commode d'exprimer le flux à la paroi  $\varphi_p$  en introduisant un *coefficient de convection thermique*  $h$  (appelé aussi *coefficient d'échange*), homogène à une conductance thermique (et donc à l'inverse d'une résistance), défini par l'expression :

$$\boxed{\varphi_p = h (T_p - T_\infty)} \quad (W/m^2.K) \quad (2.89)$$

où  $T_p$  = température du fluide à la paroi,  
 $T_\infty$  = température caractéristique du fluide loin de la paroi.

On choisit pour la définition des grandeurs adimensionnelles dans l'équation de bilan un écart de référence  $\Delta T^\circ$  qui permette d'éliminer la température du terme  $\Gamma_\varphi$ , à savoir :

$$\Delta T^\circ = T_p - T_\infty \quad (2.90)$$

Dans ces conditions, on a :

$$\boxed{St = \Gamma_\varphi = \frac{h}{\rho^\circ C_p V^\circ L^\circ}} \quad (2.91a)$$

Une coutume bien ancrée est de ne pas conserver  $St$  sous cette forme, mais de l'écrire :

$$St = \frac{h L^\circ}{\lambda^\circ} \frac{\lambda^\circ}{\rho^\circ C_p V^\circ L^\circ} \quad (2.91b)$$

où l'on reconnaît le nombre de Péclet (2.57b) :

$$1/Pe = \lambda^\circ / \rho^\circ C_p V^\circ L^\circ = a^\circ / V^\circ L^\circ$$

ainsi qu'un nouveau nombre sans dimension qui est le **nombre de Nusselt  $Nu$**  :

$$Nu = \frac{h L^\circ}{\lambda^\circ} \quad (2.92a)$$

La décomposition (2.91b) de  $St$  s'écrit donc encore (cf. 2.76) :


$$Nu = St Pe = St Re Pr \quad (2.92b)$$

et donc aussi (cf. 2.55, 2.57) :

$$Nu = \Gamma_\varphi / \Gamma_a \quad (2.92c)$$

Autrement dit,  $Nu$  caractérise le rapport entre la « conductance convective » ( $h$ ) et la conductance de référence du fluide ( $\lambda/L$ ) (ou entre les résistances thermiques correspondantes, qui en sont les inverses).

L'introduction du coefficient de convection  $h$  dans la théorie n'est pas une nécessité absolue, et ne fait que déplacer le problème en remplaçant le calcul de  $\varphi_p$  par un calcul de  $h$ . En outre,  $h$  se révèle peu adapté aux régimes instationnaires. Cependant, son avantage est de permettre la définition d'une « résistance thermique de convection »  $1/h$  qui s'additionne aux autres résistances thermiques lorsqu'il y a transfert de chaleur à travers une paroi. Enfin, ce coefficient  $h$  est tellement entré dans les mœurs qu'il est maintenant bien difficile de s'en passer.

 Il en va tout autrement du nombre de Nusselt, qui fait visiblement double emploi avec celui de Stanton, et qui n'est pas un critère de similitude (au vu de 2.92c, c'est le rapport de deux critères de similitude, ce qui n'est pas la même chose). Ainsi, deux écoulements à même nombre de Nusselt peuvent fort bien avoir des nombres de Stanton différents, c'est-à-dire ne pas être en similitude vis-à-vis de la diffusion thermique. Il y a ici l'amorce d'une identification périlleuse entre nombre sans dimension et critère de similitude.

L'emploi préférentiel du nombre de Nusselt par rapport au nombre de Stanton recèle donc quelques dangers, et, par sécurité, il vaudrait mieux l'éviter.

### 2.5.3.3. – DIFFUSION THERMIQUE : CAS DE LA CONVECTION LIBRE

En convection libre, où il n'y a plus de  $V^\circ$  expérimental de référence (§ 2.4.5.4), on a coutume d'utiliser à la place du critère de similitude  $\Gamma_{al}$  le **nombre de Rayleigh  $Ra$**  défini par :

$$Ra = \frac{g \beta \Delta T^\circ (L^\circ)^3}{\nu^\circ a^\circ} = \frac{1}{\Gamma_{al}^2 Pr} \quad (2.93a)$$

de telle sorte que :

$$\Gamma_{al} = (Ra Pr)^{-1/2} = Bo^{-1/2} \quad (2.93b)$$

La justification de cette définition réside dans le désir de conserver entre les nombres de Rayleigh et de Grashof, caractéristiques de la convection libre, la même relation de couplage qu'entre les nombres de Péclet et de Reynolds, qui leur correspondent en convection mixte ou forcée, à savoir :

$$\frac{Ra}{Gr} = Pr \quad (2.93c)$$

relation que l'on retrouve aisément à partir de (2.29b) et (2.93a), et qui est analogue à (2.75a).

