

# Formulation Intégrale et Algorithmes de Monte Carlo à Collisions Nulles

**M. Galtier<sup>(a)</sup>, S. Blanco<sup>(b)</sup>, M. El Hafi<sup>(a)</sup>, V. Eymet<sup>(c)</sup>, R. Fournier<sup>(b)</sup>**

(a) RAPSODEE - UMR 5302 - Albi

(b) LAPLACE - UMR 5213 - Toulouse

(c) LAB - UMR 5804 - Bordeaux

10 et 11 octobre 2012

6<sup>e</sup> Journées d'Etudes en Rayonnement Thermique

# Sommaire

## Introduction aux ACN

- Monte Carlo et Milieux participants
- Historique des Algorithmes à Collisions Nulles
- Principe des ACN en formulation différentielle
- Et concrètement ?

## Formulation et extension

- Description du cas d'étude
- De l'algorithmme à collisions nulles "historique" ...
- ... à sa formulation intégrale
- ... à sa formulation intégrale
- Introduction de probabilités arbitraires
- Suppression de la contrainte sur  $\hat{k}$

## Généralisation

- Une autre équation de Fredholm
- Comparaison avec les ACN
- Les ACN appartiennent à une classe beaucoup plus grande

## Conclusion

- Conclusion
- Quelques ordres de grandeur

# Sommaire

## Introduction aux ACN

Monte Carlo et Milieux participants  
Historique des Algorithmes à Collisions Nulles  
Principe des ACN en formulation différentielle  
Et concrètement ?

## Formulation et extension

## Généralisation

## Conclusion

## Monte Carlo et Milieux participants

- En milieux participants, un terme d'atténuation apparaît :

$$\exp\left(-\int_0^\lambda d\sigma k_a(\sigma) + k_s(\sigma)\right) = \exp(-\tau(\lambda))$$

Ex : luminance  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega})$  dans un milieu infini émettant/absorbant

- Formulation intégrale "Physique" du cas d'étude :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^\infty d\lambda k_a(\mathbf{x}-\lambda\boldsymbol{\omega}) \exp\left(-\int_0^\lambda d\sigma k_a(\mathbf{x}-\sigma\boldsymbol{\omega})\right) f^{eq}(\mathbf{x}-\lambda\boldsymbol{\omega})$$

- Méthodes de Monte Carlo :  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^\infty p_\Lambda(\lambda) w d\lambda$  avec :

$$p_\Lambda(\lambda) = k_a(\mathbf{x}-\lambda\boldsymbol{\omega}) \exp\left(-\int_0^\lambda d\sigma k_a(\mathbf{x}-\sigma\boldsymbol{\omega})\right) ; \quad w = f^{eq}(\mathbf{x}-\lambda\boldsymbol{\omega})$$

⇒ Inversion nécessaire de la cumulée de  $p_\Lambda(\lambda)$  :  $\exp\left(-\int_0^\lambda d\sigma k_a(\mathbf{x}-\sigma\boldsymbol{\omega})\right) = \exp(-\tau(\lambda))$

- ↪ Si  $\tau$  inversible : Aucun problème
- ↪ Si  $\tau$  non inversible : Problème d'échantillonnage des  $\lambda$  (solutions imparfaites : maillage ou techniques numériques).

# Historique des Algorithmes à Collisions Nulles

- Les ACN trouvent indépendamment leurs origines dans deux communautés :
  - Physique des Plasmas (*Skullerud, 1968*)
  - Neutronique (*Woodcock, 1965 & Coleman, 1968*)
- D'autres communautés vont les adopter :
  - Dynamique des fluides raréfiés (*Koura, 1986*)
  - Synthèse d'image (*Brown, 2003*) et Tomographie (*Rehfeld, 2008*)
- On rencontre ces techniques sous différentes dénominations.
- Technique peu employée à notre connaissance dans la communauté du transfert radiatif

## Principe des ACN en formulation différentielle

- Equation de Boltzmann :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla f = -(k_a + k_s)cf + S + \int_{4\pi} k_s cf' p(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}'$$

- Principe** : introduction de nouvelles collisions (sans effets) dans l'ETR standard : les Collisions Nulles. Ces collisions fictives (de coefficient  $k_n$ ) correspondent à des diffusions simples sans changement de direction ni d'énergie (d'où le  $\delta$ ).

