

Modélisation analytique exacte du transfert thermique dans des bicouches avec interface diffuse.

Jean-Claude KRAPEZ

ONERA Département Optique Théorique et Appliquée - MVA
BA 701 – 13300 Salon de Provence
krapez@onera.fr

Résumé - Un nouveau modèle thermocinétique 1D est décrit qui fournit la réponse en régime modulé ou transitoire d'un bicouche dont les propriétés, de part et d'autre de l'interface, évoluent continûment vers les niveaux observés en surface et à grande profondeur. Ce modèle est construit à partir d'une famille de profils en effusivité solubles. Ces profils, avec les solutions en température associées, ont été obtenus après une transformation de Liouville et une transformation de Darboux. Le modèle permet de simuler le comportement de bicouches à gradient de propriétés dont les exemples sont nombreux : les sols, les matériaux à gradients fonctionnels, la peau humaine, etc...

Nomenclature

a	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$	θ	transformée de FL de la température
b	effusivité thermique, $J.m^{-2}.K^{-1}.s^{1/2}$	ϕ	transformée de FL de la densité de flux
c	capacité thermique volumique, $J.m^{-3}.K^{-1}$	ψ	transformée de Liouville de la température
p	variable de Laplace (Fourier), $(rad).s^{-1}$	ω	pulsation, $rad.s^{-1}$
f	fréquence, s^{-1}	<i>Indices et exposants</i>	
x	rapport d'effusivité (cf. éq. 2, 7, 8)	0	surface
z	position, m	c	caractéristique
Z	impédance thermique, $K.W^{-1}.m^2$	i	interface
<i>Symboles grecs</i>		$-, +$	à gauche, à droite de l'interface
λ	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$		
ξ	racine carrée du temps de diffusion, $s^{1/2}$		

1. Introduction

De nombreux matériaux bicouches naturels ou manufacturés présentent une variation graduelle des propriétés à la frontière entre le revêtement et le substrat. Des exemples peuvent être trouvés dans différents domaines avec des échelles spatiales couvrant un large spectre: sols naturels ou artificiels, matériaux composites, barrières thermiques, matériaux à gradient de propriétés fonctionnelles céramique/métal ou métal/métal (« fonctionally graded materials » - FGM), empilements de semi-conducteurs, matériaux biologiques (ex : peau), etc.

La modélisation analytique du transfert thermique dynamique dans des structures présentant une gradation unidirectionnelle et continue des propriétés (conductivité et/ou capacité thermique volumique) reste un problème ouvert car il n'existe pas de solution générale pour des profils de forme arbitraire (l'équation de la chaleur se présente alors comme une équation aux dérivées partielles d'ordre deux avec *deux coefficients variables* : $c(z)$ et $\lambda(z)$). On peut trouver dans la littérature des solutions pour quelques profils particuliers (cf. [1] et les références citées dans [2]), mais, hormis quelques exceptions, elles font toutes appel à des fonctions spéciales, ce qui obère leur capacité à être intégrées dans un processus d'identification ou d'inversion. Une alternative naturelle consiste à découper finement le profil en couches homogènes et à résoudre le problème thermique en appliquant une des méthodes classiques : une transformation de Laplace suivie d'une inversion par la méthode

des résidus [3], une transformation intégrale [4], ou, plus simplement, la méthode des quadripôles suivie d'une inversion de Laplace numérique [5]. Cette discrétisation en fines couches homogènes enlève néanmoins de son intérêt à l'approche analytique par rapport à une méthode purement numérique (différences finies ou éléments finis). Une méthode de résolution analytique qui assimilerait le caractère *continu* des profils de propriétés, pour une grande variété de formes, restait à trouver.