De même, à la place de  $\Gamma_{\phi l}$  (2.62), on se sert également du *nombre de Nusselt*, ces grandeurs étant liées par la relation :

$$\Gamma_{\phi l} = Nu \Gamma_{al} = \frac{Nu}{(Ra Pr)^{1/2}} \quad (2.94)$$

avec toujours (cf. 2.92a) :

$$Nu = hL^\circ/\lambda^\circ$$

Il est bien clair que ni  $Ra$ , ni  $Nu$  ne sont des critères de similitude. Leur utilisation est évidemment sans conséquence si l'on veut simplement exprimer un flux adimensionné ; mais *une similitude basée sur ces nombres peut se révéler biaisée*, et il faut être extrêmement prudent à cet égard. Pour éviter toute ambiguïté, un emploi systématique de  $\Gamma_{\phi a}$  et  $\Gamma_{\phi l}$  serait certainement souhaitable.

## 2.6. – SIMILITUDE ET ADIMENSIONNEMENT : LE BON USAGE

### 2.6.1. – Les diverses significations des nombres sans dimension

♣ Au vu de ce qui précède, on peut regrouper les nombres sans dimension en trois classes selon leur signification :

- les critères de similitude
- les paramètres de couplage, qui sont des caractéristiques thermophysiques des milieux fluides
- le *vulgus pecum*, où se retrouvent tous ceux qui n'appartiennent pas aux deux premières catégories.

- ◆ Pour ce qui est des critères de similitude  $\Gamma$ , rappelons- leur sens premier (cf. 2.80a) :

$$\Gamma = \frac{\text{flux de référence de la source}}{\text{flux de référence transporté par le fluide}}$$

Les choses sont claires également pour les paramètres de couplage ( $Sc$ ,  $Le$ ,  $Pr$ ), chacun d'eux étant le rapport de deux coefficients de diffusion.

- ♥ On trouve pourtant d'autres interprétations dans la littérature.

C'est que les nombres sans dimension sont un peu ce qu'on appelle dans le langage familier *des auberges espagnoles*, où le visiteur trouve ce qu'il apporte lui-même. En effet, n'importe quel nombre sans dimension peut être considéré comme le rapport de deux longueurs, ou de deux vitesses, ou de deux intervalles de temps, etc. selon le souhait de chacun. Ces diverses interprétations ne sont pas sans intérêt, car elles peuvent apporter un éclairage particulier sur tel ou tel aspect des choses, mais dans la théorie de la similitude elles ne jouent qu'un rôle marginal.

- ♠ Voici quelques exemples d'interprétations multiples.

### 1. – Le nombre de Strouhal

C'est le critère de similitude temporelle (2.9b) :  $S = \Gamma_t = \frac{L^o}{t^o V^o}$ , qui s'écrit aussi :

a)  $S = \frac{L^o}{V^o} \frac{1}{t^o} = \frac{t'}{t^o}$ , où  $t' = L^o/V^o$  est le temps nécessaire à l'écoulement pour parcourir la longueur de référence.

b)  $S = \frac{L^o}{t^o} \frac{1}{V^o} = \frac{V'}{V^o}$ , où  $V' = L^o/t^o$  est une vitesse caractéristique du phénomène

c)  $S = \frac{L^o}{L'}$ , où  $L' = t^o V^o$  représente le déplacement du fluide pendant le temps de référence  $t^o$ .

### 2. – Le nombre de Reynolds

C'est le critère de similitude (2.26) relatif aux forces de viscosité dans le bilan de quantité de mouvement.

$$Re = \frac{1}{\Gamma_v} = \frac{V^o L^o}{\nu^o}$$

On a le choix entre trois décompositions.

a)  $Re = \frac{V^o}{\nu^o} L^o = \frac{L'}{L'}$ , où  $L' = \nu^o/V^o$  est une longueur caractéristique de la diffusion visqueuse

b)  $Re = V^o \frac{L^o}{\nu^o} = \frac{V^o}{V'}$ , où  $V' = \nu^o/L^o$  est une « vitesse de diffusion » de la quantité de mouvement

c)  $Re = \frac{V^o}{L^o} \frac{L^{o2}}{\nu^o} = \frac{t^o}{t'}$ , où  $t^o$  et  $t'$  sont respectivement le temps de parcours de la distance  $L^o$  par le fluide, et un « temps de diffusion visqueuse » sur la même distance.

### 3. – Le nombre de Richardson

C'est le critère de similitude (2.17) relatif aux forces de flottabilité.

$$Ri = \Gamma_\beta = \frac{g \beta^o \Delta T^o L^o}{(V^o)^2}$$

On a encore le choix entre trois décompositions.

a)  $Ri = \frac{g \beta^o \Delta T^o}{(V^o)^2} L^o = \frac{L^o}{L'}$ , où  $L'$  est homogène à une longueur

b)  $Ri = \frac{(V')^2}{(V^o)^2}$ , où  $V'$  est homogène à une vitesse

c)  $Ri = \frac{g \beta^o \Delta T^o}{V^o} \frac{L^o}{V^o} = \frac{t^o}{t'}$ , où  $t^o$  est le temps de parcours de  $L^o$  par le fluide,  $t'$  étant homogène à un temps.