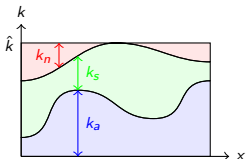
$$\frac{\partial f}{\partial t} + c\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla f = -(k_a + k_s + k_n)cf + S + \int_{4\pi} k_s cf' p(\boldsymbol{\omega}|\boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}' + \int_{4\pi} k_n cf' \delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}') d\boldsymbol{\omega}'$$

- On notera désormais  $\hat{k} = k_a + k_s + k_n$  le coefficient d'extinction modifié.

## Et concrètement ?

Les ACN s'inscrivent dans les Méthodes de Monte Carlo  $\Rightarrow$  N réalisations aléatoires

- Définition du champ d'extinction modifié  $\hat{k} = k_a + k_s + k_n$  majorant le champ d'extinction réel  $k = k_a + k_s$  par l'ajout de collisions nulles ( $k_n$ ).  
Il doit être choisi de sorte à pouvoir inverser la nouvelle épaisseur optique :  $\hat{\tau} = \int_0^\lambda d\sigma \hat{k}$



- Échantillonnage des libres parcours à partir du champ modifié  $\hat{k}$  (selon  $p_T(\hat{\tau}) = e^{-\hat{\tau}}$ ).
- Évaluation du type de collision par le tir d'une valeur  $r \in [0, 1]$  (selon  $p_R(r)$  uniforme)
  - si  $r < \frac{k_a}{\hat{k}}$  : Absorption  $\rightarrow$  définition du poids
  - si  $\frac{k_a}{\hat{k}} < r < \frac{k_a + k_s}{\hat{k}}$  : Diffusion  $\rightarrow$  nouveau libre parcours dans une nouvelle direction
  - si  $r > \frac{k_a + k_s}{\hat{k}}$  : Collision Nulle  $\rightarrow$  nouveau libre parcours dans la même direction

# Sommaire

## Introduction aux ACN

### Formulation et extension

Description du cas d'étude

De l'algorithme à collisions nulles "historique" ...

... à sa formulation intégrale

... à sa formulation intégrale

Introduction de probabilités arbitraires

Suppression de la contrainte sur  $\hat{k}$

## Généralisation

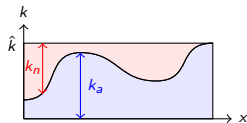
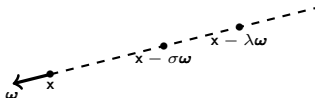
## Conclusion



## Description du cas d'étude

- Etude de la luminance  $f(x, \omega)$  en un milieu infini émettant/absorbant.

$$f(x, \omega) = \int_0^{+\infty} d\lambda k_a(x-\lambda\omega) f^{eq}(x-\lambda\omega) e^{-\int_0^\lambda d\sigma k_a(x-\sigma\omega)}$$



- Si on était capable d'échantillonner les libres parcours, on ferait :

```

w_tot = 0;
foreach event i do
  | Beer sampling of λ;
  | w_tot = w_tot + w;
end
f_tilde_N = w_tot / N;
  
```

$$f(x, \omega) = \int_0^{+\infty} p_\Lambda(\lambda) d\lambda w$$

avec

$$p_\Lambda(\lambda) = k_a(x-\lambda\omega) e^{-\int_0^\lambda d\sigma k_a(x-\sigma\omega)}$$

$$w = f^{eq}(x-\lambda\omega)$$

## De l'algorithme à collisions nulles "historique" ...

- On souhaite estimer  $f(x, \omega)$  par ACN (estimateur :  $\tilde{f}$ )

```

 $w_{tot} = 0;$ 
foreach event  $i$  do
   $j = 0; \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}; abs = false;$ 
  while  $abs = false$  do
    Beer sampling of  $\lambda_j$ ;
     $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_j - \lambda_j \boldsymbol{\omega};$ 
    Unif. sampling of  $r_{j+1}$ ;
    if  $r_{j+1} < \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{k(\mathbf{x}_{j+1})}$  then
       $abs = true;$ 
       $w_{tot} = w_{tot} + w_{j+1};$ 
    else
       $j = j + 1;$ 
    end
  end
 $\tilde{f}_N = w_{tot} / N;$ 

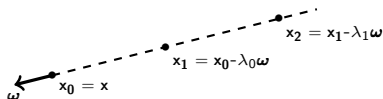
```