Une méthode pour construire des séquences de profils d'effusivité thermique solubles avec les solutions en température associées a été récemment décrite [2]. On entend ici par *profil soluble* un profil pour lequel l'équation de la chaleur admet une *solution analytique exacte et de forme fermée*. Cette équation s'exprime, dans le domaine de Fourier- Laplace (FL), par:

$$pc(z)\theta = (\lambda(z)\theta_{,z})_{,z} \quad (1)$$

où p correspond, soit à la variable de Laplace (régime instationnaire), soit à la variable de Fourier $i\omega$ (régime périodique avec pulsation $\omega = 2\pi f$). La méthode fait appel à une transformation de Liouville puis à une ou plusieurs transformations de Darboux. La transformation de Liouville réalise un changement des variables dépendante et indépendante. Dans le nouvel espace, l'équation de la chaleur prend la forme d'une équation de Schrödinger stationnaire avec la courbure relative du profil d'effusivité pour fonction « potentiel ». La transformation de Darboux est une méthode bien connue en mécanique quantique: elle permet de construire très simplement, à partir d'un potentiel soluble, un nouveau potentiel, soluble également mais défini avec deux paramètres ajustables supplémentaires. On a montré dans [2] qu'appliquée à l'équation de la chaleur, cette transformation permet de générer *à la fois* de nouveaux profils d'effusivité solubles et leurs champs thermiques associés (température ou flux), ce qui a donné naissance à la méthode PROFIDT (*PRO*perty and *FI*eld *D*arboux *T*ransformations). En outre, initialiser le processus avec un potentiel *constant* a le mérite d'engendrer des solutions qui ne font appel qu'à des *fonctions analytiques élémentaires*.

Dans [2] a été décrite une famille de profils solubles en tangente hyperbolique (effusivité croissante) ou en cotangente hyperbolique (effusivité décroissante). Ces sigmoïdes à support semi-infini constituent un modèle particulièrement intéressant pour simuler le comportement thermique de matériaux manifestant une variation monotone et concentrée près de la surface de ses propriétés, comme par exemple les alliages cimentés ou nitrurés (acier, titane).

On propose une extension au modèle précédent qui consiste à ajouter dans le demi-espace négatif un profil soluble de même nature. La combinaison obtenue par « antisymétrie » (à un profil en tangente on associe un profil en cotangente et vice-versa) en est un cas particulier. Les paramètres peuvent alors être ajustés pour assurer au profil composite une continuité à l'interface jusqu'à la dérivée première. La portion ajoutée peut être tronquée et l'on dispose alors d'un modèle décrivant un revêtement sur un substrat semi-infini avec une zone de transition où l'effusivité passe d'une valeur asymptotique à une autre. L'épaisseur de cette zone de transition ainsi que l'effusivité à la frontière entre les deux domaines peuvent être réglées à loisir. L'impédance de surface sera obtenue par un traitement quadripolaire. Des illustrations d'application de ce nouveau modèle sont apportées ainsi qu'une analyse de sensibilité à l'étalement de la zone de diffusion de part et d'autre de l'interface.

2. Profils d'effusivité solubles en $\tanh^{\pm 1}$

Nous allons d'abord rappeler brièvement les éléments essentiels des profils solubles en $\tanh^{\pm 1}$ à savoir leur expression dans l'espace de Liouville, la démarche à entreprendre pour un retour dans l'espace réel, les solutions élémentaires en température (transformée) qui y sont attachées ainsi que l'impédance de surface associée. Pour plus de détails, voir [2] et [6].

La transformation de Liouville opère un changement de la variable indépendante $z \rightarrow \xi$ où $\xi = \xi(z)$ est la racine carrée du temps de diffusion (RCTD) sur l'intervalle $[0, z]$. Ce paramètre prend en compte les variations de diffusivité sur l'intervalle : $\xi = \int_0^z a^{-1/2}(u) du$. La transformation de Liouville consiste également en un changement de la variable dépendante $\theta(\xi, p) \rightarrow \psi(\xi, p) \equiv \theta(\xi, p) \sqrt{b(\xi)}$. La nouvelle fonction $\psi(\xi, p)$ satisfait une équation différentielle du second ordre qui s'avère être une équation de Schrödinger stationnaire. La racine de l'effusivité $\sqrt{b(\xi)}$ satisfait cette même équation mais avec une valeur propre à zéro. La méthode PROFIDT est une nouvelle méthode qui permet de construire des couples de solutions $\{\sqrt{b}, \psi\}$ pour des fonctions « potentiel » (de Schrödinger) de complexité croissante [2]. Partant du potentiel nul (cas trivial), une première application de la méthode PROFIDT fournit une famille de profils monotones dont les deux formes suivantes sont particulièrement intéressantes pour modéliser des milieux semi-infinis ($\xi \geq 0$):

