



# MODÈLE THERMIQUE D'UNE VILLE SOUS CONTRAINTE CLIMATIQUE

Intégrations des données climatiques d'un GCM dans un modèle thermique de ville formulé en espace de chemins échantillonnés par un algorithme de Monte Carlo



ScienceAdvances

## The “teapot in a city”: A paradigm shift in urban climate modeling

[NAJDA VILLEFRANQUE](#) 
[FRÉDÉRIC HOURDIN](#) 
[LOUIS D'ALENÇON](#) 
[STÉPHANE BLANCO](#)
[OLIVIER BOUCHER](#) 
[CYRIL CALIOT](#) 
[CHRISTOPHE COUSTET](#)   
[JÉRÉMI DAUCHET](#)
[MOUNA EL HAFI](#)
[VINCENT EYMET](#) 
[OLIVIER FARGES](#) 
[VINCENT FOREST](#)
[RICHARD FOURNIER](#)
[JACQUES GAUTRAIS](#) 
[VALÉRY MASSON](#)   
[BENJAMIN PIAUD](#)
[AND ROBERT SCHOETTER](#) 
[fewer](#)
[Authors Info & Affiliations](#)

Modéliser la thermique d'une ville à fine résolution spatiale dans un contexte de réchauffement climatique

**Cadre : Système complexe, thermique linéaire, couplage conducto-convecto-radiatif**

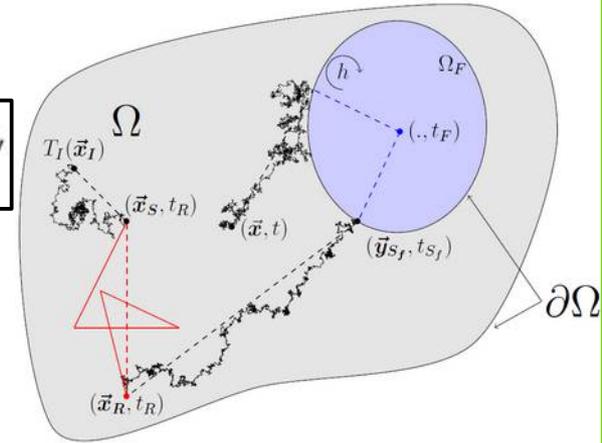
**Formalisme des propagateurs et des fonctions de Green :**

$$T_S(\mathbf{x}, t) = \int_{\Omega} g_I(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_I, t_I) T_I(\mathbf{x}_I) d\mathbf{x}_I + \int_{\partial\Omega} \int_{t_I}^t g_{\partial\Omega}(\mathbf{x}, t | \mathbf{y}, t') T_{\partial\Omega}(\mathbf{y}, t') d\mathbf{y} dt' + \int_{\Omega} \int_{t_I}^t g_{\Omega}(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}', t') S(\mathbf{x}', t') d\mathbf{x}' dt'$$

**Formalisme stochastique et formule de Feynman Kac :**

$$\begin{cases} \Delta T = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t} \\ T_{\partial\Omega}(\mathbf{y}) = f(\mathbf{y}) \\ T(\mathbf{x}, t=0) = T_I(\mathbf{x}) \end{cases} \quad \begin{cases} T(\mathbf{x}, t) = \mathbb{E}(T_{\partial\Omega}(B_{\tau_t}, t - \tau_t) 1_{B_{\tau_t} \in \partial\Omega}) + \mathbb{E}(T_I(B_{\tau_t}) 1_{B_{\tau_t} \notin \partial\Omega}) \\ \tau_t = \max(\tau_{\partial\Omega}, t) \\ \tau_{\partial\Omega} \text{ le temps de premier arrêt du processus à la frontière} \end{cases}$$

