

# Effet de la dissipation visqueuse sur les caractéristiques thermiques de l'écoulement d'un fluide de Casson au sein d'une conduite cylindrique

Welid BERABOU, Youb Khaled BENKAHLA\*, Nabila LABSI, Abdelkader BOUTRA

Laboratoire des phénomènes de transfert,  
Faculté de Génie Mécanique et de Génie des Procédés,  
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene USTHB,  
B.P. 32, El-Alia Bab-Ezzouar, 16111 Alger, Algérie.

\*(auteur correspondant : youbenkahla@yahoo.fr)

**Résumé** - L'étude présentée, porte sur l'analyse numérique des caractéristiques thermiques de l'écoulement stationnaire en mode de convection forcée, d'un fluide viscoplastique incompressible de Casson, dans une conduite cylindrique, maintenue à température uniforme. Elle est réalisée en utilisant un code de calcul, basé sur la méthode des volumes finis. Les résultats montrent l'influence exercée par les nombres de Reynolds et de Casson sur la distribution spatiale du champ thermique en présence et en l'absence de la fonction de dissipation. En présence de cette dernière, les températures moyennes réduites augmentent de manière monotone et dépassent l'unité (en valeur absolue).

## Nomenclature

$C_p$	Chaleur spécifique, $J kg^{-1} K^{-1}$
$D$	Diamètre de la conduite, $m$
$k$	Conductivité thermique, $W m^{-1} K^{-1}$
$L$	Longueur de la conduite, $m$
$M$	Paramètre dans l'équation (7)
$p^*$	Pression motrice du fluide, $Pa$
$P^*$	Pression adimensionnelle, $[p^* / \rho U_0^2]$
$r$	Coordonnée radiale, $m$
$R$	Coordonnée radiale adimensionnelle
$T$	Température, $K$
$T_0$	Température d'entrée, $K$
$T_w$	Température à la paroi, $K$
$u$	Vitesse axiale du fluide, $m s^{-1}$
$U$	Vitesse axiale adimensionnelle, $[u / U_0]$
$U_0$	Vitesse débitante, $m s^{-1}$
$v$	Vitesse radiale du fluide, $m s^{-1}$
$V$	Vitesse radiale adimensionnelle, $[v / U_0]$
$x$	Coordonnée axiale, $m$

$X$  Coordonnée axiale adimensionnelle

## Symboles grecs

$\mu_{eff}$	Viscosité effective, $kg m^{-1} s^{-1}$
$\mu_{app}$	Viscosité apparente adimensionnelle, $\mu_{app} = \mu_{eff} / \mu_p$
$\mu_p$	Viscosité plastique du fluide, $kg m^{-1} s^{-1}$
$\rho$	Masse volumique du fluide, $kg m^{-3}$
$\tau$	Contrainte de cisaillement, $Pa$
$\tau_0$	Contrainte seuil de cisaillement, $Pa$
$\theta_m$	Température moyenne adimensionnelle, $= (T_m - T_w) / (T_0 - T_w)$

## Nombres adimensionnels

$Ca$	Nombre de Casson, $[\tau_0 D / \mu_p U_0]$
$Br$	Nombre de Brinkman, $[\mu_p U_0^2 / k (T_0 - T_w)]$
$Pr$	Nombre de Prandtl, $[\mu_p C_p / k]$
$Re$	Nombre de Reynolds, $[\rho U_0 D / \mu_p]$

## 1. Introduction

Le transfert thermique lors de l'écoulement laminaire des fluides viscoplastiques dans les conduites cylindriques à section droite circulaire est d'un grand intérêt pratique, puisque ces fluides se retrouvent dans diverses applications industrielles, comme celles concernant la synthèse de produits chimiques, de polymères, de cosmétiques et de produits agro-alimentaires. Ces fluides sont caractérisés par une contrainte seuil à partir de laquelle ils commencent à s'écouler.

Dans cette étude le fluide considéré obéit au modèle non linéaire de Casson où, le chocolat fondu, les gommes de l'Xanthan, le sang, les boues ainsi que les solutions de polymère, constituent des exemples.

