

Apparition de la convection dans une couche d'un fluide non newtonien soumise à des conditions hydrodynamiques diverses

Nabil BEN KHELIFA¹, Zineddine ALLOUI², Haykel BEN AHMED¹, Hassen BEJI¹ et Patrick VASSEUR^{1,2}

¹Laboratoire des Technologies Innovantes, Université de Picardie Jules Vernes, Amiens, France

²Ecole Polytechnique, Université de Montréal, C.P. 6079, Montréal, Québec, H3C 3A7, Canada

* (auteur correspondant : nabil_k21@yahoo.fr)

Résumé - Cet article rapporte une étude numérique et analytique de la convection naturelle au sein d'une cavité horizontale remplie par un fluide non newtonien. Les parois horizontales sont soumises à un flux de chaleur uniforme et celles verticales sont adiabatiques. Trois conditions hydrodynamiques sur les frontières horizontales (rigide-rigide (RR), libre-libre (FF) et rigide-libre (RF)) sont considérées. Un modèle rhéologique de type loi de puissance est utilisé pour modéliser le comportement non newtonien du fluide. Pour mener à bien cette étude un code de calcul numérique, basé sur la méthode des différences finies, a été adopté et un modèle analytique de type écoulement parallèle valable pour les couches minces ($A \gg 1$) a été développé.

Nomenclature

A	Rapport de forme de la cavité	R_C^{sup}	Rayleigh supercritique
C	Gradient de température - direction x	T	Température adimensionnelle
g	Accélération de la pesanteur, m ² /s	u	Composante x de vitesse
\hat{k}	Indice de consistance, Pa.s ⁿ	v	Composante y de vitesse
n	Indice de loi de puissance	α	Diffusivité thermique du fluide, m ² /s
Nu	Nombre de Nusselt	β'_T	Coefficient d'expansion thermique, K ⁻¹
q'	Flux de chaleur, W/m ²	Ψ	Fonction de courant adimensionnelle
Ra	Nombre de Rayleigh	ρ	Densité du fluide, kg/m ³
Pr	Nombre de Prandtl	μ'_a	Viscosité apparente du fluide, Pa.s
R_C^{sub}	Rayleigh sous critique		

1. Introduction

La convection naturelle dans les fluides confinés a fait l'objet dans le passé de nombreuses investigations à cause de son implication dans différentes applications industrielles telles que par exemple les forages pétroliers, la conception des réacteurs chimiques, l'ingénierie des polymères, les systèmes géophysiques, certains procédés de séparation, etc. Si les mécanismes de la convection naturelle semblent relativement bien étudiés dans le cas des fluides newtoniens, relativement peu de travaux ont portés sur la convection naturelle de fluides à comportement rhéologique non newtonien.

Ozoe et Churchill [1] ont été les premiers à s'intéresser à la convection naturelle de fluides non newtoniens confinés dans une enceinte différentiellement chauffée. Le transfert de chaleur thermoconvectif a été étudié pour des fluides de type Ostwald-de-Waele et Ellis. Plus récemment, Kim et al. [2] ont étudié numériquement la convection naturelle dans une cavité remplie par un fluide de type loi de puissance et soumise à des températures constantes sur les côtés. Une analyse d'échelle a été menée pour délimiter les caractéristiques de la loi de puissance et un bon accord qualitatif a été trouvé avec leurs résultats numériques. Le cas d'une cavité rectangulaire horizontale mince, remplie par un fluide non newtonien, a été considéré récemment par Lamsaadi et al. [3]. Une solution analytique, basée sur l'approximation de l'écoulement parallèle telle que décrite dans le passé par de nombreux auteurs (voir par

exemple Bian et al. [4]), a été développée par ces auteurs. Il a été montré que la dynamique de l'écoulement et le transfert de chaleur résultant sont sensibles au comportement non newtonien du fluide. Ces auteurs ont rapporté aussi que le nombre de Rayleigh critique pour un fluide dilatant ($n > 1$) se produit à une valeur finie donnée ($Ra_C^{\text{sup}} > 0$), qui dépend de n . Cependant, comme démontré récemment par Barletta et Nield [5], sur la base de la théorie de la stabilité linéaire, le nombre de Rayleigh critique pour de tels fluides est nul ($Ra_C^{\text{sup}} = 0$). Cela s'explique par le fait que la loi de puissance implique une viscosité extrêmement petite pour les faibles valeurs du taux de cisaillement.

L'objectif de ce travail consiste à étudier analytiquement et numériquement le transfert de chaleur thermoconvectif dans une cavité horizontale, de rapport de forme A , remplie par un fluide non newtonien. Les parois horizontales de la cavité sont soumises à un flux de chaleur uniforme et celles verticales sont adiabatiques. Trois conditions aux frontières hydrodynamiques (rigide-rigide, libre-libre et rigide-libre) sont appliquées sur les frontières horizontales du système. Un modèle de type loi de puissance est utilisé pour caractériser le comportement non newtonien du fluide. La solution analytique, valable pour les cavités écrasées ($A \gg 1$) permet la prédiction des nombres de Rayleigh supercritiques et sous critiques marquant la naissance des mouvements convectifs.