**Couplage : toutes les dimensions sont parcourues en un seul chemin de Monte Carlo**



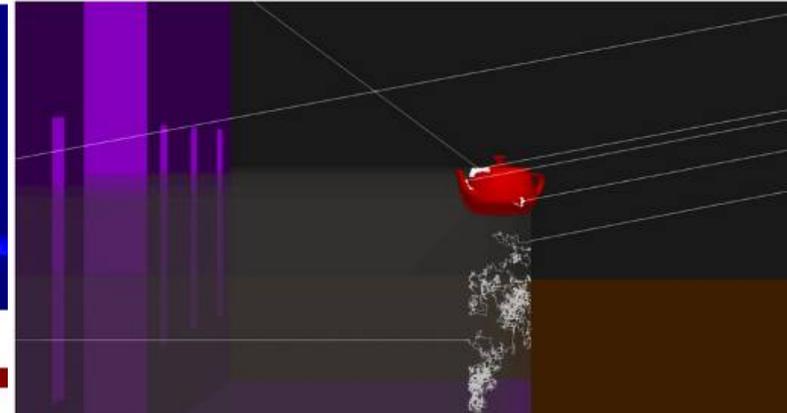
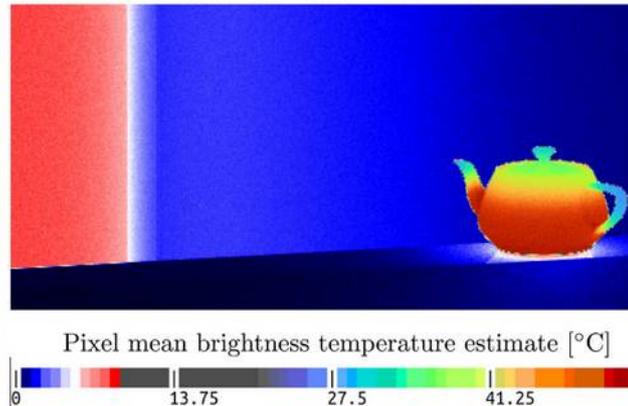
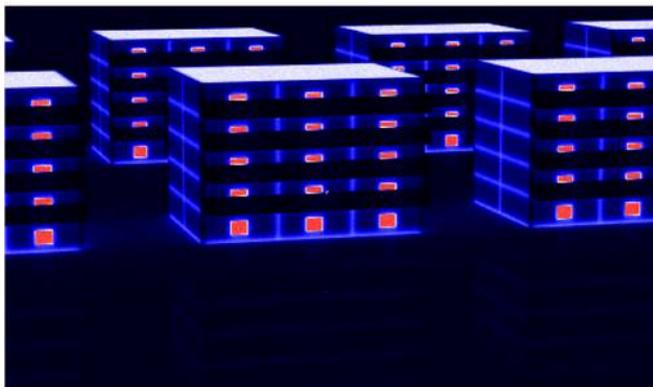
Courtesy : J.M Tregan

**“Teapot in a city” : chemins dans la ville sans le forçage climatique (consortium edstar)**

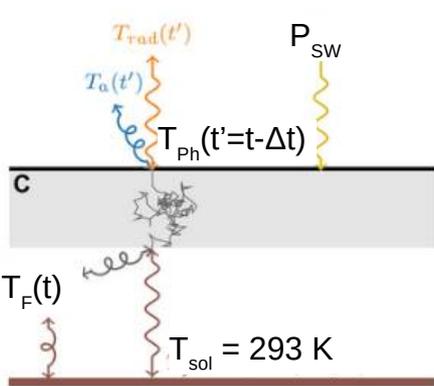
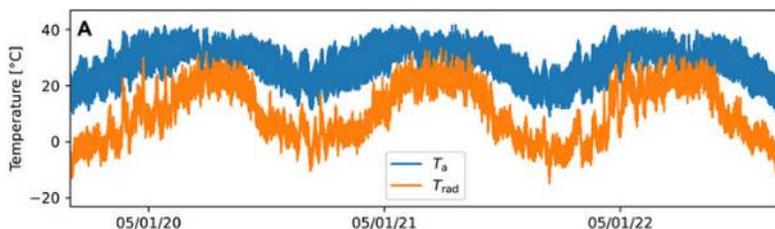
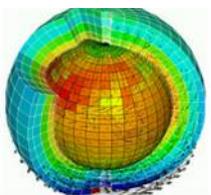
**A** Convecto-conducto-radiative rendering of buildings

**B** Zoom on a teapot on one of the balconies

**D** In the teapot and balcony



## Un premier modèle simpl(ist ?)e :



Fluide à l'intérieur de la pièce, brassé et de température homogène :

$$\rho_F C_F V \frac{dT_F}{dt} = h_{sol} S (T_{sol} - T_F) + h_P S (T_{Pb} - T_F)$$

Plafond opaque sans sources volumiques :

$$\rho_P C_P \frac{\partial T_P}{\partial t} = -\text{div}(-\lambda \vec{\nabla} T_P)$$

Condition à la surface plafond/fluide :

$$-\lambda \vec{n} \cdot \vec{\nabla} T_P = -\lambda \frac{\partial T_P}{\partial n} = h_P (T_F - T_{Pb}) + h_{rsol} (T_{sol} - T_{Pb})$$

Condition à la surface plafond/atmosphère :   Données GCM

$$-\lambda \vec{n} \cdot \vec{\nabla} T_P = -\lambda \frac{\partial T_P}{\partial n} = h_{atm} (T_{atm} - T_{Ph}) + h_{rad} (T_{rad} - T_{Ph}) + P_{SW} (1 - alb)$$

## Dans le fluide :

"Refroidissement" Newtonien

## Couplage aux surfaces :

$$-\lambda \frac{T_{Ph,\delta} - T_{Ph}}{\delta} = h_P (T_{atm} - T_{Ph}) + h_{rad} (T_{rad} - T_{Ph}) + P_{SW} (1 - alb)$$

$$T_{Ph} = p_{conv} T_{atm} + p_{cond} T_{Ph,\delta} + p_{rad} T_{rad} + \frac{P_{SW} (1 - alb)}{(h_P + h_{rad} + \frac{\lambda}{\delta})}$$