Tenir compte, lors de la résolution de l'équation de l'énergie, de la dissipation visqueuse modifie la distribution de la température. Celle-ci génère une énergie au sein de la masse fluide, affectant ainsi le taux de transfert de chaleur. La littérature montre que la majorité des travaux entrepris dans le domaine négligent l'effet de dissipation visqueuse, alors que la nature visqueuse de ces fluides peut induire une importante génération interne de chaleur. Dumas *et al.* [1] ont étudié la convection thermique à l'entrée d'une conduite, pour du sang en écoulement stationnaire pour lequel, la loi rhéologique de comportement de Casson pouvait décrire son comportement non newtonien. La distribution du champ de vitesse a été faite par voie analytique, alors que le champ de température a été trouvé en résolvant l'équation de l'énergie numériquement par la méthode des différences finies et ce, pour deux conditionnements thermiques (température pariétale et densité de flux thermique pariétal uniformes). Par la suite, Blackwell [2] a étudié le développement du régime thermique en considérant une température pariétale uniforme et en négligeant l'effet de la dissipation visqueuse ainsi que la conduction axiale du fluide. Johnston [3] a reconsidéré le même problème en tenant compte, cette fois-ci de la conduction axiale. Basu *et al.* [4] ont étudié l'influence exercée par la prise en compte de la dissipation visqueuse sur le champ thermique et ont montré que son effet est très prononcé au niveau de la zone d'entrée, dans le cas d'un établissement hydrodynamique et thermique simultanés. Plus tard, Min *et al.* ont étudié analytiquement [5] et numériquement [6] le développement hydrodynamique mais également simultanés de l'écoulement laminaire d'un fluide de Bingham dans une conduite cylindrique de section droite circulaire. Ils ont trouvé que les caractéristiques du transfert thermique présentent les mêmes tendances que celles prédites à la suite de la résolution analytique du problème de Graetz. Vradsis *et al.* [7] ont traité le problème du développement simultanés des champs hydrodynamique et thermique dans la région d'entrée pour le même fluide. Les travaux récents de Khatyr *et al.* [8] ainsi que Nouar [9] ont reconsidéré ce problème, en portant une plus grande attention à l'analyse de l'effet de la fonction de dissipation sur le champ thermique.

La présente étude traite l'écoulement laminaire en mode de convection forcée d'un fluide de Casson incompressible, dans une conduite cylindrique, de section droite circulaire maintenue à une température pariétale uniforme. La méthode numérique utilisée est basée sur les volumes finis. Les propriétés physiques et rhéologiques du fluide sont supposées constantes et uniformes. Les effets des nombres de Reynolds et de Casson sur les caractéristiques thermiques de l'écoulement sont étudiés.

## 2. Formulation mathématique

### 2.1. Equations générales

L'écoulement stationnaire et laminaire d'un fluide de Casson incompressible à l'intérieur d'une conduite cylindrique de section droite circulaire est gouverné par l'ensemble des équations ci-dessous, écrites sous forme adimensionnelles :

#### 2.1.1. Equation de continuité

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RV)}{\partial R} + \frac{\partial(U)}{\partial X} = 0 \quad (1)$$

### 2.1.2. Equations de mouvement

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RVU)}{\partial R} + \frac{\partial(UV)}{\partial X} = -\frac{\partial P^*}{\partial R} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( \mu_{app} R \frac{\partial V}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left( \mu_{app} \frac{\partial V}{\partial X} Re \right) \right] \quad (2)$$

$$+ \frac{1}{Re} \left[ \frac{V}{R} \frac{\partial}{\partial R} (\mu_{app}) - \mu_{app} \frac{V}{R^2} + \frac{\partial}{\partial X} (\mu_{app}) \frac{\partial U}{\partial R} + R \frac{\partial}{\partial R} (\mu_{app}) \frac{\partial}{\partial R} \left( \frac{V}{R} \right) \right]$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RVU)}{\partial R} + \frac{\partial(UU)}{\partial X} = -\frac{\partial P^*}{\partial X} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( \mu_{app} R \frac{\partial U}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial X} \left( \mu_{app} \frac{\partial U}{\partial X} \right) \right] \quad (3)$$

$$+ \frac{1}{Re} \left[ \frac{\partial}{\partial R} (\mu_{app}) \frac{\partial V}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial X} (\mu_{app}) \frac{\partial U}{\partial X} \right]$$

### 2.1.3. Equation de l'énergie

$$\frac{1}{R} \frac{\partial(RV\theta)}{\partial R} + \frac{\partial(U\theta)}{\partial X} = \frac{1}{Pr Re} \left[ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left( R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} \right] + \frac{Br}{Pr Re} \mu_{app} \dot{\gamma}^2 \quad (4)$$

$$\dot{\gamma} = \left\{ 2 \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial R} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial X} \right)^2 + \left( \frac{V}{R} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial U}{\partial R} + \frac{\partial V}{\partial X} \right)^2 \right\}^{1/2} \quad (5)$$