🎵 On touche ici les limites de la méthode, car la signification physique de  $L'$ ,  $V'$  et  $t'$  dans la décomposition de  $Ri$  n'est pas vraiment évidente. Attention donc à ne pas trop systématiser ce genre d'analyse.

### 2.6.2. – Intérêt de la similitude

L'intérêt majeur de la similitude est qu'elle permet de s'affranchir de certaines contraintes expérimentales, et de faciliter la comparaison entre des résultats d'expériences obtenus dans des conditions différentes. En effet, la similitude complète de deux modèles expérimentaux peut être en principe assurée pourvu que chaque critère  $\Gamma$  ait la même valeur dans les deux modèles.

Simultanément, cette méthode facilite également le traitement de phénomènes physiques complexes, en diminuant le nombre de paramètres mis en jeu et en associant un nombre sans dimension à chaque terme de source dans les équations de bilans. Corrélativement, elle permet de remplacer dans certains cas les équations de bilans par des relations phénoménologiques, plus simples, entre certains paramètres sans dimension. Par exemple, on peut établir des lois de la forme :  $St = f(Re, Pr)$  pour le transfert de chaleur entre une paroi et un fluide.



### 2.6.3. – Similitude partielle et ordres de grandeur

Il faut pourtant éviter de parer la similitude de toutes les vertus. En particulier, on prendra bien garde au fait qu'*il est habituellement impossible de satisfaire simultanément toutes les conditions de similitude*. Il est donc important de savoir estimer les ordres de grandeur des différentes sources, pour limiter la similitude à une (ou exceptionnellement deux) source dominante. C'est ce qu'on appelle respecter une *similitude partielle*, et c'est la démarche qui a d'ailleurs été suivie, sans le dire, pour établir les critères de similitude relatifs aux forces de volume (§ 2.3.4.2).

Quant à cette estimation des ordres de grandeur, qui conditionne la validité d'une similitude partielle, elle peut s'appuyer soit sur des données expérimentales, soit sur une résolution préalable des équations écrites avec des grandeurs *dimensionnées*, seules à même de donner des informations indiscutables (voir ci-dessous).

### 2.6.4. – Mises en garde

*Caressez un cercle, il deviendra vicieux.*  
EUGÈNE IONESCO

En fin de compte, une certaine distanciation paraît nécessaire vis-à-vis de la similitude (et plus encore vis-à-vis d'un adimensionnement trop systématique), car un usage mal maîtrisé des nombres sans dimension recèle des risques et peut conduire à des dérives dommageables.

♣ De ce qui précède, il ressort d'abord une évidence : *tous les critères de similitude sont des nombres sans dimension, mais tous les nombres sans dimension ne sont pas des critères de similitude*. C'est donc une erreur (déjà signalée § 2.5.3.3) d'asseoir une similitude sur les nombres de Nusselt ou de Rayleigh par exemple.

◆ D'autre part, les données expérimentales ou numériques sont souvent présentées sous la forme de relations entre plusieurs nombres sans dimension  $N_j$ , du type :

$$N_1 = f(N_2, N_3, \dots)$$

La question légitime qui surgit alors est celle-ci: *Peut-on dire qu'une telle relation exprime une loi physique ?*

Sans verser dans la philosophie des sciences, on doit bien reconnaître que cette interrogation est d'une fausse simplicité, et que la réponse est, selon les points de vue : « oui », « oui si », « oui mais », « non »... !!

- **oui, a priori**, dans l'espace des grandeurs adimensionnées  $E^+(x^+, y^+, \dots C^+)$ . Le problème est que personne ne vit dans un tel espace, surtout pas l'ingénieur, qui doit travailler dans l'espace physique  $E(x, y, \dots C)$  avec des mètres, des joules, des secondes...

- **oui si** la loi  $N_1 = f(N_2, N_3, \dots)$  relie des paramètres indépendants, c'est-à-dire si les  $N_j$  sont des vecteurs propres de l'espace  $E^+$ , ce qui n'est généralement pas le cas. Ainsi, dans une relation comme  $St = f(Ri, Re, Pr)$ , plusieurs grandeurs physiques (la vitesse, la viscosité...) figurent simultanément dans deux ou trois des nombres sans dimension concernés. Si bien que faire varier l'un d'eux indépendamment des autres est une opération qui laisse un peu perplexe, même si le résultat est ensuite d'une apparence plaisante.

- *non, a priori* dans l'espace physique réel. Il n'y a aucune raison pour qu'un processus conserve sa représentation en passant de l'espace  $E^+$  à l'espace  $E$ . D'ailleurs, on a parfois des surprises quand on revient aux relations entre grandeurs dimensionnées.

♥ Une autre catégorie d'interprétations incorrectes provient de la combinaison, dans la même formule, de grandeurs adimensionnées avec d'autres qui ne le sont pas, si des paramètres communs prennent place à la fois dans les unes et dans les autres. Ce mélange conduit alors à des apparences fallacieuses (cf. Ch. 4 et 7).

♠ Pour conclure sur une recommandation, disons qu'il y a un certain danger à se reposer sur un usage trop exclusif des nombres sans dimension, qui risque de masquer la réalité physique et la nature des mécanismes mis en jeu – usage qui risque aussi de faire perdre de vue *la notion d'échelle des phénomènes*.