Probabilisation :

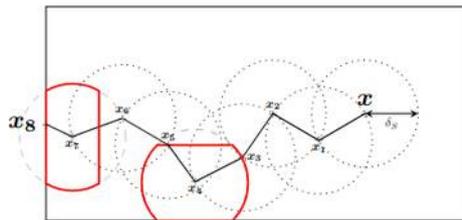
$$\begin{cases} p_{conv} = \frac{h_P}{(h_P + h_{rad} + \frac{\lambda}{\delta})} \\ p_{rad} = \frac{h_{rad}}{(h_P + h_{rad} + \frac{\lambda}{\delta})} \\ p_{cond} = \frac{\frac{\lambda}{\delta}}{(h_P + h_{rad} + \frac{\lambda}{\delta})} \end{cases}$$

Données GCM : poids de Monte Carlo

## La marche aléatoire dans le solide :

→ "Découpage" du processus Brownien continu (marche sur sphère, rectangle, polygone...)

Notre choix : la marche sur delta sphère



Avantage : praticabilité en géométrie complexe

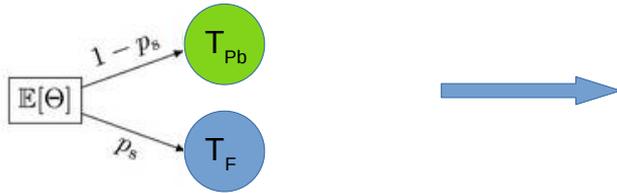
Inconvénient : approximation lors de la discrétisation

## Calcul d'une métrique dépendant des températures : puissance de refroidissement fournie par le sol

Bilan des échanges convectifs et radiatifs avec le sol :

$$P_{\text{clim}} = h_{\text{sol}}(T_{\text{F}} - T_{\text{sol}}) + h_{\text{rad sol}}(T_{\text{Pb}} - T_{\text{sol}})$$

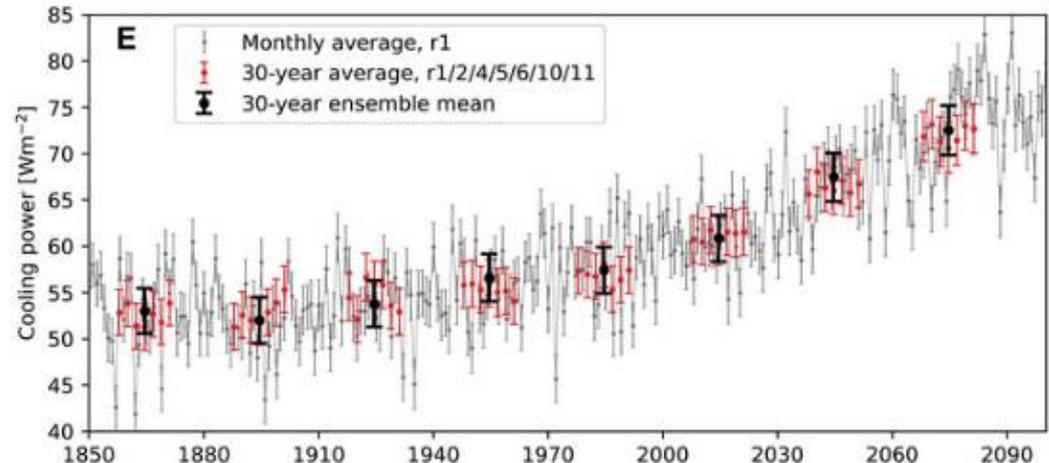
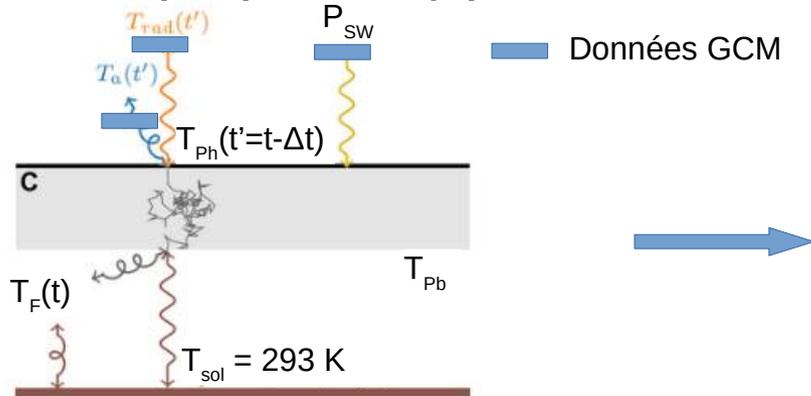
Probabilisation et intégration dans l'espace de chemins par double randomisation