### 2.1.4. Equation constitutive de Casson

Le modèle général du fluide de Casson est donné par la loi rhéologique suivante :

$$\begin{cases} \tau^{1/n} = \tau_0^{1/n} + (\mu_p \dot{\gamma})^{1/n} & \tau > \tau_0 \\ \dot{\gamma} = 0 & \tau \leq \tau_0 \end{cases} \quad (6)$$

La viscosité apparente de fluide de Casson, qui est le rapport entre la viscosité effective du fluide ( $\mu_{eff}$ ) et sa viscosité plastique ( $\mu_p$ ), peut être approchée par la relation de Papanastasiou définie de la manière suivante :

$$\mu_{app} = \left[ 1 + \left( \frac{Ca}{\dot{\gamma}} \right)^{1/n} \left[ 1 - \exp \left( - (M \dot{\gamma}^*)^{1/n} \right) \right] \right]^n \quad (7)$$

Où,  $M = m U_0/D$  est le paramètre de croissance adimensionnel ( $M \geq 100$ , d'après Zinani et al. [10]).

## 2.2. Conditions aux limites

Les conditions aux limites considérées pour l'analyse du développement hydrodynamique et thermique de l'écoulement sont : profils de vitesse et de température uniformes à l'entrée de la conduite ( $U = 1$ ,  $V = 0$  et  $\theta = 1$ ) et condition de non glissement pour le champ de vitesse et température pariétale uniforme tout le long de la conduite ( $U = V = \theta = 0$ ).

La méthode numérique utilisée pour résoudre les équations de conservation, citées précédemment en tenant compte de l'expression de la viscosité apparente (7), est celle des volumes finis proposée par Patankar [11]. Ces équations sont discrétisées et transformées en équations algébriques, résolues en utilisant un code de calcul basé sur l'algorithme SIMPLER. Le calcul a été effectué en utilisant un maillage non-uniforme avec un raffinement plus important au niveau de la zone d'entrée.

### 3. Résultats et discussion

Ce paragraphe est consacré à la validation de notre code de calcul mais également à l'étude de l'influence exercée par l'inertie (le nombre de Reynolds) et la contrainte seuil (le nombre de Casson) sur le champ de température ainsi que l'effet du nombre de Brinkman.

#### 3.1. Validation du code de calcul

Pour valider notre code de calcul, nous avons considéré le cas limite du fluide de Bingham ( $n = 1$ ). La figure 1, qui présente l'évolution axiale de la température moyenne pour différentes valeurs du nombre de Brinkman (et égales à 0 ; 0,1 ; 1 ; 2 ; et 10 pour  $Ca = 1,99$  et  $Pr = 1$ ), montre un bon accord entre nos résultats et ceux obtenus par Min et al. [6] étant donné que l'écart relatif entre les deux ne dépasse pas 4% dans tous les cas.

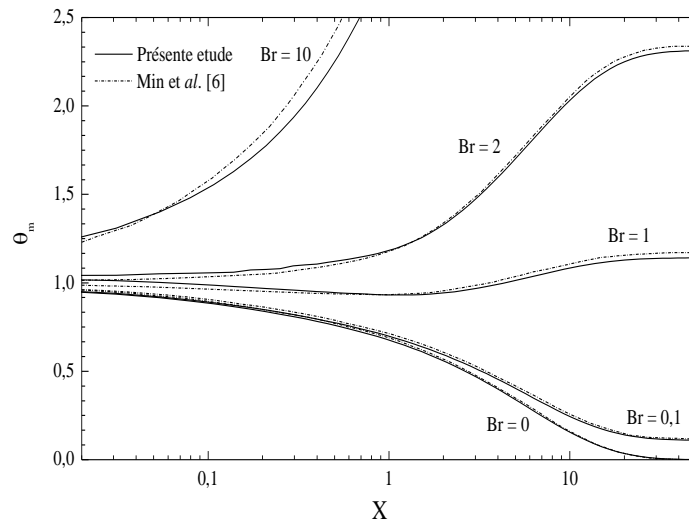


Figure 1 : Evolution axiale de la température moyenne pour différentes valeurs du nombre de Brinkman.  $n = 1$  ;  $Pr = 1$  ;  $Ca = 1,99$  et  $Re = 25$ .

#### 3.2. Influence de l'inertie (Re) sur le champ thermique

La figure 2 illustre l'évolution axiale de la température moyenne pour différentes valeurs du nombre de Reynolds, en tenant compte de la dissipation visqueuse.