Dans n'importe quelle étude, il est donc recommandé de s'extraire le plus tôt possible du monde sans dimension pour revenir sur terre avec les grandeurs physiques habituelles, ce qui est de toute façon indispensable pour conclure le travail.

## ANNEXES AU CHAPITRE 2

### 2.A.1. – TABLEAUX RÉCAPITULATIFS DES TERMES DE SOURCES ET DES NOMBRES SANS DIMENSION

#### Rappels

*Équation générale de bilan adimensionnée*

$$\Gamma_t \frac{\partial C^+}{\partial t^+} + \text{div } C^+ \vec{V}^+ = \sum_n \Gamma_{In} q_{In}^+ - \sum_m \Gamma_{Sm} \text{div } \vec{q}_{Sm}^+ \quad (2.6)$$

avec : sources volumiques numérotées  $n$

sources surfaciques numérotées  $m$

le symbole  $^+$  désigne une grandeur adimensionnée

*Critères de similitude*

Le symbole  $^\circ$  désigne une grandeur de référence

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_t &= \frac{L^\circ}{t^\circ V^\circ} && \text{relatif au temps} \\ \Gamma_{In} &= \frac{q_{In}^\circ L^\circ}{C^\circ V^\circ} && \text{relatif à la source volumique } n \\ \Gamma_{Sm} &= \frac{q_{Sm}^\circ}{C^\circ V^\circ} && \text{relatif à la source surfacique } m \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Bilan de quantité de mouvement	Nature des sources	Termes de l'équation correspondants	Critères de similitude	Nombres sans dimension usuels
Sources de volume	Forces de pesanteur	$\overline{\rho g}$	$\Gamma_g = \frac{gL^0}{(V^0)^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{écoulements} \\ \text{à surface libre} \end{array} \right\}$ $\Gamma = 1 \text{ (écoulements en charge)}$	Nombre de Froude : $Fr = \frac{(V^0)^2}{gL^0} = \frac{1}{\Gamma_g}$
	Forces d'Archimède (ou de flottabilité)	$-\frac{\rho_\infty - \rho}{\rho_\infty} g$	1) Cas général $\Gamma_\beta = \frac{g\beta^0 \Delta T^0 L^0}{(V^0)^2}$	Nombre de Richardson : $Ri = \Gamma_\beta$
Sources de surface	Forces de pression	$-\overline{\text{grad } p}$	2) Convection libre $\Gamma_\beta = 1$	Nombre d'Euler : $Eu = \Gamma_{p,stat}$
	Forces de viscosité (diffusion de quantité de mouvement)	$\overline{\text{div } \tau}$	1) Convection mixte $\Gamma_{p,stat} = \frac{p^0}{\rho^0 (V^0)^2}$	Coefficient de frottement pariétal : $\frac{1}{2} C_f = \Gamma_\tau = \frac{\tau_p}{\rho^0 (V^0)^2}$
			2) Convection forcée $\Gamma_p = 1$	

			<p>2) Référence au champ de vitesse</p> $\Gamma_v = \frac{v^0}{V^0 L^0}$	<p>Nombre de Reynolds</p> $Re = \frac{l}{\Gamma_v} = \frac{V^0 L^0}{v^0}$
			<p>3) Convection libre</p> $\Gamma_{vl} = \frac{v^0}{(g \beta \Delta T^0)^{1/2} (L^0)^{3/2}}$	<p>Nombre de Grashof :</p> $Gr = \frac{l}{\Gamma_{vl}^2} = \frac{g \beta \Delta T^0 (L^0)^3}{(v^0)^2}$

TABLEAU 1

<b>Bilan de masse</b>	Nature des sources	Termes de l'équation correspondants	Critères de similitude	Nombres sans dimension usuels
Sources de volume	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Création ou annihilation d'un constituant <math>A</math> dans une réaction chimique</li> <li>- Transformation partielle d'un fluide par changement de phase</li> </ul>	$q_{IA}$ : taux de production du constituant $A$ (ou de la phase $A$ )	$\Gamma_{IA} = \frac{q_{IA}^o L^o}{\rho_A^o V^o}$	
Sources de surface		$\operatorname{div} \left( \rho D_A \overrightarrow{\operatorname{grad}} \frac{\rho_A}{\rho} \right)$	<p>1) Référence aux gradients</p> $\Gamma_{Ap} = \frac{q_{Ap}}{\rho_A^o V^o}$	<p>Nombre de Sherwood :</p> $Sh = \frac{k L^o}{D_A^o} \text{ avec } \frac{Sh}{Re Sc} = \Gamma_{Ap}$ <p><math>k</math> = coefficient de convection massique</p> <p><math>Sc = \text{nombre de Schmidt} = \frac{V^o}{D_A^o}</math></p>
			<p>2) Référence au champ de concentration</p> $\Gamma_{AD} = \frac{D_A^o}{V^o L^o}$	$\frac{l}{Re Sc} = \Gamma_{AD}$