$$\sqrt{b}(\xi) = \sqrt{b_{+\infty}} \tanh^j \left(\xi / \xi_{c+} + \operatorname{atanh}(x_{0+}^j) \right), \quad j = \begin{cases} +1 & : b_0 < b_{+\infty} \\ -1 & : b_0 > b_{+\infty} \end{cases} \quad (2)$$

où $x_{0+} = \sqrt{b_0} / \sqrt{b_{+\infty}}$. Ces sigmoïdes tronquées sont définies par trois paramètres : l'effusivité en surface : b_0 , l'effusivité asymptotique en $+\infty$: $b_{+\infty}$ et la RCTD caractéristique ξ_{c+} qui définit l'échelle spatiale sur laquelle s'opère la transition entre b_0 et $b_{+\infty}$. Des profils croissants en \tanh ($j=+1$) ou décroissants en \coth ($j=-1$) sont représentés en noir sur la fig. 1 en fonction de la RCTD normalisée ξ / ξ_{c+} . L'effusivité y est normalisée par b_0 et on a considéré dix valeurs différentes du rapport $b_{+\infty} / b_0$ entre 0.25 et 4.

A ces profils d'effusivité sont attachées des solutions ψ dont la forme générale peut s'exprimer comme combinaison linéaire des deux solutions indépendantes suivantes [2] :

$$\psi(\xi, p) \propto \left[\frac{\exp\left(-\sqrt{p}\xi\right) \left(\sqrt{p} + \sigma\right)}{\exp\left(+\sqrt{p}\xi\right) \left(\sqrt{p} - \sigma\right)} \right], \quad \sigma = \xi_{c+}^{-1} \tanh^j \left(\xi / \xi_{c+} + \operatorname{atanh}(x_{0+}^j) \right) \quad (3)$$

Dans le cas d'une couche semi-infinie on ne retiendra que la première, la seule à être bornée. L'impédance thermique en surface, $Z_0 = \theta_0 / \phi_0$, revêt alors la forme suivante [2]:

$$Z_0 = \left(b_0 \sqrt{p} \right)^{-1} \left(\sqrt{p} \xi_{c+} + x_{0+} \right) / \left(\sqrt{p} \xi_{c+} + x_{0+}^{-1} \right) \quad (4)$$

Cette expression est à peine plus compliquée que celle prévalant pour un milieu homogène d'effusivité b_0 , à savoir $Z_0 = \left(b_0 \sqrt{p} \right)^{-1}$. La connaissance de cette impédance permet alors de calculer la température de surface θ_0 en réponse à une densité de flux quelconque ϕ_0 . Le cas adiabatique a été étudié dans [2] et le cas avec pertes linéaires dans [6]. Pour ces deux situations, l'expression de la température dans l'espace de Laplace est suffisamment simple pour en permettre une inversion analytique [2, 6].

Le retour dans l'espace physique, à savoir le passage de la RCTD ξ à la profondeur z (transformation inverse de Liouville), passe par une intégration qui peut revêtir l'une ou l'autre des trois formes équivalentes suivantes:

$$z = \int_0^{\xi} \sqrt{a(u)} du = \int_0^{\xi} \lambda(u) b^{-1}(u) du = \int_0^{\xi} c^{-1}(u) b(u) du \quad (5)$$

On voit qu'il est indispensable de disposer d'une information supplémentaire sur la variation (en fonction de ξ) de l'une des trois autres propriétés : conductivité, diffusivité ou capacité thermique volumique ou d'une relation fonctionnelle entre deux des quatre propriétés. Ainsi, dans le cas trivial où la diffusivité est uniforme, l'échelle des profondeurs z est tout simplement proportionnelle à l'échelle des RCTD ξ . Si c'est la capacité thermique volumique qui est uniforme (hypothèse souvent rencontrée, notamment pour les aciers cémentés), l'intégration mène à une formulation *implicite* du profil d'effusivité [2] :

$$\frac{z(b)}{z_{c+}} = x_{0+}^{-1} \left(\operatorname{atanh} \left(\frac{b}{b_{+\infty}} \right)^{j/2} - \operatorname{atanh} \left(x_{0+}^j \right) \right) - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{b_0}} + 1, \quad j = \begin{cases} +1 & b_0 < b < b_{+\infty} \\ -1 & b_0 > b > b_{+\infty} \end{cases} \quad (6)$$

où la profondeur caractéristique z_{c+} a été définie par $z_{c+} \equiv \xi_{c+} (a_0 a_{+\infty})^{1/4}$. Une autre formulation (*explicite* cette fois-ci) a été décrite dans [2] pour le cas où la capacité thermique volumique suit une loi puissance de degré 1/3 en fonction de la conductivité. Les situations précédentes ne sont que trois parmi d'autres qui permettent une inversion de Liouville analytique. Le cas où la capacité thermique volumique est constante est décrit dans la fig. 2.

