

Température d'un solide soumis à des sources de chaleur surfaciques mobiles non uniformes

Mohamed HAMRAOUI^{1*}, Najib LARAQI², Jean-Gabriel BAUZIN², Abderrahmane BAÏRI², Nacim ALILAT², Abderrahmane BOUCHEFFA^{2,3}, Talaat OSMAN^{2,3}

¹Université Hassan II, EST Casablanca, Km7, Route El-Jadida, BP. 8012, Casablanca, Maroc

²Université Paris Ouest, LTIE, EA 4415, GTE, 50, Rue de Sèvres, F-92410 Ville d'Avray

³Université Paris Sud, IUT Orsay, Département MP, Plateau du Moulon, F-91400 Orsay

*(auteur correspondant: hamraoui@hotmail.com)

Résumé - On propose dans cet article une étude analytique de la distribution de température dans un solide soumis à des sources de chaleur mobiles. La puissance dissipée par les sources de chaleur est considérée non uniforme. L'étude est effectuée en régime établi. Le modèle développé est tridimensionnel. Il est valable quelle que soit la vitesse relative de la source. Nous avons considéré trois cas de distributions semi-elliptiques de puissance avec : (i) le maximum au centre de la source, (ii) le maximum à l'entrée de la source, (iii) le maximum à la sortie de la source. Ces configurations permettent de simuler des imperfections de conformité de contact du fait de l'usure et/ou de la non uniformité de la pression. On compare les évolutions des températures entre ces différents cas de figures pour différentes vitesses relatives en considérant une puissance dissipée totale identique. Le cas de référence est celui d'une source uniforme dissipant la même puissance.

Mots Clés : Interfaces solides, Sources de chaleur mobiles non uniformes, Calculs analytiques

Nomenclature

a	demi-largeur de la source, m	q	densité de flux, $W.m^{-2}$
A	demi-largeur du solide, m	T	température, K
b	demi-longueur de la source, m	T^+	température réduite, $=T / (qA / \lambda)$
B	demi-longueur du solide, m	V	vitesse, $m.s^{-1}$
e	épaisseur du solide, m	x, y, z	coordonnées cartésiennes, m
H	fonction de Struve	Symboles grecs	
J	fonction de Bessel	α	diffusivité thermique, $m^2.s^{-1}$
Pe	nombre de Peclet, $=VA / \alpha$	λ	conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$

1. Introduction

Les dispositifs mécaniques soumis au frottement tels que: les disques de frein, les roulements et butées à billes ou à rouleaux, les paliers lisses, etc ... sont amenés à évacuer des quantités de chaleur dont la puissance surfacique moyenne peut culminer à quelques MW/m². Souvent, les modèles proposés dans la littérature considèrent que la puissance est dissipée de façon uniforme sur toute l'étendue de la surface de contact. Dans la pratique, la dissipation de puissance peut être extrêmement non uniforme du fait: (i) de la non conformité des contacts, (ii) de l'usure, (iii) du défaut de guidage, etc. Il s'ensuit une apparition de points chauds dont la conséquence peut être dommageable pour la tenue mécanique des matériaux.

On propose dans cet article une étude analytique de la distribution de température dans un solide soumis à une source de chaleur mobile. La puissance dissipée par la source de chaleur est considérée non uniforme. L'étude est effectuée en régime stationnaire. Le modèle développé est tridimensionnel. Il est valable quelle que soit la vitesse relative de la source.

La théorie des sources mobiles a longuement été utilisée par plusieurs auteurs pour simuler des situation de frottement. Il serait utopique de vouloir citer les très nombreuses références disponibles dans la littérature sur ce sujet. Nous donnons ici quelques références: [1-7] pour les géométries cartésiennes et [8-12] pour les géométries cylindriques. Depuis les années 80 de nombreux développements concernant les sources mobiles ont été proposés dans la littérature. L'avènement des calculateurs de plus en plus performants a facilité le traitement des problèmes bidimensionnel et tridimensionnel.

L'une des difficultés rencontrées dans l'application des sources mobiles et la mauvaise connaissance de la distribution spatiale de la puissance dissipée par ces sources. Les répartitions de la température et des gradients thermiques dépendent justement de la distribution spatiale des sources de chaleur. Le but de cet article est de proposer un outil de calcul analytique pour permettre l'étude de l'influence de la répartition de puissance sur le comportement thermique des solides.