TABLEAU 2

<b>Bilan d'énergie</b>	Nature des sources	Termes de l'équation correspondants	Critères de similitude	Nombres sans dimension usuels
Sources de volume	Chaleur mise en jeu dans une réaction chimique, émission ou absorption de rayonnement, effet Joule etc.	Puissance volumique $P(x, y, z, t)$ ( $P > 0$ ou $< 0$ )		
	Energie de pression	$\vec{V} \cdot \overline{\text{grad } p}$	1) Convection forcée $\Gamma_{epf} = \frac{(V^0)^2}{C_p \Delta T^0}$ 2) Convection mixte $\Gamma_{ep} = \frac{p^0}{\rho^0 C_p \Delta T^0}$	Nombre d'Eckert : $Ec = \Gamma_{ep}$ $\Gamma_{ep} = Eu Ec$
	Energie dissipée par viscosité	Fonction de dissipation $\Phi$	1) Référence aux gradients $\Gamma_{\phi\tau} = \frac{\tau_p}{\rho^0 C_p \Delta T^0} = \Gamma_{ep} \Gamma_{\tau}$ 2) Référence au champ de vitesse $\Gamma_{\phi\nu} = \frac{\nu^0 V^0}{C_p \Delta T^0 L^0} = \Gamma_{ep} \Gamma_{\nu}$	$\frac{1}{2} C_f Ec = \Gamma_{\phi\tau}$ $\frac{Ec}{Re} = \Gamma_{\phi\nu}$
Sources de surface	Diffusion thermique	$\text{div}(\lambda \overline{\text{grad } T})$	1) Référence aux gradients $\Gamma_{\phi} = \frac{\phi_p}{\rho^0 C_p \Delta T^0 V^0}$	Nombre de Stanton : $St = \Gamma_{\phi} = Nu / Re Pr = Nu / Pe$ Nombre de Nusselt : $Nu = h L^0 / \lambda^0$ $h = \text{coefficient de convection thermique}$

				<p>2) Référence au champ de vitesse</p> $\Gamma_a = \frac{a^0}{V^0 L^0}$	<p>Nombre de Péclet :</p> $Pe = \frac{l}{\Gamma_a} = \frac{V^0 L^0}{a^0} = Re Pr$
				<p>3) Convection libre</p> $\Gamma_{al} = \frac{a^0}{(g \beta \Delta T^0)^{1/2} (L^0)^{3/2}}$	<p>Nombre de Boussinesq :</p> $Bo = \frac{l}{\Gamma_{al}^2} = \frac{g \beta \Delta T^0 (L^0)^3}{(a^0)^2}$
				<p>1) Convection forcée ou mixte</p> $\Gamma_r = \frac{4 n^2 \sigma T_m^3}{\rho^0 C_p V^0}$ <p>2) Convection libre</p> $\Gamma_{rl} = \frac{4 n^2 \sigma T_m^3}{\rho^0 C_p (g \beta \Delta T^0 L^0)^{1/2}}$	<p>Nombre de Rayleigh :</p> $Ra = l / \Gamma_{al}^2 Pr$ <p>Nombre de Nusselt :</p> $Nu = h L^0 / \lambda^0$
Rayonnement			$-\text{div } \vec{\phi}_r$		

TABLEAU 3



Tension visqueuse / diffusion de matière	Nombre de Schmidt : $Sc = \frac{v^o}{D_A^o} = \frac{\Gamma_v}{\Gamma_{AD}}$
Diffusion thermique / diffusion de matière	Nombre de Lewis : $Le = \frac{a^o}{D_A^o} = \frac{\Gamma_a}{\Gamma_{AD}}$
Tension visqueuse / diffusion thermique	Nombre de Prandtl : $Pr = \frac{v^o}{a^o} = \frac{\Gamma_v}{\Gamma_a}$
Tension visqueuse / dissipation visqueuse	Nombre d'Eckert : $Ec = \Gamma_{dv} = \frac{\Gamma_{\phi v}}{\Gamma_v}$

Tableau 4. – Paramètres de couplage

## 2.A.2 – SUR L'ANALYSE DIMENSIONNELLE ET L'ANALYSE D'ÉCHELLE

*Au sein d'une même foi, une coutume différente ne nuit pas à la sainte église.*

Lettre du pape Grégoire le Grand à l'évêque Léandre de Séville (fin du VI<sup>ème</sup> siècle)

Outre la méthode des critères de similitude, il existe deux autres cadres logiques pour élaborer des nombres sans dimension : *l'analyse dimensionnelle* et *l'analyse d'échelle*.

♣ ***L'analyse dimensionnelle*** est une approche mathématique du problème, basée sur le théorème de Vaschy-Buckingham, qui vise à établir une méthode systématique pour produire des combinaisons adimensionnelles non redondantes.