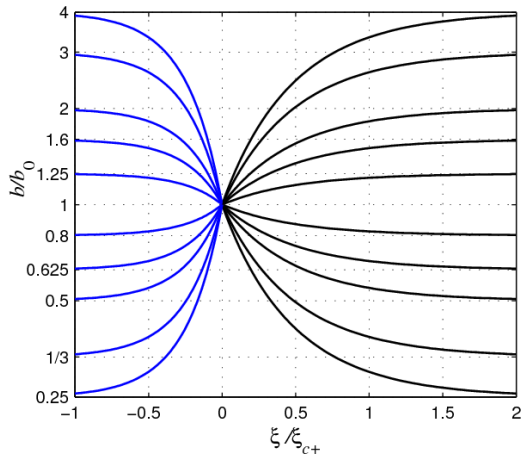


Figure 1 : En noir : profils solubles d'effusivité en $\tanh^{\pm 1}$ pour différentes valeurs de b_{∞}/b_0 rapportées à gauche de l'axe y (cf. éq. (2)).

En bleu : profils obtenus par symétrie et contraction/dilatation (cf. éq. (7)). La racine carrée du temps de diffusion ξ est normalisée par la RCTD caractéristique ξ_{c+} .

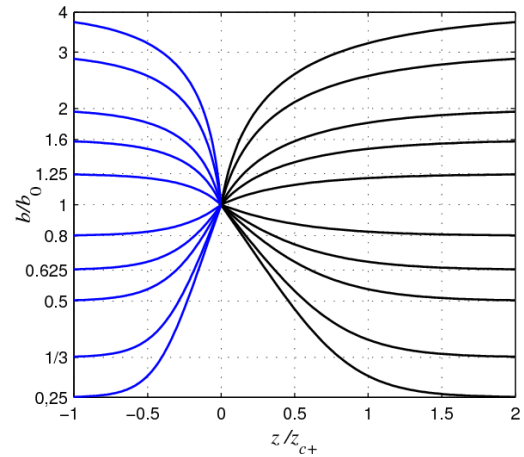


Figure 2 : Mêmes profils que sur la fig. 1 exprimés ici en fonction de la profondeur normalisée z/z_{c+} (inversion de Liouville réalisée avec l'hypothèse d'une capacité thermique volumique $c(z)$ uniforme, cf. éq. (6)). Un profil bleu+un profil noir = un profil composite bicouche à gradient.

3. Prolongement des profils d'effusivité solubles

Les profils en $\tanh^{\pm 1}$ définis sur le demi-espace positif (cf. eq. (2) ; fig. 1 et 2 : courbes noires) sont naturellement complétés dans le demi-espace négatif (courbes bleues) :

$$\sqrt{b}(\xi) = \sqrt{b_{-\infty}} \tanh^m \left(-\xi/\xi_{c-} + \operatorname{atanh} \left(x_{0-}^m \right) \right), \quad m = \begin{cases} +1 & : b_0 < b_{-\infty} \\ -1 & : b_0 > b_{-\infty} \end{cases} \quad (7)$$

où $x_{0-} = \sqrt{b_0}/\sqrt{b_{-\infty}}$. Ici, la même effusivité b_0 a été adoptée pour $\xi \rightarrow 0^+$ et pour $\xi \rightarrow 0^-$ en vue de construire des profils *continus*, mais on pourrait s'affranchir de cette contrainte. Les figures 1 et 2 ont été construites en fixant ξ_{c-} , la RCTD caractéristique à gauche, à la moitié de ξ_{c+} , la RCTD caractéristique à droite. Un profil synthétique soluble et continu de support *infini* peut ensuite être construit en joignant à un profil du faisceau à gauche un profil quelconque du faisceau à droite. Ainsi, un profil monotone croissant serait obtenu en joignant à un profil en coth ($\xi < 0$) un profil en tanh ($\xi > 0$), et vice-versa pour un profil monotone décroissant. Par ailleurs, un profil avec un point de rebroussement minimum (respectivement maximum) serait obtenu en joignant deux profils en tanh (respectivement en coth).