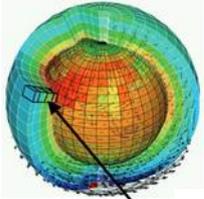
Une force de notre méthode : le calcul sonde

- Départ d'un chemin : un point  $\mathbf{x}_{\text{obs}}$  (fluide, plafond, ...), un instant  $t_{\text{obs}}$
- Parcours de toutes les dimensions physiques et géométriques sans avoir à calculer la totalité du champ de température à chaque instant
- Possibilité de calcul de métriques linéaires en géométries hyper complexes inaccessibles par d'autres méthodes

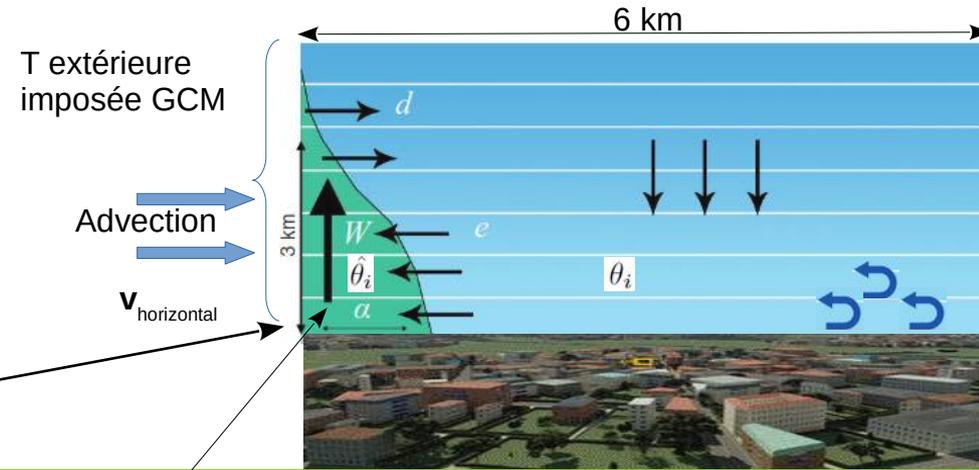
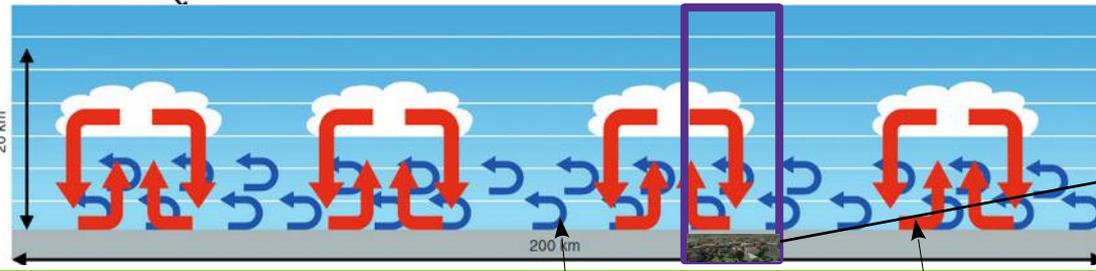
## Résultats ("teapot in a city") :



## Intégration d'une physique de l'atmosphère dans l'espace des chemins



courtesy Hourdin



### Modèle pour chaque couche i :

Advection grande échelle

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \underbrace{-\vec{u} \cdot \text{grad} \theta_i}_{\text{Advection}} + \underbrace{K_{z_{i-1,i}} \frac{(\theta_{i-1} - \theta_i)}{\Delta z_i^2} + K_{z_{i,i+1}} \frac{(\theta_{i+1} - \theta_i)}{\Delta z_i^2}}_{\text{diffusion turbulente}} - \underbrace{\partial_z \left( \frac{\hat{f}_i}{\rho} (\hat{\theta}_i - \theta_i) \right)}_{\text{flux de masse}}$$

Echanges turbulents :

Profil de  $\hat{\theta}_i$  :