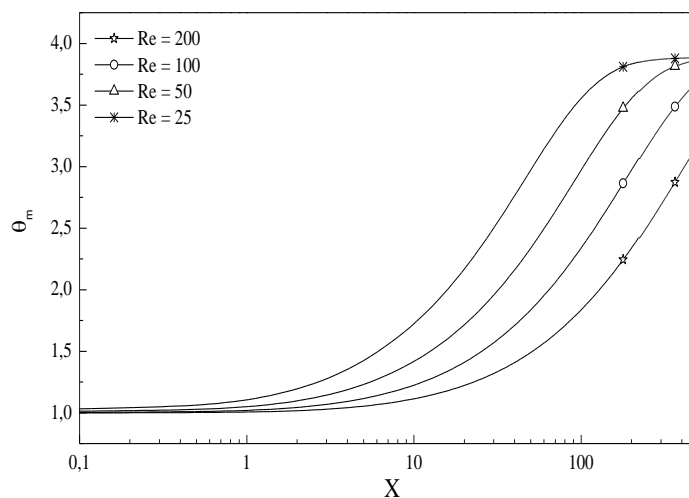


Figure 2 : Evolution axiale de la température moyenne pour différentes valeurs du nombre de Reynolds.  $n = 2$  ;  $Pr = 30$  ;  $Ca = 2$  et  $Br = 2$ .

On remarque que les températures moyennes réduites augmentent de manière monotone jusqu'à la sortie. Cet accroissement est d'autant plus important que le nombre de Reynolds est faible. Par conséquent, la longueur d'établissement du régime thermique augmente avec l'augmentation du nombre de Reynolds.

### 3.3. Influence de la contrainte seuil sur le champ thermique

La figure 3 présente l'évolution axiale de la température moyenne pour différentes valeurs du nombre de Casson.

On remarque que l'accroissement de la contrainte seuil, à travers l'augmentation du nombre de Casson, engendre une diminution de plus en plus importante de la température moyenne en comparaison avec le cas où, la dissipation visqueuse est négligeable (figure 4), où celle-ci est moins prononcée.

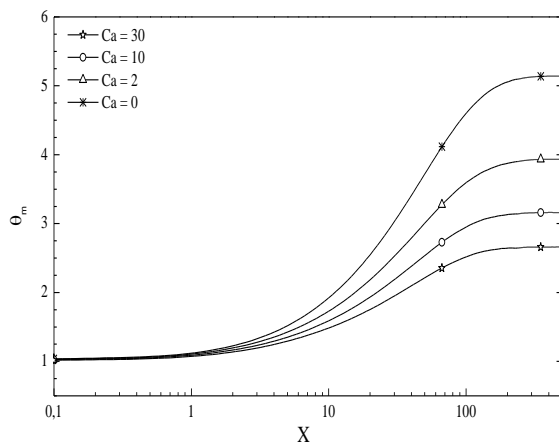


Figure 3 : Evolution axiale de la température moyenne pour différents Ca. Br = 2.

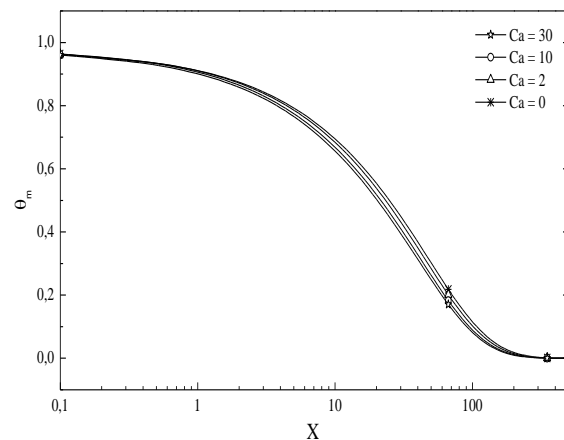


Figure 4 : Evolution axiale de la température moyenne pour différents Ca. Br = 0.

### 3.4. Effet de la dissipation visqueuse (nombre de Brinkman)

La figure 5 représente l'évolution axiale de la température moyenne pour différentes valeurs du nombre de Brinkman.

La dissipation visqueuse se comportant comme une source d'énergie, les températures moyennes réduites augmentent alors de manière monotone et dépassent l'unité (en valeur absolue tant que le nombre de Brinkman dépasse  $\pm 1$ ).

En effet, nous remarquons que la température moyenne du fluide devient négative loin de l'entrée de la conduite, s'expliquant par le fait que la température du fluide devient supérieure à celle de la paroi et le transfert thermique se fait, par conséquent, dans le sens opposé au premier. L'on assiste alors à un refroidissement du fluide.