Dans la suite, nous allons traiter le cas d'un *revêtement d'épaisseur finie* sur un *substrat semi-infini* (cf. fig. 3). Par commodité, nous décalons l'origine des échelles z et ξ à la surface externe du revêtement. L'interface est à la profondeur $z_i \leftrightarrow \xi_i$. Les profils composites, continus et monotones que nous allons étudier sont décrits par :

$$\sqrt{b}(\xi) = \begin{cases} \sqrt{b_{+\infty}} \tanh^j\left(\frac{(\xi - \xi_i)}{\xi_{c+}} + \operatorname{atanh}(x_{i+}^j)\right), & \xi \geq \xi_i \\ \sqrt{b_{-\infty}} \tanh^{-j}\left(\frac{(\xi_i - \xi)}{\xi_{c-}} + \operatorname{atanh}(x_{i-}^{-j})\right), & \xi < \xi_i \end{cases} \quad (8)$$

avec $j=+1$ pour un profil croissant et $j=-1$ pour un profil décroissant ; $x_{i\pm} = \sqrt{b_i}/\sqrt{b_{\pm\infty}}$. Pour les illustrations qui suivent, nous restreindrons l'analyse aux profils à *dérivée continue* à l'interface (encore une fois, le modèle ne se limite pas à cette situation particulière). Cette dernière contrainte est satisfaite lorsque les RCTD caractéristiques gauche et droite vérifient :

$$\xi_{c-} = \xi_{c+} \left(x_{i-} - x_{i-}^{-1} \right) / \left(x_{i+}^{-1} - x_{i+} \right) \quad (9)$$

(il est à noter que lorsque l'effusivité à l'interface correspond à la moyenne géométrique des effusivités asymptotiques, $b_i = \sqrt{b_{-\infty} b_{+\infty}}$, la condition (9) devient simplement : $\xi_{c-} = \xi_{c+}$).

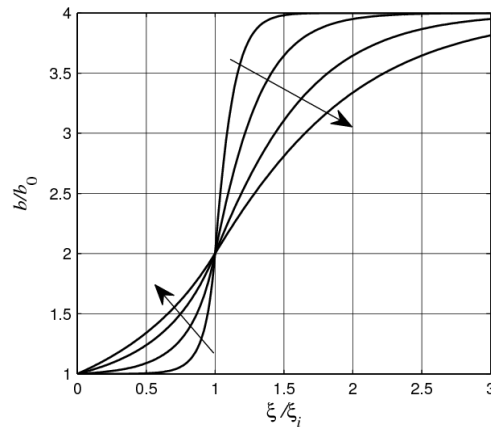


Figure 3 : Profils d'effusivité pour un bicouche avec interface diffuse et substrat semi-infini (ξ_i est la RCTD du revêtement). Cas particulier avec $b_{+\infty}/b_0 = 4$ et $b_i/b_0 = 2$. Les flèches indiquent une progression de la RCTD caractéristique normalisée du substrat ξ_{c+}/ξ_i de 0.2, 0.5, 1 à 1.5.

La figure 3 décrit quelques exemples de tels profils synthétiques croissants, pour un rapport $b_{+\infty}/b_0$ de 4. L'effusivité à l'interface a été fixée au double de l'effusivité en surface. Différentes valeurs ont été considérées pour le rapport entre la RCTD caractéristique ξ_{c+} et la

RCTD du revêtement ξ_i : 0.2, 0.5, 1, 1.5. Cela correspond à un étalement de plus en plus important des variations d'effusivité de part et d'autre de l'interface.

Dans le cas présent où l'effusivité en surface b_0 sert de référence et où la détermination de l'effusivité (virtuelle) $b_{-\infty}$ se fait a posteriori, celle-ci, puisqu'elle est réalisée par l'entremise de l'équation (8) exprimée en $\xi = 0$ et de l'équation (9), doit nécessairement faire appel à une procédure itérative puisque l'équation (8), d'inconnue $x_{i-} = \sqrt{b_i/b_{-\infty}}$, est transcendante.