2. Modèle mathématique

2.1. Equations physiques

On considère un milieu d'épaisseur e et de dimensions $2A$ et $2B$ respectivement suivant les directions x et y (Fig. 1). On néglige les déperditions thermiques latérales (surface et diffusion latérales généralement faibles devant celles de la direction axiale) si bien que les plans $y = \pm B$ sont supposés adiabatiques. On considère une condition de périodicité entre les plans $x = -A$ et $x = A$. La surface $z = 0$ avec $|x| \leq a$ et $|y| \leq b$ est soumise à une source de chaleur de densité $q(x, y)$. Le reste de cette surface est adiabatique. La température à l'abscisse $z = e$ est nulle, $T(x, y, z = e) = 0$. Le solide est mobile par rapport la source à la vitesse constante V dans la direction x . On note λ , sa conductivité et α , sa diffusivité.

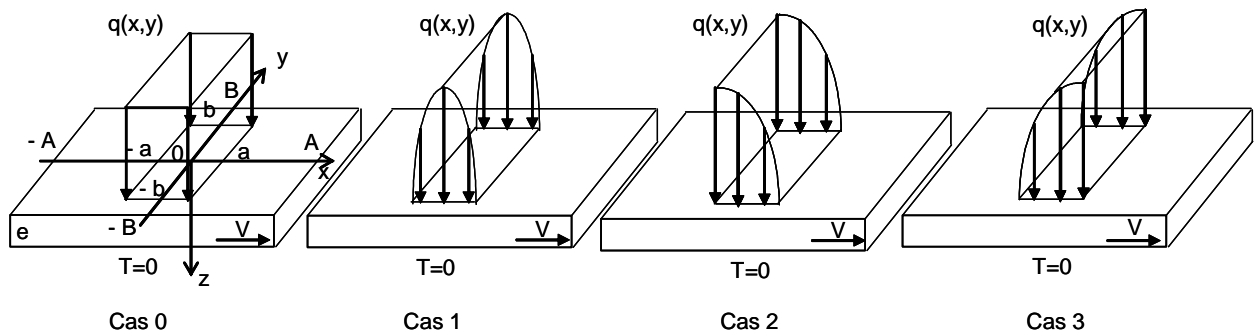


Figure 1: Configurations étudiées

Dans le repère lié à la source, la température du milieu en régime établi, $T(x, y, z)$, est régie par les équations suivantes :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{V}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$(T)_{(-A, y, z)} = (T)_{(A, y, z)}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{(-A, y, z)} = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{(A, y, z)} \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{(x,-B,z)} = 0, \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{(x,B,z)} = 0 \quad (3)$$

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)_{(x,y,0)} = \begin{cases} q(x,y) : \text{pour } |x| \leq a, |y| \leq b \\ 0 : \text{ailleurs} \end{cases}, T(x,y,e) = 0 \quad (4)$$

2.2. Solution analytique générale

Compte tenu des conditions de périodicité suivant la direction x , données par l'équation (2), il convient d'appliquer aux équations (1-4) la transformée intégrale de Fourier complexe finie suivante :

$$T^* = \frac{1}{2A} \int_{-A}^A T \exp(-jm\pi x / A) dx \quad (5)$$

Où j est le nombre imaginaire pur ($j^2 = -1$). Les conditions d'adiabacité suivant la direction y permettent d'utiliser la transformée intégrale de Fourier cosinus finie telle que:

$$T^{**} = \frac{1}{2B} \int_{-B}^B T^* \cos(n\pi y / B) dy \quad (6)$$

L'application des transformées intégrales (5) et (6) aux équations (1-4) conduit à une équation différentielle du second ordre telle que :

$$\frac{d^2 T^{**}}{dz^2} - \sigma_{mn}^2 T^{**} = 0 \quad (7)$$

$$\sigma_{mn} = \sqrt{(m\pi / A)^2 + (n\pi / B)^2 + jm\pi V / \alpha A}$$

$$-\lambda \left(\frac{dT^{**}}{dz}\right)_{(z=0)} = q^{**}, T^{**}(z=e) = 0 \quad (8)$$

La solution de l'équation (7) nécessite de distinguer les 2 cas essentiels suivants:

- $m=0$ et $n=0$, pour lequel $\sigma_{00} = 0$. On a alors:

$$T_{00}^{**} = A_{00} z + B_{00} \quad (9)$$

Etant donné les conditions aux limites (8), on déduit:

$$T_{00}^{**} = -\frac{q_{00}^{**}}{\lambda} (z - e); \quad q_{00}^{**} = \frac{1}{4AB} \int_{-b}^b \int_{-a}^a q(x,y) dx dy \quad (9a)$$

q_{00}^{**} est la densité du flux moyenné sur la surface totale du solide ($2A \times 2B$).