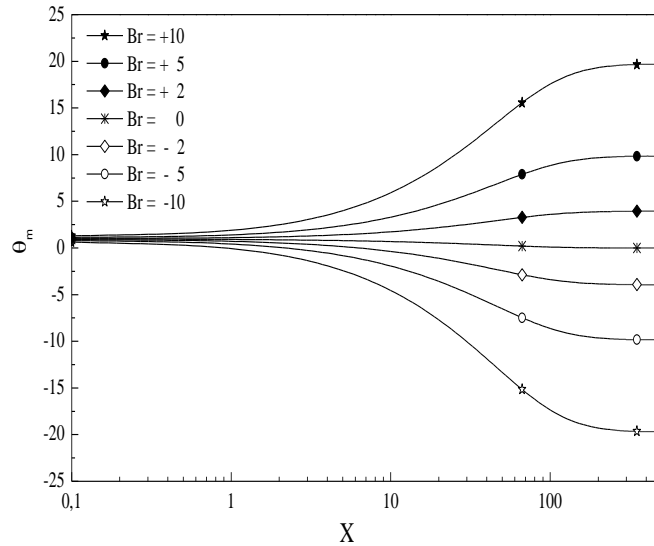


Figure 5 : Evolution axiale de la température moyenne pour différentes valeurs du nombre de Brinkman.  $n = 2$  ;  $Pr = 30$  ;  $Ca = 2$  et  $Re = 25$ .

#### 4. Conclusion

Une étude numérique, basée sur la méthode des volumes finis, a été entreprise dans le présent travail. Elle consiste en l'écoulement laminaire et stationnaire, en mode de convection forcée, d'un fluide non newtonien incompressible, obéissant au modèle rhéologique de Casson, dans une conduite circulaire maintenue à une température pariétale uniforme. L'équation constitutive, proposée par Papanastasiou, est adoptée afin d'éviter les instabilités numériques dans la région correspondant aux faibles taux de cisaillement.

Cette étude a permis d'analyser l'influence exercée par les nombres de Reynolds et de Casson sur la distribution axiale de la température moyenne adimensionnelle, en présence et en l'absence de la fonction de dissipation. En présence de cette dernière, les températures moyennes réduites augmentent avec l'augmentation de nombre de Brinkman de manière monotone et dépassent l'unité en valeur absolue. Cet accroissement est d'autant plus important que le nombre de Reynolds est faible. D'autre part, l'effet de nombre de Casson est également analysé pour les cas où la dissipation visqueuse est prise en compte ou pas.

#### Références

- [1] A. Dumas and G. S. Barozzi, Laminar heat transfer to blood flowing In a circular duct, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 27-3 (1984), 391-398.
- [2] B. F. Blackwell, Numerical solution of the Graetz problem for a Bingham plastic in laminar tube flow with constant wall temperature, *ASME J. Heat transfer*, 107 (1985), 466-468.
- [3] P. R. Johnston, Axial conduction and the Graetz problem for a Bingham plastic in laminar tube flow, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 34 (1991), 1209-1217.
- [4] T. Basu and D. N. Roy, Laminar heat transfer in a tube with viscous dissipation, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 28-3 (1985). 699-701.
- [5] T. Min, J. Y. Yoo, H. Choi, Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in circular pipe –I. Analytical approach- thermally fully developed flow and thermally developing flow, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 40-13 (1997), 3025-3037.
- [6] T. Min, J. Y. Yoo, H. Choi, Laminar convective heat transfer of a Bingham plastic in circular pipe –II. Numerical approach- Hydrodynamically developing flow and simultaneously developing flow, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 40-15 (1997), 3689-3701.

- [7] G. C. Vradis, J. Dougher, S. Kumar, Entrance pipe flow and heat transfer for a Bingham plastic, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 36-3 (1993), 543–552.
- [8] R. Khatyr, D. Ouldhadda., A. Il Idrissi, Viscous dissipation effects on the asymptotic behaviour of laminar forced convection for Bingham plastics in circular ducts, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 46 (2003), 589-598.
- [9] C. Nouar, Thermal convection for a thermo-dependent yield stress fluid in an axisymmetric horizontal duct, *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 48 (2005), 5520-5535.
- [10] F. S. F. Zinani, S. Frey, Galerkin Least-Squares Approximations for flows of Casson fluids through an expansion, *Ther. Eng.*, 5-2 (2006), 82-91.
- [11] S. V. Patankar, *Numerical heat transfer and fluid flow*, Ed. McGraw, New York (1980).