Le nombre de paramètres décrivant un profil bicouche de forme $\tanh^m - \tanh^j$ est de 7 dans le cas général, 6 s'il est continu, 5 si la dérivée est continue à l'interface, 4 si l'effusivité à l'interface est imposée en fonction des effusivités asymptotiques.

4. Quadripôle thermique attaché au revêtement

Le quadripôle thermique attaché au revêtement se calcule suivant une procédure classique qui consiste à exprimer la température et la densité de flux aux deux bornes du revêtement et à éliminer les constantes de la combinaison linéaire définissant la température [5]. Au départ, l'expression générale de la température est obtenue en divisant sa transformée de Liouville (éq. (3)) par la racine du profil d'effusivité (éq. (8)). Après un développement analytique fastidieux on accède à une formulation néanmoins compacte des quatre termes A, B, C, D du quadripôle (un calculateur symbolique peut être utilisé pour y arriver plus rapidement ; sa mise en œuvre a servi pour la validation) :

$$(1 - p\xi_c^2) \begin{bmatrix} A \\ Bb_{-\infty}\sqrt{p} \\ Cb_{-\infty}^{-1}/\sqrt{p} \\ D \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{A} \\ \tilde{B} \\ \tilde{C} \\ \tilde{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - p\xi_c^2 x_{i-} x_{0-}^{-1} & \sqrt{p}\xi_c (x_{i-} - x_{0-}^{-1}) \\ \sqrt{p}\xi_c (x_{i-}^{-1} - x_{0-}^{-1}) & 1 - p\xi_c^2 x_{0-}^{-1} x_{i-}^{-1} \\ \sqrt{p}\xi_c (x_{i-} - x_{0-}) & 1 - p\xi_c^2 x_{0-} x_{i-} \\ 1 - p\xi_c^2 x_{0-} x_{i-}^{-1} & \sqrt{p}\xi_c (x_{i-}^{-1} - x_{0-}) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cosh(\sqrt{p}\xi_i) \\ \sinh(\sqrt{p}\xi_i) \end{bmatrix} \quad (10)$$

5. Impédance du bicouche et résultats de simulation

L'impédance de surface du bicouche, Z_0 , s'obtient à partir des termes quadripolaires précédents et de l'impédance du substrat *semi-infini* (eq. (4)) où l'on aura pris soin de remplacer b_0 par l'effusivité à l'interface b_i ; cette dernière impédance sera notée Z_s) :

$$Z_0 = \frac{AZ_s + B}{CZ_s + D} = \frac{1}{b_0\sqrt{p}} \frac{\tilde{A}x_{i-}^{-2}(\sqrt{p}\xi_{c+} + x_{i+}) + \tilde{B}(\sqrt{p}\xi_{c+} + x_{i+}^{-1})}{\tilde{C}(\sqrt{p}\xi_{c+} + x_{i+}) + \tilde{D}x_{i-}^2(\sqrt{p}\xi_{c+} + x_{i+}^{-1})} x_{i-}^2 x_0^2 \quad (11)$$

(dans le cas d'un substrat d'épaisseur *finie*, il faudrait calculer Z_s à partir des termes de son quadripôle, termes qui s'apparentent à ceux exposés dans l'éq. (10)). Lorsque l'on compare l'expression de Z_0 avec celle du bicouche avec couches homogènes, aux deux fonctions hyperboliques en $\sqrt{p}\xi_i$ classiques s'ajoutent des polynômes en \sqrt{p} de degré 3 au plus et dont les coefficients font intervenir ξ_{c-} , ξ_{c+} , x_{0-} , x_{i-} , et x_{i+} . Le calcul de la réponse en régime transitoire nécessite une inversion de Laplace numérique [5] ; les résultats seront présentés dans un futur article. La réponse du bicouche (adiabatique) en régime périodique est illustrée sur les figures 4 et 5 pour l'amplitude et la phase. Aux réponses des quatre bicouches avec interface diffuse représentés sur la fig. 3 on a ajouté celle d'un revêtement homogène sur un substrat homogène présentant le même rapport d'effusivité $b_{+\infty}/b_0 = 4$.