Elle a eu son heure de gloire au milieu du 20<sup>ème</sup> siècle, grâce en particulier aux physiciens soviétiques comme Lev Landau ou Leonid Sedov. Mais sa capacité opérationnelle est relativement limitée. D'une part, on peut souvent retrouver ses conclusions par le biais d'une approche phénoménologique. Mais surtout, elle ne donne de renseignements ni sur la forme des lois, ni sur les ordres de grandeur relatifs des différents termes : elle n'est donc guère utile pour établir les conditions d'une similitude partielle, opération essentielle à l'ingénieur. Enfin, son apport à l'interprétation physique des phénomènes est modeste : elle ne permet pas, par exemple, d'introduire le concept de « critère de similitude relatif à une source donnée », ou encore d'éclairer la différence de contenu sémantique entre le nombre de Reynolds et le coefficient de frottement. Son intervention ne s'impose en fait que dans des cas très spécifiques, qui sortent du cadre de cet ouvrage.

◆ Totalemment différente dans son esprit, *l'analyse d'échelle* est une approche d'ingénieur. Mise en forme tout particulièrement par A. Béjan, elle a pour objet d'établir les ordres de grandeur des différents termes dans les équations de bilans, ce qui donne naissance, par un jeu de comparaisons, aux principaux nombres sans dimension classiques. Elle permet aussi de caractériser les paramètres de couplage entre sources ( $Pr$ ,  $Le$ ,  $Sc$ ).

La méthode des critères de similitude, amorcée par A. Léontiev, et systématisée dans le présent chapitre, réunit les points positifs des deux techniques précédentes, mais elle va un cran plus loin, en spécifiant sans ambiguïté les nombres sans dimension qui sont des critères de similitude, et en éclairant les rapports entre sources, y compris au sein d'un même bilan.

### 2.A.3. – CRITÈRES DE SIMILITUDE RELATIFS AUX BILANS D'ENTROPIE ET D'EXERGIE

♣ Nous avons montré dans le paragraphe 2.3 qu'un ensemble de critères de similitude est associé à chaque relation de bilan. Qu'en est-il avec le *bilan d'entropie* ?

Il faut tout d'abord convenir de la référence  $s^o$  (entropie massique), que l'on peut logiquement écrire comme le quotient d'une énergie interne (ou d'une enthalpie) par une température absolue  $T^o$  :

$$s^o = \frac{h^o}{T^o}$$

soit, d'après (2.47c) :

$$s^o = \frac{C_p \Delta T^o}{T^o} ; \quad C^o = \rho^o s^o = \frac{\rho^o C_p \Delta T^o}{T^o}$$

d'où l'entropie adimensionnelle :

$$s^+ = \frac{s}{s^o}$$

Appliquons ceci à un bilan d'entropie (1.74) abrégé, dans lequel on ne conserve que la dissipation et la diffusion thermique :

$$\text{div}(\rho s \vec{V}) = \frac{\Phi}{T} + \frac{\lambda}{T^2} (\overrightarrow{\text{grad} T})^2 + \text{div}\left(\frac{\lambda}{T} \overrightarrow{\text{grad} T}\right)$$

- *Critère de similitude relatif à la dissipation (source volumique)*

La référence  $q_I^o$  est ici, d'après (2.52) :

$$q_I^o = \frac{\Phi^o}{T^o} = \frac{1}{T^o} \mu^o \left(\frac{V^o}{L^o}\right)^2$$

Le critère de similitude est donné par (2.5) :

$$\Gamma_I = \frac{q_I^o L^o}{C^o V^o} = \frac{\mu^o V^o}{\rho^o C_p \Delta T^o L^o}$$

soit, en revenant à (2.53) :

$$\Gamma_I = \Gamma_{\Phi_V} = \frac{Ec}{Re}$$

Ce critère de similitude est donc le même que dans le bilan d'enthalpie

**- Critère de similitude relatif à la production d'entropie par conduction thermique (source volumique)**

Le terme concerné est :  $\lambda (\overrightarrow{\text{grad}} T)^2 / T^2$ , d'où la référence :

$$q_I^o = \frac{\lambda^o}{(T^o)^2} \left( \frac{\Delta T^o}{L^o} \right)^2$$

Appelons  $\Gamma_{\lambda_s}$  le critère correspondant :

$$\Gamma_{\lambda_s} = \frac{q_I^o L^o}{C^o V^o} = \frac{\Delta T^o}{T^o} \frac{\lambda^o}{\rho^o C_p V^o L^o}$$

$$\boxed{\Gamma_{\lambda_s} = \frac{\Delta T^o}{T^o} \frac{1}{Pe}}$$

Nous sommes ici en présence d'un nouveau critère de similitude, qui combine le nombre de Péclet avec un niveau relatif de température. Ceci est important car la production d'entropie due à la conduction thermique est souvent dominante par rapport aux autres sources.

**- Critère de similitude relatif au flux d'entropie (source surfacique)**

Il s'agit maintenant du terme :  $\text{div} \left( \frac{\lambda}{T} \overrightarrow{\text{grad}} T \right) = - \text{div} \vec{q}_S$ , dont la référence est :

$$q_S^o = \frac{\lambda^o}{T^o} \frac{\Delta T^o}{L^o}$$

Le critère de similitude pour une source surfacique est de la forme :  $\Gamma_S = q_S^o / C^o V^o$ .