- Beer sampling :

$$p_{\lambda_j}(\lambda_j) = \hat{k}(\mathbf{x}_j - \lambda_j \boldsymbol{\omega}) \exp\left(-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}(\mathbf{x}_j - \sigma_j \boldsymbol{\omega})\right)$$

- Uniform sampling :  $p_{R_j}(r_j) = 1$

- $w_j = f^{eq}(\mathbf{x}_j)$



## ... à sa formulation intégrale

- Transposition directe de l'algorithme sous forme intégrale :

$$f(\mathbf{x}_0, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_0}(\lambda_0) d\lambda_0 \int_0^1 \rho_{R_1}(r_1) dr_1 \left\{ \mathcal{H}\left(r_1 < \frac{k_a(\mathbf{x}_1)}{\hat{k}(\mathbf{x}_1)}\right) w_1 + \mathcal{H}\left(r_1 > \frac{k_a(\mathbf{x}_1)}{\hat{k}(\mathbf{x}_1)}\right) \right. \\ \times \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_1}(\lambda_1) d\lambda_1 \int_0^1 \rho_{R_2}(r_2) dr_2 \left\{ \mathcal{H}\left(r_2 < \frac{k_a(\mathbf{x}_2)}{\hat{k}(\mathbf{x}_2)}\right) w_2 + \mathcal{H}\left(r_2 > \frac{k_a(\mathbf{x}_2)}{\hat{k}(\mathbf{x}_2)}\right) \right. \\ \left. \left. \times \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_2}(\lambda_2) d\lambda_2 \int_0^1 \rho_{R_3}(r_3) dr_3 \dots \right\} \right\}$$

- On a donc une expression de la forme :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_0}(\lambda_0) d\lambda_0 [P_1 w_1 + (1 - P_1) I_1]$$

Avec :

- $P_j = \frac{k_a(\mathbf{x}_j)}{\hat{k}(\mathbf{x}_j)}$
- $w_j = f^{eq}(\mathbf{x}_j)$
- $I_j = \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_j}(\lambda_j) d\lambda_j [P_{j+1} w_{j+1} + (1 - P_{j+1}) I_{j+1}]$

- On peut donc écrire en toute généralité :

$$f(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} d\lambda_j \hat{k}(\mathbf{x}_{j+1}) e^{-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}(\mathbf{x}_{j-\sigma_j} \boldsymbol{\omega})} \left[ \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})} f^{eq}(\mathbf{x}_{j+1}) + \left(1 - \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})}\right) f(\mathbf{x}_{j+1}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

## ... à sa formulation intégrale

- La formulation récursive ainsi établie

$$f(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} d\lambda_j \hat{k}(\mathbf{x}_{j+1}) e^{-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}(\mathbf{x}_j - \sigma_j \boldsymbol{\omega})} \left[ \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})} f^{eq}(\mathbf{x}_{j+1}) + \left( 1 - \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})} \right) f(\mathbf{x}_{j+1}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

peut être réécrite comme une simple équation de Fredholm :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} d\lambda e^{-\int_0^{\lambda} d\sigma \hat{k}(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega})} \left[ k_a(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}) f^{eq}(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}) + \left( \hat{k}(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}) - k_a(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}) \right) f(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

- Or les collisions nulles ne sont que des diffusions vers l'avant :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} d\lambda e^{-\int_0^{\lambda} d\sigma k_a(\mathbf{x} - \sigma \boldsymbol{\omega}) + k_n(\mathbf{x} - \sigma \boldsymbol{\omega})} \left[ k_a(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}) f^{eq}(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}) + k_n(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}) \int_{4\pi} d\boldsymbol{\omega}' \delta(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}') f(\mathbf{x} - \lambda \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}') \right]$$

⇒ Formulation intégrale standard d'un cas purement absorbant et diffusant.