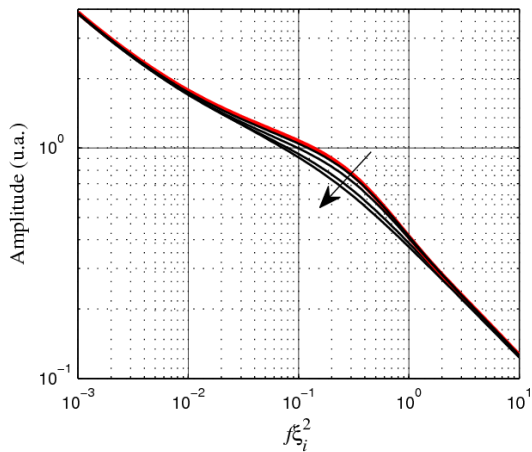


Figure 4 : Amplitude de la température de surface en régime modulé pour les 4 bicouches de la fig. 3 (en noir) et pour le bicouche classique avec saut d'effusivité (en rouge).

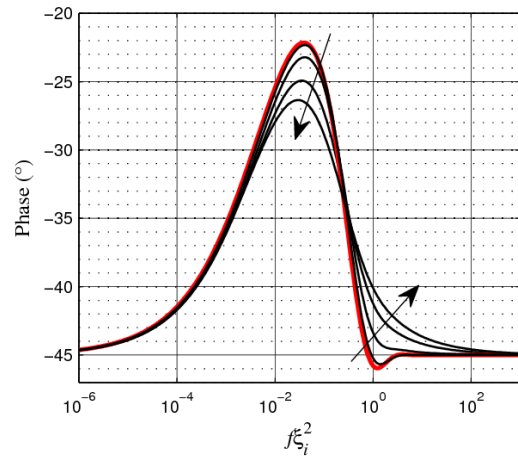


Figure 5 : Idem pour la phase. En abscisse : fréquence adimensionnée par le temps de diffusion à travers le revêtement ξ_i^2 .

La réponse des bicouches avec interface diffuse converge bien vers celle du bicouche avec couches homogènes à mesure que la RCDT caractéristique ξ_{c+} décroît. Par ailleurs, une procédure de validation systématique du nouveau modèle a consisté à comparer sa réponse à celle d'un multicouche formé de 200 couches homogènes approchant au mieux le profil continu composite ; les réponses respectives sont indiscernables. Sur les fig. 4 et 5 les comportements aux fréquences élevées, resp. faibles, sont tous semblables : ils sont conditionnés par l'effusivité en surface b_0 , resp. par l'effusivité à grande profondeur $b_{+\infty}$. Pour mettre mieux en évidence l'impact du caractère diffus de l'interface sur la température, nous avons rapporté sur les figures 6 et 7 le contraste relatif en amplitude et le contraste absolu en phase par rapport au bicouche classique avec saut discret d'effusivité.

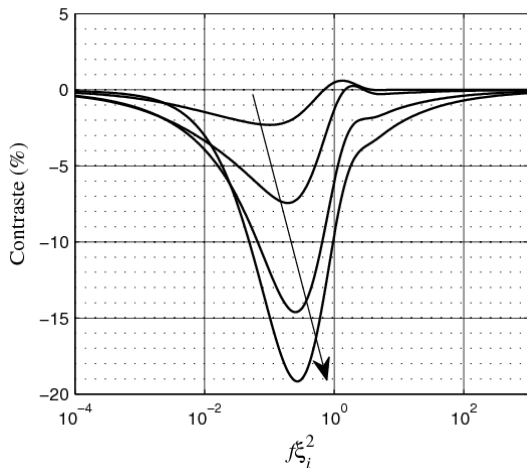


Figure 6 : Contraste relatif en amplitude par rapport à la réponse du bicouche avec couches homogènes.

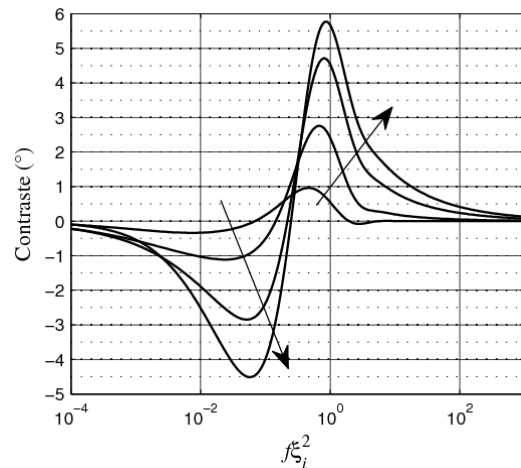


Figure 7 : Idem pour le contraste en phase. Les flèches ont la même signification que sur la fig. 3.