Après simplification, il reste :

$$\Gamma_S = \frac{\lambda^o}{\rho^o C_p V^o L^o} = \frac{1}{Pe}$$

Ce critère est le même que pour le flux de chaleur dans le bilan d'enthalpie.

Dans l'équation adimensionnée d'entropie, il est naturel de conserver la température  $T^+ = T / \Delta T^o$  (voir 2.34a et 2.65). Sachant que  $\text{div}(\rho s \vec{V}) = \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} s$  du fait que  $\text{div} \vec{V} = 0$ , il vient :

$$\vec{V}^+ \cdot \overrightarrow{\text{grad}} s^+ = \frac{Ec}{Re} \frac{\Phi^+}{T^+} + \left( \frac{\Delta T^o}{T^o} \frac{1}{Pe} \right) \frac{\lambda^+}{T^{+2}} (\overrightarrow{\text{grad}} T^+)^2 + \frac{1}{Pe} \text{div} \left( \frac{\lambda^+}{T^+} \overrightarrow{\text{grad}} T^+ \right)$$

◆ Les conclusions sont analogues quand on passe au *bilan d'exergie*. Mais là, le raisonnement est un peu plus délicat, et on obtient absolument n'importe quoi si on ne s'astreint pas à une démarche rigoureuse et cohérente.

1. Maintenant, donc, nous avons :

$$C = \rho ex = \rho (h - T_e s) \quad (\text{relation 1.78a})$$

où  $T_e$  est la température absolue à l'extérieur du système.

La première chose à faire est d'établir la valeur de référence  $C^o$ , en n'oubliant pas que l'on doit pouvoir écrire :

$$C^+ = \frac{C}{C^o}$$

$C^+$  étant la grandeur  $C$  adimensionnée. Détaillons le calcul :

$$C = C^o C^+ = \rho^o \rho^+ (h^o h^+ - \Delta T^o T_e^+ s^o s^+)$$

d'où, après ce qui a été dit au bilan d'entropie :

$$C = \rho^o \rho^+ (C_p \Delta T^o h^+ - \Delta T^o T_e^+ C_p s^+)$$

$$C = \rho^o C_p \Delta T^o \cdot \rho^+ (h^+ - T_e^+ s^+)$$

On voit dans cette dernière expression apparaitre  $C^+ = \rho^+ (h^+ - T_e^+ s^+) = \rho^+ ex^+$ . Il est donc naturel d'adopter pour  $C^o$  :

$$C^o = \rho^o C_p \Delta T^o$$

c'est-à-dire la même référence que pour l'enthalpie.

2. Les sources d'exergie sont répertoriées dans l'équation (1.78b). Prenons pour commencer la source volumique :

$$q_I = \Phi \left( 1 - \frac{T_e}{T} \right)$$

De même que précédemment, on doit avoir :

$$q_I = q_I^o q_I^+$$

et aussi :

$$q_I = \Phi^o \Phi^+ \frac{\Delta T^o T^+ - \Delta T^o T_e^+}{\Delta T^o T^+} = \Phi^o \Phi^+ \frac{T^+ - T_e^+}{T^+}$$

Il est logique de prendre, comme dans (2.52) :

$$q_I^o = \Phi^o = \mu^o \left( \frac{V^o}{L^o} \right)^2$$

Le critère de similitude correspondant s'écrit :

$$\Gamma = \frac{q_I^o L^o}{C^o V^o} = \mu^o \left( \frac{V^o}{L^o} \right)^2 \frac{L^o}{\rho^o C_p \Delta T^o V^o}$$

$$\Gamma = \frac{v^o V^o}{C_p \Delta T^o L^o} = \Gamma_{\Phi v} = \frac{Ec}{Re}$$

On retrouve le même critère de similitude que dans les bilans d'énergie et d'entropie, relativement à la dissipation  $\Phi$ .

3. Une autre source volumique d'exergie, à savoir  $\lambda \frac{T_e}{T^o} (\overrightarrow{\text{grad}} T)^2$ , est due au flux de chaleur conductif. Dans ce cas :

$$q_I^o = \lambda^o \frac{T_e}{T^{o2}} \left( \frac{\Delta T^o}{L^o} \right)^2 \quad \text{et} \quad \Gamma_I = \frac{q_I^o L^o}{C^o V^o}$$

Alors, en remplaçant  $q_I^o$  et  $C^o$  :

$$\Gamma_I = \frac{\Delta T^o T_e}{T^{o2}} \frac{\lambda^o}{\rho^o C_p V^o L^o}$$

Le choix de  $T_e$  comme température de référence  $T^o$  semble naturel :  $T_e = T^o$ . Cela donne, après simplification :

$$\Gamma_I = \frac{\Delta T^o}{T^o} \frac{\lambda^o}{\rho^o C_p V^o L^o} = \frac{\Delta T^o}{T^o} \frac{1}{Pe} = \Gamma_{\lambda_s}$$

Pour la même nature de source, le critère de similitude est le même que dans le bilan d'entropie (§ ♣ précédent).