## Introduction de probabilités arbitraires

- A partir de

$$f(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} d\lambda_j \hat{k}(\mathbf{x}_{j+1}) e^{-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}(\mathbf{x}_j - \sigma_j \boldsymbol{\omega})} \left[ \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})} f^{eq}(\mathbf{x}_{j+1}) + \left(1 - \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})}\right) f(\mathbf{x}_{j+1}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

on peut introduire pour le  $j + 1^{ieme}$  libre parcours une probabilité arbitraire non nulle  $P_{j+1}$  :

$$f(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} P_{\Lambda_j}(\lambda_j) d\lambda_j \left[ P_{j+1} \left( \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})} \frac{1}{P_{j+1}} f^{eq}(\mathbf{x}_{j+1}) \right) + (1 - P_{j+1}) \left( \left(1 - \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\hat{k}(\mathbf{x}_{j+1})}\right) \frac{1}{1 - P_{j+1}} \right) f(\mathbf{x}_{j+1}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

- Formalisme MMC :  $f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} \hat{\rho}_{\Lambda_0}(\lambda_0) d\lambda_0 \left[ P_1 w_1 + (1 - P_1) t_1 \right]$  avec :

$$w_j = \frac{k_a(\mathbf{x}_j)}{\hat{k}(\mathbf{x}_j)} \frac{1}{P_j} f^{eq}(\mathbf{x}_j) \prod_{m=1}^{j-1} \left( \frac{\hat{k}(\mathbf{x}_j) - k_a(\mathbf{x}_j)}{\hat{k}(\mathbf{x}_j)} \frac{1}{1 - P_j} \right) \quad \boxed{P_j = \text{arbitraire}}$$

⇒ On garde donc exactement le même algorithme, seules les probabilités et les poids changent.

## Suppression de la contrainte sur $\hat{k}$

- Lorsque  $\hat{k}$  majorait le champ réel  $k_a$ ,  $P_j$  était définie par :

$$P_j = \frac{k_a(\mathbf{x}_j)}{\hat{k}(\mathbf{x}_j)}$$

- Le champ  $\hat{k}$  devait donc majorer  $k_a$  en tout point  $\Rightarrow$  très limitant.
- On choisi désormais arbitrairement la valeur de  $P_j$ . Il n'est alors plus nécessaire que le champ d'extinction modifié  $\hat{k}$  majore le champ réel  $k_a$ .
- Une proposition :

$$P_j = \frac{k_a(\mathbf{x}_j)}{k_a(\mathbf{x}_j) + |\hat{k}(\mathbf{x}_j) - k_a(\mathbf{x}_j)|}$$

- Lorsque  $\hat{k}$  sera majorant, on gardera rigoureusement le même algorithme historique.
- Sinon, on aura un algorithme équivalent où seuls les poids seront modifiés (idéal pour des cas ponctuels ou le champ modifié n'est pas majorant).

# Sommaire

Introduction aux ACN

Formulation et extension

**Généralisation**

- Une autre équation de Fredholm

- Comparaison avec les ACN

- Les ACN appartiennent à une classe beaucoup plus grande

Conclusion

## Une autre équation de Fredholm

- ETR sous forme différentielle (sans diffusion ni dépendance temporelle) :

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla f = -k_a f + k_a f^{eq}$$

- Par intégration, on obtient une nouvelle équation de Fredholm :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = f(\mathbf{x} - L\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) + \int_0^L d\lambda [k_a(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) f^{eq}(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) - k_a(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) f(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega})]$$

- On considère qu'il n'y a pas de condition aux frontières :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^L d\lambda \left[ k_a(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) f^{eq}(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) - k_a(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) f(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

- On pose des pdf et probabilités arbitraires :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^L p_\Lambda(\lambda) d\lambda \left[ P(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) \left( \frac{k_a(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}) f^{eq}(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega})}{p_\Lambda(\lambda) P(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega})} \right) + (1 - P(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega})) \left( - \frac{k_a(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega})}{p_\Lambda(\lambda) (1 - P(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}))} \right) f(\mathbf{x} - \lambda\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$