$$\hat{f}_i \partial_z (\hat{\theta}_i) = e (\theta_i - \hat{\theta}_i)$$

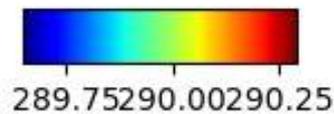
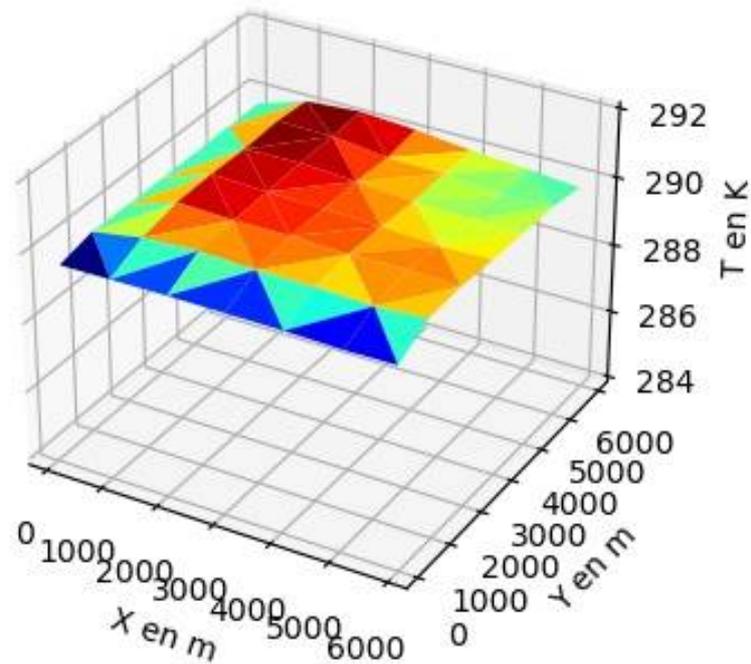
### Données GCM :

A chaque altitude du "milieu extérieur" :  
 $u_i, v_i, \theta_i(\text{LMDZ})$

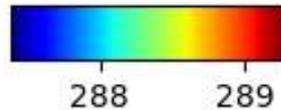
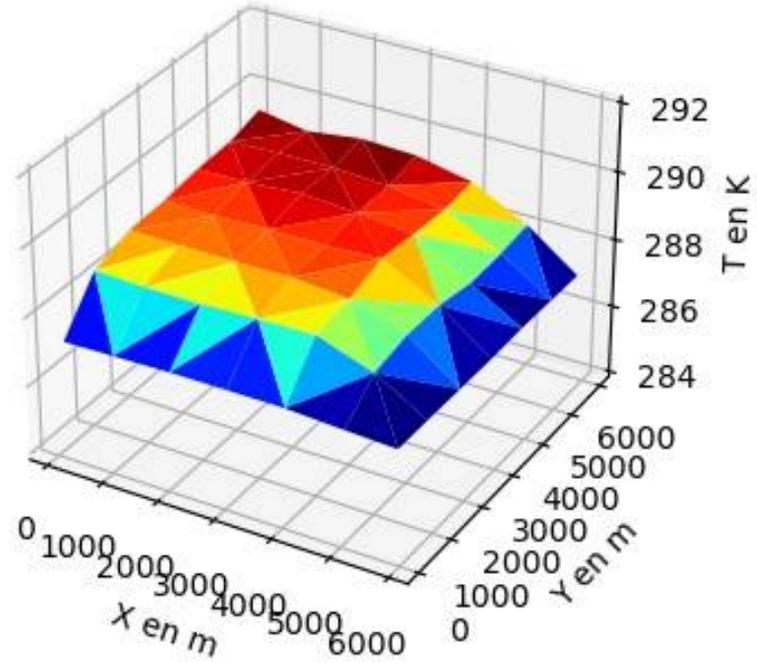
Données initiales dans chaque couche (LMDZ aussi) :  
 $\theta_i(t) = \theta_{i,i}$

Données LMDZ des coefficients de transfert :  
 $K_z$

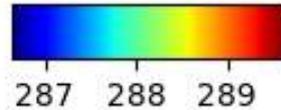
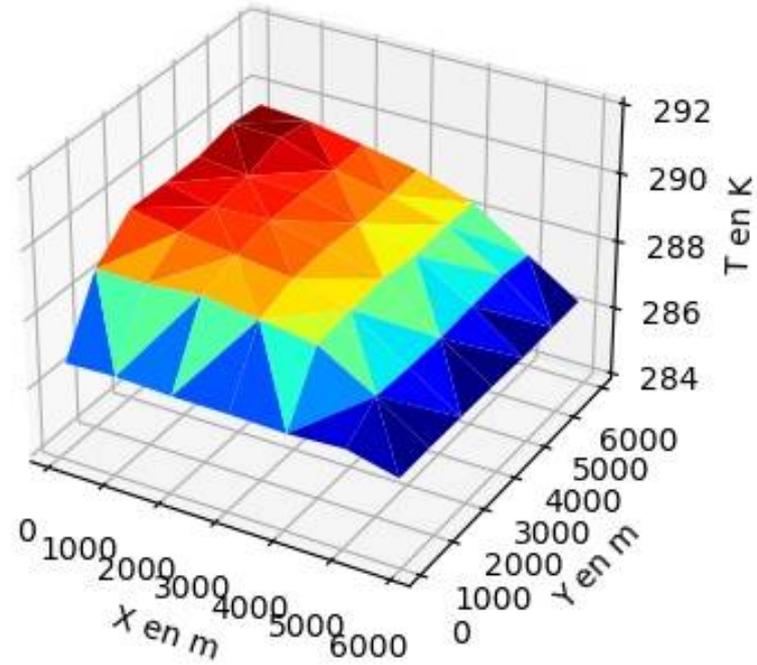
Dôme de température sur une ville