- $m \neq 0$ et/ou $n \neq 0$, pour lequel $\sigma_{mn} \neq 0$. On a alors:

$$T_{mn}^{**} = A_{mn} ch(\sigma_{mn} z) + B_{mn} sh(\sigma_{mn} z) \quad (10)$$

Les constantes A_{mn} et B_{mn} sont déterminées par les conditions aux limites (8). Il vient:

$$T_{mn}^{**} = \frac{q_{mn}^{**} sh[\sigma_{mn}(e-z)]}{\lambda \sigma_{mn} ch(\sigma_{mn} e)}; \quad q_{mn}^{**} = \frac{1}{4AB} \int_{-b}^b \int_{-a}^a q(x, y) e^{-jm\pi x/A} \cos \frac{n\pi y}{B} dx dy \quad (10a)$$

L'expression de q_{mn}^{**} dépend de la distribution de flux de la source de chaleur, $q(x, y)$. Nous donnons dans la suite la solution complète pour les distributions de flux considérées.

On peut décomposer la solution de l'équation (7) en quatre termes tels que :

$$T^{**} = T_{00}^{**} + T_{m0}^{**} + T_{0n}^{**} + T_{mn}^{**} \quad (11)$$

Lorsque les expressions de ces quatre termes sont établies, on retourne à la température réelle, $T(x, y, z)$, en utilisant les transformées intégrales inverses telles que :

$$T^* = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n T^{**} \cos(n\pi y / B) \quad (12)$$

avec $\varepsilon_n = 1$ (pour $n = 0$) et $\varepsilon_n = 2$ (pour $n \neq 0$)

$$T = \Re_e \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m T^* \exp(jm\pi x / A) \right\} \quad (13)$$

avec $\varepsilon_m = 1$ (pour $m = 0$) et $\varepsilon_m = 2$ (pour $m \neq 0$)

Il vient:

$$T(x, y, z) = \frac{q_{00}^{**}(e-z)}{\lambda} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \Re_e \left\{ \frac{q_{m0}^{**} sh[\sigma_{m0}(e-z)] e^{jm\pi x/A}}{\lambda \sigma_{m0} ch(\sigma_{m0} e)} \right\} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q_{0n}^{**} sh[\sigma_{0n}(e-z)]}{\lambda \sigma_{0n} ch(\sigma_{0n} e)} \cos(n\pi y / B) + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \cos(n\pi y / B) \sum_{m=1}^{\infty} \Re_e \left\{ \frac{q_{mn}^{**} sh[\sigma_{mn}(e-z)] e^{jm\pi x/A}}{\lambda \sigma_{mn} ch(\sigma_{mn} e)} \right\} \quad (14)$$

La notation $\Re_e \{ \dots \}$ désigne la partie réelle.

3. Solutions complètes pour différentes distributions de flux

Nous considérons trois cas de distributions de flux $q(x, y)$ non uniformes, sachant que le cas (Cas 0) est celui du flux uniforme $q(x, y) = q_0$ (Fig. 2).

$$\text{Cas 0:} \quad q(x, y) = q_0 \quad (15.0)$$

$$\text{Cas 1:} \quad q(x, y) = q_1 \sqrt{1 - (x/a)^2} \quad (15.1)$$

$$\text{Cas 2:} \quad q(x, y) = q_2 \sqrt{1 - [(x+a)/2a]^2} \quad (15.2)$$

$$\text{Cas 3:} \quad q(x, y) = q_3 \sqrt{1 - [(x-a)/2a]^2} \quad (15.3)$$

Avec q_0, q_1, q_2, q_3 des constantes.