## Une autre équation de Fredholm

- On peut reformuler la dernière équation

$$f(x, \omega) = \int_0^L \rho_\Lambda(\lambda) d\lambda \left[ P(x-\lambda\omega) \left( \frac{k_a(x-\lambda\omega) f^{eq}(x-\lambda\omega)}{\rho_\Lambda(\lambda) P(x-\lambda\omega)} \right) + (1 - P(x-\lambda\omega)) \left( -\frac{k_a(x-\lambda\omega)}{\rho_\Lambda(\lambda)(1 - P(x-\lambda\omega))} \right) f(x-\lambda\omega, \omega) \right]$$

en une expression récursive

$$f(x_j, \omega) = \int_0^L \rho_\Lambda(\lambda_j) d\lambda_j \left[ P_{j+1} \left( \frac{k_a(x_{j+1}) f^{eq}(x_{j+1})}{\rho_\Lambda(\lambda_j) P_{j+1}} \right) + (1 - P_{j+1}) \left( -\frac{k_a(x_{j+1})}{\rho_\Lambda(\lambda_j)(1 - P_{j+1})} \right) f(x_{j+1}, \omega) \right]$$

- On retrouve bien une formulation du type :

$$f(x, \omega) = \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_0}(\lambda_0) d\lambda_0 \left[ P_1 w_1 + (1 - P_1) I_1 \right]$$

avec

$$w_j = \frac{k_a(x_j) f^{eq}(x_j)}{\rho_\Lambda(\lambda_{j-1}) P_j} \prod_{m=1}^{j-1} \left[ -\frac{k_a(x_m)}{\rho_\Lambda(\lambda_{m-1})(1 - P_m)} \right]$$

$$I_j = \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_j}(\lambda_j) d\lambda_j \left[ P_{j+1} w_{j+1} + (1 - P_{j+1}) I_{j+1} \right]$$

⇒ Les ACN interviennent également pour supprimer l'alternance de signe du poids

## Comparaison avec les ACN

- Comparaison de l'expression récursive de  $f(\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\omega})$  à partir de l'ETR sous forme diff. et à partir des ACN historiques. On pose  $e^{-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}(\mathbf{x}_j, \sigma_j; \boldsymbol{\omega})} = e^{-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}\sigma}$

$$\int_0^L \rho_{\Lambda}(\lambda_j) d\lambda_j \left[ P_{j+1} \left( \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1}) f^{eq}(\mathbf{x}_{j+1})}{\rho_{\Lambda}(\lambda_j) P_{j+1}} \right) + (1 - P_{j+1}) \left( -\frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1})}{\rho_{\Lambda}(\lambda_j)(1 - P_{j+1})} \right) f(\mathbf{x}_{j+1}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

vs

$$\int_0^L \rho_{\Lambda}(\lambda_j) d\lambda_j \left[ P_{j+1} \left( \frac{k_a(\mathbf{x}_{j+1}) f^{eq}(\mathbf{x}_{j+1}) e^{-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}\sigma}}{\rho_{\Lambda}(\lambda_j) P_{j+1}} \right) + (1 - P_{j+1}) \left( \frac{k_n(\mathbf{x}_{j+1}) e^{-\int_0^{\lambda_j} d\sigma_j \hat{k}\sigma}}{\rho_{\Lambda}(\lambda_j)(1 - P_{j+1})} \right) f(\mathbf{x}_{j+1}, \boldsymbol{\omega}) \right]$$

- Expression identique de type :

$$f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\omega}) = \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_0}(\lambda_0) d\lambda_0 \left[ P_1 w_1 + (1 - P_1) l_1 \right]$$

- Avec la même définition de  $l_j$  :

$$l_j = \int_0^{+\infty} \rho_{\Lambda_j}(\lambda_j) d\lambda_j \left[ P_{j+1} w_{j+1} + (1 - P_{j+1}) l_{j+1} \right]$$

- Seuls des poids  $w_j$  diffèrent :

$$\frac{k_a(\mathbf{x}_j) f^{eq}(\mathbf{x}_j)}{\rho_{\Lambda}(\lambda_{j-1}) P_j} \prod_{m=1}^{j-1} \left[ -\frac{k_a(\mathbf{x}_m)}{\rho_{\Lambda}(\lambda_{m-1})(1 - P_m)} \right]$$

vs

$$\frac{k_a(\mathbf{x}_j) f^{eq}(\mathbf{x}_j) e^{-\int_0^{\lambda_{j-1}} d\sigma_j \hat{k}\sigma}}{\rho_{\Lambda}(\lambda_{j-1}) P_j} \prod_{m=1}^{j-1} \left[ \frac{k_n(\mathbf{x}_m) e^{-\int_0^{\lambda_{m-1}} d\sigma \hat{k}\sigma}}{\rho_{\Lambda}(\lambda_{m-1})(1 - P_m)} \right]$$