4. Avec le flux d'exergie (source surfacique)  $\text{div} \left\{ \lambda \left( 1 - \frac{T_e}{T} \right) \overrightarrow{\text{grad}} T \right\}$ , on retombe sur un critère de similitude égal à  $1/Pe$  (le lecteur fera le calcul lui-même).

♥ *En conclusion*, pour les sources communes (dissipation, flux surfacique), les critères de similitude sont les mêmes avec l'entropie ou l'exergie qu'avec l'enthalpie. Pour les sources spécifiques aux bilans d'entropie et d'exergie (dues au flux conductif), le critère de similitude

$1/Pe$  doit être corrigé relativement au niveau de température absolue, et devient :  $\frac{\Delta T^o}{T^o} \frac{1}{Pe}$ .

#### 2.A.4. – GRANDEURS GÉOMÉTRIQUES DE RÉFÉRENCE DANS UN BILAN INTÉGRAL

Dans le paragraphe 2.3, nous avons introduit les critères de similitude en adimensionnant l'équation de bilan local pour une grandeur extensive  $C$ . Que se passerait-il si l'on adaptait le raisonnement à l'équation de bilan intégral sur un domaine  $\mathcal{D}$ , de frontière  $\mathcal{S}$  ?

En régime permanent, l'équation (1.22) s'écrit :

$$\int_{\mathcal{S}} C \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \int_{\mathcal{D}} q_I d\tau - \int_{\mathcal{S}} \vec{q}_S \cdot \vec{n} dS$$

Pour toute grandeur  $X$  figurant dans l'équation, on choisit une valeur de référence  $X^o$ , et on pose  $X^+ = X / X^o$ . *A priori*, on doit faire intervenir ici deux grandeurs de référence géométriques :  $\mathcal{S}^o$  (surface de référence) et  $\mathcal{V}^o$  (volume de référence).

Le domaine d'intégration n'est évidemment pas modifié par le changement de variables, et l'équation de bilan adimensionnée est maintenant :

$$\int_S C^\circ C^+ V^\circ \vec{V}^+ \cdot \vec{n} S^\circ dS^+ = \int_D q_I^\circ q_I^+ \mathcal{V}^\circ d\tau^+ - \int_S q_S^\circ \vec{q}_S^+ \cdot \vec{n} S^\circ dS^+$$

Divisons par  $C^\circ V^\circ S^\circ$  pour assurer la similitude à l'échelle 1 vis-à-vis du terme de transport :

$$\int_S C^+ \vec{V}^+ \cdot \vec{n} dS = \frac{q_I^\circ}{C^\circ V^\circ S^\circ} \mathcal{V}^\circ \int_D q_I^+ d\tau^+ - \frac{q_S^\circ}{C^\circ V^\circ} \int_S \vec{q}_S^+ \cdot \vec{n} dS$$

Les critères de « similitude intégrale » sont donc :

- pour la source volumique :

$$\Gamma_I = \frac{q_I^\circ}{C^\circ V^\circ S^\circ} \mathcal{V}^\circ$$

- pour la source surfacique :

$$\Gamma_S = \frac{q_S^\circ}{C^\circ V^\circ}$$

En conséquence,

1)  $\Gamma_S$  est le même que dans le bilan local (cf . 2.4, 2.5) ; il y a donc équivalence entre similitude locale et similitude globale pour les sources surfaciques.

2) Pour que  $\Gamma_I$  soit égal au  $\Gamma_I$  local (2.5), il faut prendre :

$$L^\circ = \mathcal{V}^\circ / S^\circ, \text{ d'où } \Gamma_I = \frac{q_I^\circ L^\circ}{C^\circ V^\circ}$$

*La condition d'équivalence entre similitude locale et similitude intégrale est donc :*

$$L^\circ = \mathcal{V}^\circ / S^\circ$$

Pour le choix de  $\mathcal{V}^\circ$  et  $S^\circ$ , deux voies sont ouvertes :

a) On adopte une convention sur  $L^\circ$ , et l'on prend  $\mathcal{V}^\circ = (L^\circ)^3$  et  $S^\circ = (L^\circ)^2$ . Dans ce cas, le choix de  $L^\circ$  risque d'être relativement arbitraire.

b) Inversement, sachant que les phénomènes étudiés concernent le volume  $\mathcal{V}$  et la surface  $S$  du domaine  $\mathcal{D}$ , on peut choisir :

$$\mathcal{V}^\circ = \mathcal{V}; \quad S^\circ = S, \quad \text{d'où } L^\circ = \mathcal{V}/S$$

Eventuellement, si la contribution de certaines parties de  $S$  à l'intégrale  $\int_S$  est négligeable, il peut être justifié de prendre pour  $S^\circ$  la partie significative de  $S$ .

Nous rencontrerons une application de ce problème au chapitre 6, à propos des écoulements en canalisations : elle permettra de faire apparaître une *longueur caractéristique*  $\mathcal{L} = \mathcal{V} / \Sigma$  ( $\Sigma$  = surface latérale du tube) équivalente au diamètre hydraulique classique.