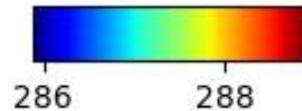
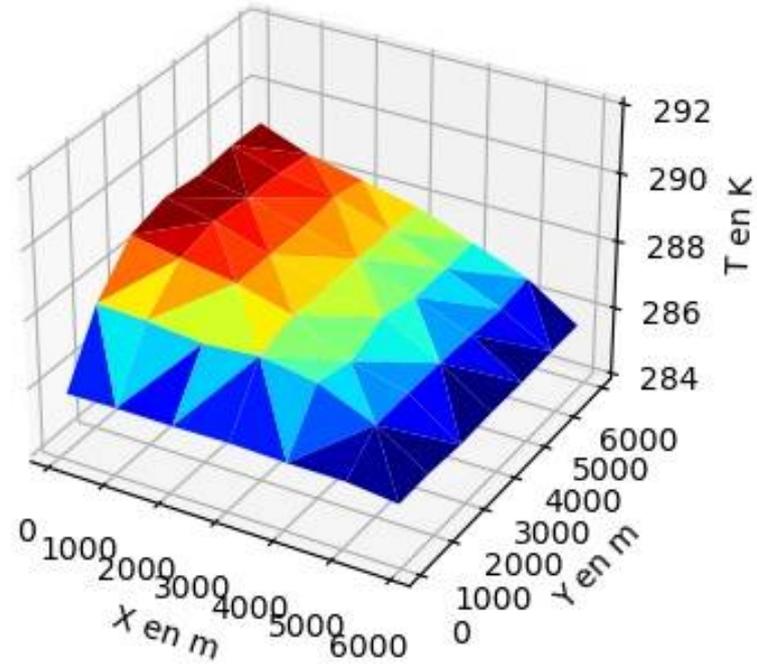
Dôme de température sur une ville



Dôme de température sur une ville



Dôme de température sur une ville



## Conclusion :

- Formulation en espace de chemins d'une thermique couplée multiphysique linéaire transposée dans un algorithme de Monte Carlo quasiment insensible à la complexité géométrique
- Intégration de données GCM aux frontières du problème : sources au bout des chemins de Monte Carlo
- Calcul de métriques linéaires avec des moyennes temporelles et/ou spatiales dans un seul espace de chemin et à une échelle de temps "climatique"
- Un premier modèle de couplage physique ville/atmosphère permettant de visualiser des dômes de chaleurs

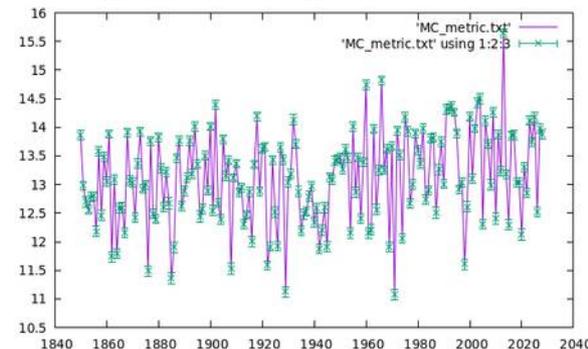
## Perspectives : géométrie complexe, non linéaire

Géométrie complexe : prolongement de "Teapot in a city"

- la ville sous contrainte climatique
- la ville couplée avec la colonne atmosphérique

Calcul d'une métrique non linéaire : efficacité d'une pac

$$e = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{T_w}{T_w - T_c} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{1}{1-x} dt$$

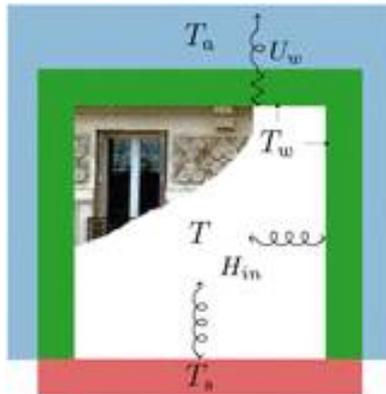
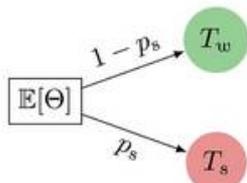