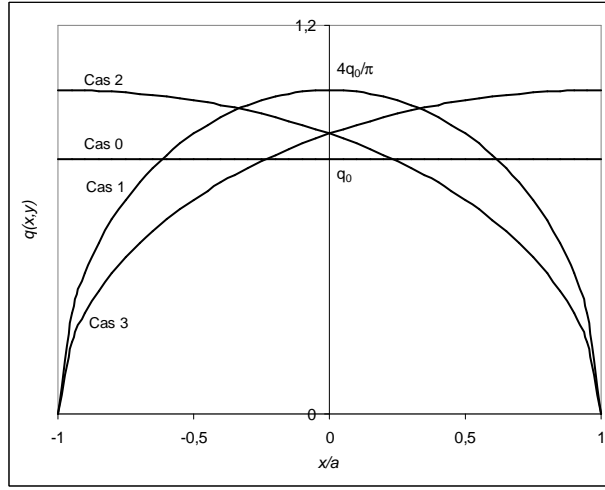


Figure 2: Allures des sources de chaleur surfaciques

L'application des transformées intégrales (5) et (6) à la condition aux limites (4) conduit aux expressions de q^{**} pour les 4 cas étudiés sous la forme:

$$\text{Cas 0} \quad q_{00}^{**} = \frac{q_0 ab}{AB}, \quad q_{mn}^{**} = \frac{q_0 \sin(m\pi a / A) \sin(n\pi b / B)}{(m\pi)(n\pi)} \quad (15.0a)$$

$$q_{m0}^{**} = \frac{q_0 \sin(m\pi a / A)(b / B)}{m\pi}, \quad q_{0n}^{**} = \frac{q_0(a / A) \sin(n\pi b / B)}{n\pi}$$

$$\text{Cas 1:} \quad q_{00}^{**} = \frac{q_1 \pi ab}{4AB}, \quad q_{mn}^{**} = \frac{q_1 J_1(m\pi a / A) \sin(n\pi b / B)}{2m(n\pi)} \quad (15.1a)$$

$$q_{m0}^{**} = \frac{q_1 J_1(m\pi a / A)(b / B)}{2m}, \quad q_{0n}^{**} = \frac{q_1(a / A) \sin(n\pi b / B)}{4n}$$

$$\text{Cas 2:} \quad q_{00}^{**} = \frac{q_2 \pi ab}{4AB}, \quad q_{mn}^{**} = q_2 \frac{J_1(2m\pi a / A) - jH_1(2m\pi a / A)}{4m(n\pi)} e^{jm\pi a / A} \sin(n\pi b / B) \quad (15.2a)$$

$$q_{m0}^{**} = \frac{q_2 b}{B} \frac{J_1(2m\pi a / A) - jH_1(2m\pi a / A)}{4m} e^{jm\pi a / A}, \quad q_{0n}^{**} = q_2 \frac{(a / A) \sin(n\pi b / B)}{4n}$$

$$\text{Cas 3:} \quad q_{00}^{**} = \frac{q_3 \pi ab}{4AB}, \quad q_{mn}^{**} = q_3 \frac{J_1(2m\pi a / A) + jH_1(2m\pi a / A)}{4m(n\pi)} e^{-jm\pi a / A} \sin(n\pi b / B) \quad (15.3a)$$

$$q_{m0}^{**} = \frac{q_3 b}{B} \frac{J_1(2m\pi a / A) + jH_1(2m\pi a / A)}{4m} e^{-jm\pi a / A}, \quad q_{0n}^{**} = q_3 \frac{(a / A) \sin(n\pi b / B)}{4n}$$

où J_1 est la fonction de Bessel de première espère d'ordre 1 et H_1 la fonction de Struve d'ordre 1.

4. Résultats et discussions

Nous étudions l'influence de la distribution spatiale de la puissance dissipée par la source sur la température surfacique pour différentes valeurs de Peclet: $Pe = VA/\alpha = 0; 20; 200$. La puissance totale est la même pour chaque distribution, ce qui impose: $q_1 = q_2 = q_3 = 4q_0/\pi$. La température est donnée sous forme adimensionnelle: $T^+ = T/(q_0A/\lambda)$. Nous avons fixé arbitrairement: $B = A$; $b = a$; $e = 0,5A$; $a/A = 0,1$ (soit $ab/AB = 1/100$). Le nombre de termes nécessaires pour assurer la convergence des séries est dans ce cas de figure de 150. Il convient de souligner que ce nombre décroît avec l'augmentation du rapport ab/AB .