## Les ACN appartiennent à une classe beaucoup plus grande

$$w_j = \frac{k_a(\mathbf{x}_j) f^{eq}(\mathbf{x}_j) e^{-\int_0^{\lambda_j-1} d\sigma_j \hat{k}_\sigma}}{\rho_\Lambda(\lambda_{j-1}) P_j} \prod_{m=1}^{j-1} \left[ \frac{k_n(\mathbf{x}_m) e^{-\int_0^{\lambda_{m-1}} d\sigma \hat{k}_\sigma}}{\rho_\Lambda(\lambda_{m-1})(1 - P_m)} \right]$$

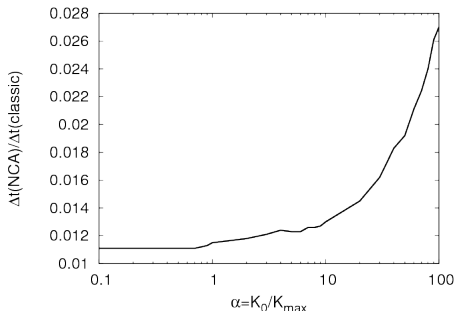
- On a montré que l'introduction de  $k_n$  intervient pour :
    - permettre d'échantillonner les libres parcours en milieux hétérogènes
    - corriger l'alternance de signe présente dans l'équation naturelle de Fredholm tirée de l'ETR sous forme différentielle.
  - A partir de ce constat, on peut donc inscrire les ACN historiques dans une famille bien plus large, dans laquelle il est désormais possible de jouer sur :
    - les pdfs
    - les probabilités (type de collision)
    - les poids
  - En outre, chacune de ces modifications peut être faite indépendamment des autres
- ⇒ Atout certain pour les approches d'échantillonnage par importance (ex : approches de variance nulle).

## Conclusion

- Les ACN peuvent être vus comme une simple **technique d'échantillonnage des libres parcours**.
- Ils permettent de traiter des **cas hétérogènes sans user de maillage** ou de lourdes techniques numériques.
- On conserve le caractère de **calcul de référence** des Méthodes de Monte-Carlo.
- Quelques **manipulations de formulation intégrale** nous permettent de nous affranchir de contraintes souvent critiquées par les utilisateurs des ACN.
- D'autres travaux d'intégrales font rentrer **les ACN dans une famille de MMC beaucoup plus grande** pour lesquelles il est possible de jouer sur tous les paramètres (pdf, probabilités, poids...).
- Les **approches de variance nulle et les études de sensibilités paramétriques** peuvent ainsi être menées avec succès par les ACN.

## Quelques ordres de grandeur

- Calcul sonde dans une configuration 3D parallélépipédique, où les champs hétérogènes de  $k_a$ ,  $k_s$  et  $T$  sont donnés dans le milieu via 8 positions de référence puis interpolés. Les parois sont elles aussi décrites par des champs de température et de réflectivité non-uniformes.



**FIGURE :** Evolution du ratio temps de calcul ACN / temps de calcul algorithme classique en fonction de alpha, le rapport entre  $k_0$  (champ d'extinction modifié uniforme) et la valeur max de du champ d'extinction réel dans le volume.

## Quelques ordres de grandeur

- Calcul sonde dans une configuration 3D parallélépipédique, où les champs hétérogènes de  $k_a$ ,  $k_s$  et  $T$  sont donnés dans le milieu via 8 positions de référence puis interpolés. Les parois sont elles aussi décrites par des champs de température et de réflectivité non-uniformes.

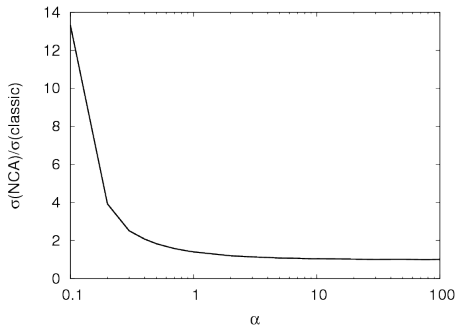


FIGURE : Rapport des écart-types ACN/ algorithme classique, en fonction du même alpha.