## Probabilisation d'une somme :

Hypothèse 1 :  $T_s$  et  $T_w$  fixés

$$T = p_s T_s + (1 - p_s) T_w$$

$$T = E(\Theta)$$



### Algorithme :

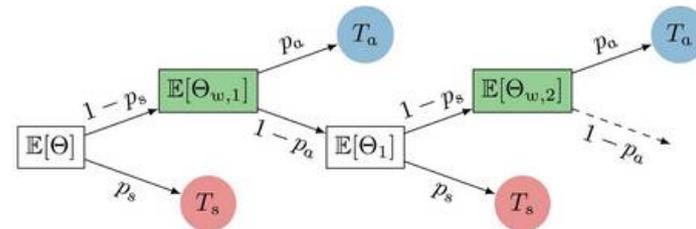
- On tire un nombre aléatoire  $r$  uniformément sur  $[0,1]$
- Si  $r < p_s$  alors  $w = T_s$
- Sinon  $w = T_w$
- On calcule la moyenne des poids de Monte Carlo ( $w$ ) qui est un estimateur de  $T$
- Calcul de l'écart-type pour optimiser la convergence

## Sommes emboîtées : double randomisation

Hypothèse 2 :  $T_w$  inconnu

$$T_w = p_a T_a + (1 - p_a) T = E(\Theta_w)$$

→ espérances emboîtées



## Probabilisation d'une intégrale :

$$m = \int_{\mathcal{D}} \mathcal{I}(x) dx$$

Réécriture sous forme d'une espérance :

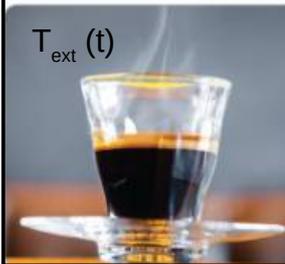
$$m = \underbrace{\int_{\mathcal{D}_X} p_X(x) dx}_{\text{échantillonnage de } x \text{ suivant } X} \underbrace{\psi(x)}_{\text{poids de Monte-Carlo}}$$

Où  $p_x$  est la densité de probabilité d'une V.A X

$$m = \mathbb{E}_X(\psi(X))$$

## Exemple : modèle de refroidissement exponentiel de Newton

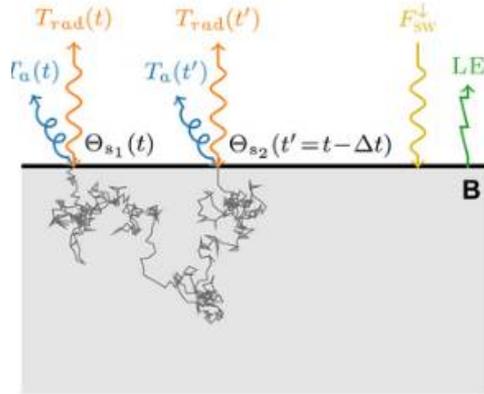
$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \frac{(T_{ext} - T)}{\tau} & T(t) = T_I e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_0^t \frac{e^{-\frac{t-s}{\tau}}}{\tau} ds T_{ext}(s) \\ T(t=0) = T_I & T(t) = \int_0^\infty p(s) ds [H(s > t) T_I + H(s < t) T_{ext}(t-s)] \\ & T(t) = E_\Theta [H(\Theta - t) T_I + H(t - \Theta) T_{ext}(t - \Theta)] \end{cases}$$



### Algorithme :

- On tire une réalisation  $s$  de la variable aléatoire  $\Theta$  suivant une loi exponentielle de paramètre  $1/\tau$
- Si  $s > t$  alors  $w = T_I$
- Sinon  $w = T_{ext}(t-s)$
- Moyenne et écart-type des poids  $w$

## Validation avec un sol simple ("teapot in a city") :

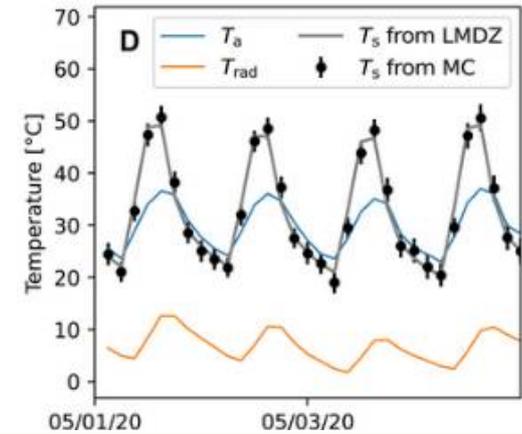


Reproduction de la température de sol avec l'algorithme de Monte Carlo

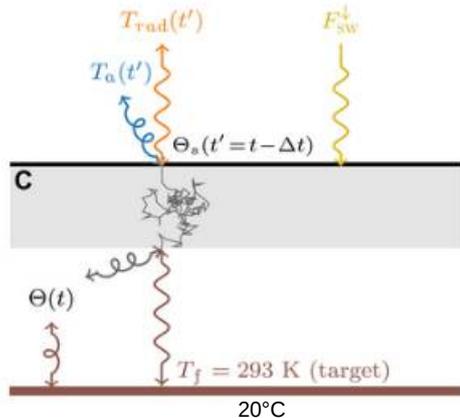


La température de sol est calculée dans LMDZ (composante atmosphérique du GCM) par un algorithme "déterministe" en différences finies.