La figure 3 présente les évolutions de la température surfacique de chaque cas étudié et pour les 3 valeurs du nombre de Peclet. La zone de chauffe est comprise entre $-0,1$ et $0,1$, et les tracés sont limités à la région comprise entre $-0,15$ et $0,15$. On peut noter deux tendances communes à tous les cas examinés ici: (i) le maximum de la température surfacique se déplace vers la sortie de la source à mesure que la valeur du nombre de Peclet augmente, (ii) l'amplitude du saut de température dans la zone soumise à la source de chaleur décroît avec l'augmentation de la valeur du nombre de Peclet.

Les températures surfaciques maximales sont regroupées dans le Tableau 1. La température surfacique la plus élevée à $Pe=0$ est obtenue pour la source semi-elliptique centrée (cas 1). On observera que pour $Pe=0$ les cas excentrés à gauche et à droite donnent en toute logique la même température. Lorsque la valeur de Pe augmente, c'est le cas de la source excentrée vers la sortie (Cas 3) qui a systématiquement la température surfacique la plus élevée. Ce résultat signifie que dans le cas des applications concrètes telles que les plaquettes de frein par exemple, les températures seront d'autant plus élevées que les plaquettes porteront davantage au niveau de la sortie du contact. Ici la différence de températures n'est pas significative car le profil semi-elliptique est relativement plat, mais dans le cas de profils pointus ces différences seront nettement plus marquées.

Pe	T ⁺ max			
	Cas 0	Cas 1	Cas 2	Cas 3
0	0,10345	0,11474	0,11129	0,11129
20	0,08331	0,09061	0,08522	0,09188
200	0,04522	0,04563	0,04308	0,04903

Tableau 1: Comparaison des températures surfaciques maximales

5. Conclusion

Les solutions analytiques présentées dans cet article permettent d'étudier l'influence de la non uniformité de la distribution de puissance sur le comportement thermique des solides soumis à des sources de chaleur mobiles (frottement, soudage, laser ...). Elles sont explicites et faciles à utiliser, puisque les fonctions auxquelles elles font appel sont disponibles dans différents logiciels tels que Maple, Mathematica, etc.

La méthode de développement analytique permet d'envisager d'autres configurations de distribution de puissances que celles considérées dans le présent article.