On constate qu'un étalement de l'effusivité sur 20% de la RCDT du revêtement ($\xi_{c+}/\xi_i = 0.2$) se manifeste en surface par un contraste de seulement 2% sur l'amplitude et de 1° sur la

phase, au mieux. L'étalement de l'effusivité doit donc être plus important pour avoir un impact significatif sur la température superficielle. En corollaire, ce résultat apporte un nouvel éclairage sur l'origine des difficultés rencontrées pour caractériser avec précision le profil d'effusivité d'un matériau hétérogène par « inversion » de sa seule réponse thermique en surface [7, 8]. L'introduction d'une régularisation est évidemment indispensable. Pour ce faire, on peut chercher à réduire la dimension de l'espace des solutions en utilisant, par exemple, un modèle direct à nombre restreint de paramètres [8]. L'outil analytique présenté dans cet article est donc tout à fait approprié car il permet de modéliser finement des matériaux à gradients sans toutefois s'accompagner d'un nombre excessif de paramètres ajustables (principe de parcimonie).

6. Conclusion

On a présenté un nouvel outil analytique pour modéliser le comportement thermique d'un revêtement sur un substrat (semi-infini ; le cas d'un substrat fini sera traité ultérieurement). Son originalité réside dans la prise en compte d'une évolution graduelle 1D des propriétés thermiques de part et d'autre de l'interface. Cette double évolution suit, pour la racine de l'effusivité, une loi en $\tanh^{\pm 1}$ de la racine du temps de diffusion depuis cette interface. Le nombre de paramètres d'ajustement (≤ 7) permet de modéliser fidèlement un grand nombre de configurations sans être toutefois prohibitif. Dans cet article nous avons illustré le cas d'une progression monotone et C^1 de l'effusivité. Le même modèle peut aussi servir à simuler le cas où l'effusivité présente un minimum (ou un maximum) à l'interface. L'intérêt du modèle est que la température de surface s'exprime dans l'espace de Fourier-Laplace de façon *exacte*, sous une *forme fermée*, et avec des *fonctions élémentaires* seulement (ceci est également valable à toute autre profondeur dans le bicouche). Le fait que la solution en température soit exacte, quelle que soit la raideur du profil d'effusivité, donne un avantage certain à cette approche par rapport aux méthodes analytiques ou numériques basées sur une discrétisation en strates homogènes. La simplicité de ce modèle en fait un élément de choix pour servir de noyau dans une méthode inverse destinée à la caractérisation des bicouches à gradient à partir de leur réponse thermique en surface, étude qui fera l'objet de travaux complémentaires.

Références

- [1] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Oxford Univ. Press (1959).
- [2] J.-C. Krapez, Heat diffusion in inhomogeneous graded media: chains of exact solutions by joint Property & Field Darboux Transformations, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 99 (2016), 485-503.
- [3] D. Balageas, J.-C. Krapez, P. Cielo, Pulsed photothermal modeling of layered materials, *J. Appl. Phys.*, 59 (1986), 348-357.
- [4] J.-C. Krapez, P. Cielo, Thermographic NDE: data inversion procedures. Part I: 1-D analysis, *Res. Nondestr. Eval.*, 3 (1991), 81-100.
- [5] D. Maillet, S. André, J.-C. Batsale, A. Degiovanni, C. Moyne, *Thermal Quadrupoles: Solving the Heat Equation through Integral Transforms*, J. Wiley & Sons, New-York, 2000.
- [6] J.-C. Krapez, Construction of sequences of exact analytical solutions for heat diffusion in graded heterogeneous materials by the Darboux transformation method. Examples for half-space, *J. Phys. Conf. Series*, 745 (2016), 032059.
- [7] J.-C. Krapez, R. Li Voti, Effusivity depth profiling from pulsed radiometry data: comparison of different reconstruction algorithms, *Anal. Sci.* 17 (2001) 417-418.
- [8] J.-C. Krapez, Thermal effusivity profile characterization from pulse photothermal data, *J. Appl. Phys.*, 87(9) (2000) 4514-4524.