4 jours au Sahel



## Validation avec une pièce 1D :

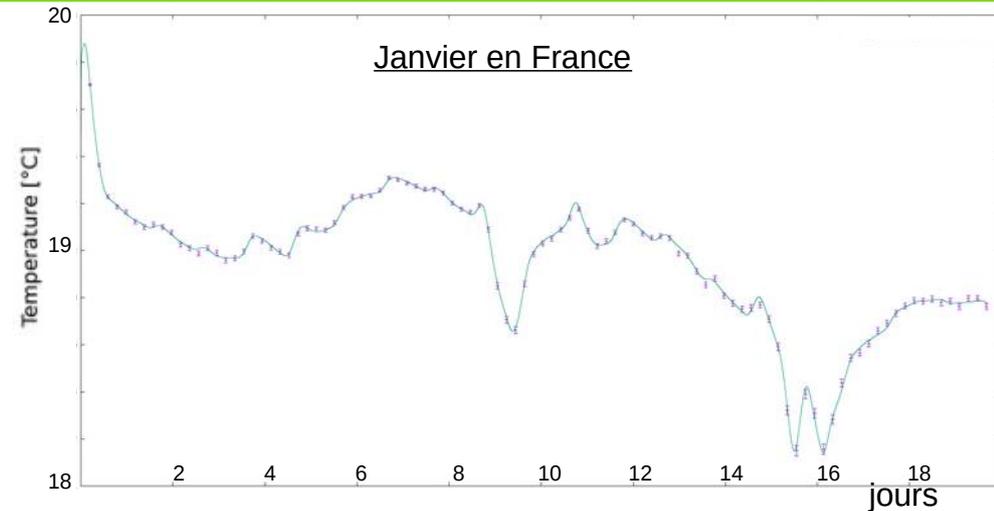


Calcul de la température de la pièce avec l'algorithme de Monte Carlo (en croix bleues avec écart-types)



Calcul par un algorithme classique en différences finies (en ligne verte)

Janvier en France



## SI "teapot in a city" :

Pour construire la marche aléatoire on intègre l'équation de la chaleur sur une "petite" sphère de rayon  $r = \frac{\delta}{2}$  de volume  $\Omega_r$  et de surface  $\Sigma_r$  centrée sur un point  $\vec{x}$  :

$$\int_{\Omega_r} \rho_s C_s \frac{\partial T(\vec{x}', t)}{\partial t} d\vec{x}' = \int_{\Omega_r} \lambda \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} T(\vec{x}', t) d\vec{x}' \quad (1)$$

$$= \int_{\Sigma_r} \lambda \vec{\nabla} T(\vec{y}', t) \cdot \vec{n}(\vec{y}') d\vec{y}' \quad (2)$$

$$\simeq \int_{\Sigma_r} \frac{\lambda}{2r} [T(\vec{x} + 2r \vec{n}(\vec{y}'), t) - T(\vec{x}, t)] d\vec{y}' \quad (3)$$

$$\rho_s C_s \frac{\Omega_\delta}{8} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\Sigma_\delta \lambda}{4 \delta} (\bar{T}^\delta(x, t) - T(x, t))$$

où  $\bar{T}^\delta(x, t)$  est la moyenne des températures sur la surface de la sphère  $\delta$  à l'instant  $t$ .

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{\tau} (\bar{T}^\delta(x, t) - T(x, t))$$

avec  $\tau = \frac{\rho_s C_s \delta^2}{6\lambda}$  dont la solution intégrale prend la forme :

$$T(x, t) = T(x, t=0) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \int_0^t \bar{T}^\delta(x, t') \frac{1}{\tau} \exp\left[-\frac{1}{\tau}(t' - t)\right] dt'$$

$$= \int_0^\infty p(\tau) d\tau \{H(\tau > t) T_i(\vec{x}) + H(\tau < t) \bar{T}^\delta(\vec{x}, t - \tau)\}$$

$$T(\vec{x}, t) = E_S [H(S - t) T_i(\vec{x}) + H(t - S) E_U(T(\vec{x} + \delta \vec{U}, t - S))]$$

On poursuit de proche en proche par double randomisation jusqu'à une frontière

### Algorithme en milieu infini :

- On tire une réalisation  $s$  de la variable aléatoire  $S$  suivant une loi exponentielle de paramètre  $1/\tau$
- $t := t - s$
- Si  $t < 0$  alors  $w = T_i$
- Sinon on tire une direction aléatoire  $\mathbf{u}$  sur la sphère unité
- On recommence en  $\mathbf{x} := \mathbf{x} + \delta \mathbf{u}$