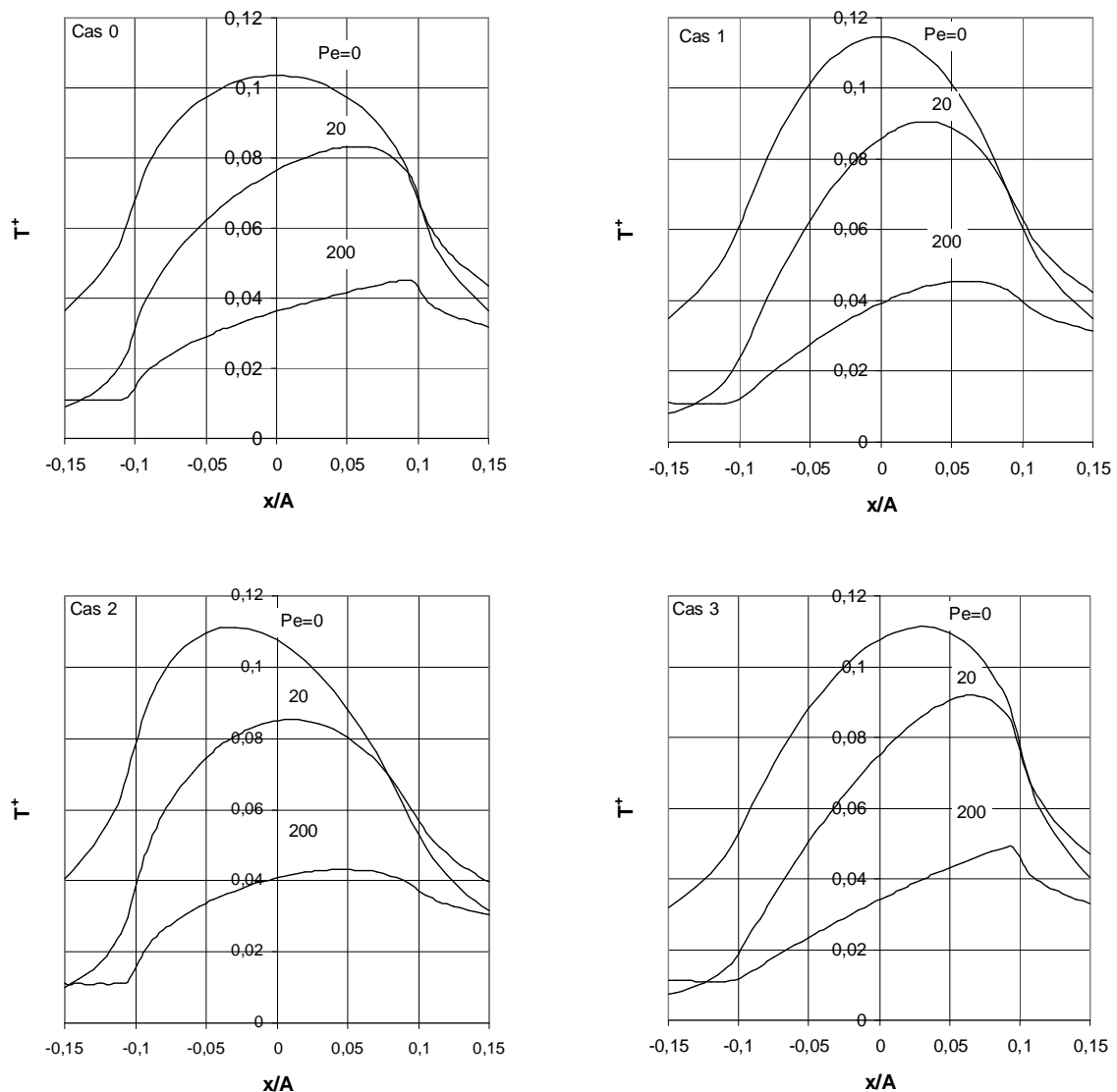


Figure 3: Températures surfaciques réduites T^+ pour les 4 cas étudiés et pour différentes valeurs de $Pe=0; 20; 200$

References

- [1] J.C. Jaeger, Moving sources of heat and the temperature at sliding contacts, *Proc. Royal Soc. NSW*, 76 (1942) 203–224.
- [2] H. Blok, Les températures de surface dans des conditions de graissage sous extrême pression, *Proc. Sd. World Petrol. Cong.*, 3 (1937) 1471-1486.
- [3] N. Laraqi, Velocity and relative contact size effect on the thermal constriction resistance in sliding solids, *ASME J. Heat Transfer*, 119 (1997) 173–177.
- [4] J.P. Bardon, Bases physiques des conditions de contact thermique imparfait entre milieux en glissement relatif, *Revue Générale de Thermique Fr.*, 386 (1994) 86–91.
- [5] N. Laraqi, N. Alilat, M. Garcia de Maria, A. Baïri, Temperature and division of heat in a pin-on-disc frictional device - Exact analytical solution, *Wear*, 266 (7-8) (2009) 765-770.

- [6] D. Couédel, P. Rogeon, P. Lemasson, M. Carin, J.C. Parpillon, R. Berthet, 2D-heat transfer modelling within limited regions using moving sources: application to electron beam welding, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 46 (23) (2003) 4553-4559.
- [7] N. Laraqi, A. Baïri, L. Segui, Temperature and thermal resistance in frictional devices, *Applied Thermal Engineering*, 24 (17) (2004) 2567-2581.
- [8] T. Osman, S. Guenoun, A. Boucheffa, Temperature field in a rotating roller subjected to interface heating, *EPJ Applied Physics*, 50 (2) (2010) 205041-205044.
- [9] M. Hamraoui, Thermal behaviour of rollers during the rolling process, *Applied Thermal Engineering*, 29 (2009) 2386–2390.
- [10] N.R. DesRuisseaux, R.D. Zerkle, Temperature in semi-infinite and cylindrical bodies subject to moving heat sources and surface cooling, *ASME J. Heat Transfer* (1970) 456–464.
- [11] M. El-Shebirny, T.P. Newcomb, The Temperature Distribution Due To Frictional Heat Generated Between a Stationary Cylinder and a Cotating Cylinder, *Wear*, 42 (1977) 23-34.
- [12] M. Hamraoui , T. Osman, A. Boucheffa, M.M. Rashidi, Analytical modelling of the three-dimensional steady-state temperature in a bearing ring, *Mecanique & Industrie*, 12 (2011) 1-4.