2. Formulation mathématique du problème

La configuration géométrique étudiée, les conditions aux frontières et les axes de coordonnées sont montrés sur la figure 1. L'écoulement résultant est supposé bidimensionnel. Les équations adimensionnelles de conservation de quantité de mouvement et d'énergie, s'écrivent :

$$\frac{D\Omega}{Dt} = \text{Pr} \left[\mu_a \nabla^2 \Omega + 2 \left(\frac{\partial \mu_a}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\partial \mu_a}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) \right] + S_\Omega \quad (1)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \nabla^2 T \quad (2)$$

$$\text{avec} \quad S_\Omega = \text{Pr} \left[\left(\frac{\partial^2 \mu_a}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \mu_a}{\partial y^2} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - 2 \frac{\partial^2 \mu_a}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + Ra \text{Pr} \frac{\partial T}{\partial x} \quad (3)$$

Dans les équations ci-dessus, μ_a est la viscosité apparente, elle est définie par :

$$\mu_a = \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right]^2 \right\}^{\frac{n-1}{2}} \quad (4)$$

Les conditions aux limites thermiques relatives à ce problème sont données par:

$$x = \pm A/2 \quad \partial T / \partial x = 0 \quad (5a)$$

$$y = \pm 1/2 \quad \partial T / \partial y = -1 \quad (5b)$$

Trois conditions aux limites hydrodynamiques seront examinées dans cette étude, à savoir rigide-rigide (RR), rigide-libre (RF) et libre-libre (FF). Elles s'écrivent :

$$\text{- rigide-rigide : } y = \pm 1/2 \quad u = 0 \quad (6a)$$

$$\text{- rigide-rigide : } y = \pm 1/2 \quad \partial u / \partial y = 0 \quad (6b)$$

$$\text{- rigide-rigide : } y = 0 \quad u = 0, \quad y = 1 \quad du / dy = 0 \quad (6c)$$

Dans les équations (1)-(5), les nombres sans dimensions, à savoir le nombre de Rayleigh Ra , le nombre de Prandtl Pr et le rapport de forme A sont donnés par les expressions suivantes :

$$Ra = \frac{\rho g \beta'_T \Delta T' L'^{2n+1}}{\hat{K} \alpha_f^n}; \quad Pr = \frac{\hat{K}}{\rho \alpha_f} \left(\frac{\alpha_f}{L'^2} \right)^{n-1}; \quad A = \frac{H'}{L'} \quad (7)$$

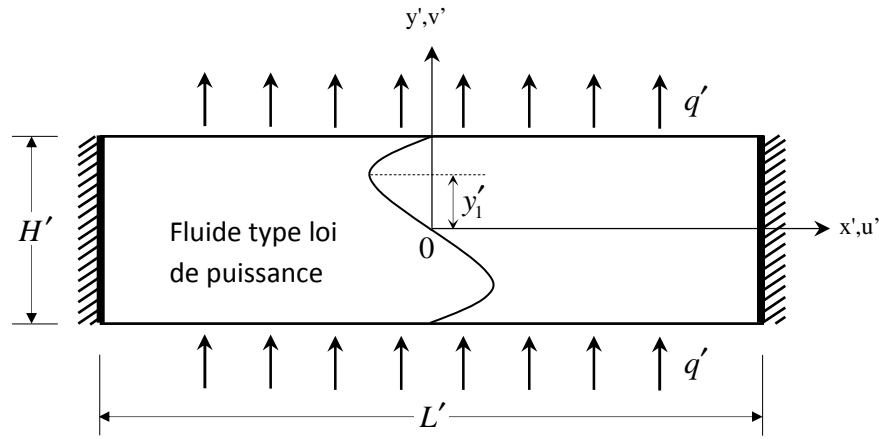


Figure 1 : Représentation schématique du système

3. Méthode numérique

La solution numérique des équations (1)-(4), soumises aux conditions aux limites (5-6), est obtenue en utilisant une méthode aux différences finies. L'équation d'énergie est résolue en utilisant la méthode implicite aux directions alternées (ADI). Ensuite, l'équation du mouvement est résolue par la méthode de surrelaxation (SOR) à partir des champs de température déjà établi.

4. Méthode de résolution analytique

Pour une couche poreuse infinie ($A \gg 1$), dans la partie centrale de la cavité, l'écoulement est supposé parallèle suivant la direction x , de telle sorte que seule la composante y de vitesse dans cette direction existe. En conséquence, le champ de la fonction de courant et la température sont respectivement de la forme suivante:

$$\Psi(x, y) \approx \Psi(y) \quad (7)$$

$$T(x, y) \approx C_T x + \theta_T(y) \quad (8)$$

En remplaçant les équations (7) et (8) dans les équations gouvernantes (1)-(2), on obtient :

$$\frac{d^2}{dy^2} \left[\frac{du}{dy} \left| \frac{du}{dy} \right|^{n-1} \right] = C Ra \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \theta_T}{dy^2} = C u \quad (10)$$

avec les conditions aux limites thermiques :

$$y = \pm \frac{1}{2} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = -1 \quad (11)$$

et la condition de débit:

$$\int_{-1/2}^{1/2} u(y) dy = 0 \quad (12)$$

Il existe une position $y = y_1$ qui dépend des conditions aux frontières hydrodynamiques imposées sur la couche et de l'indice de loi de puissance n , à laquelle la vitesse change de signe d'où $du/dy = 0$. Lorsqu'il s'agit des parois rigide-rigide ou libre-libre, l'écoulement est symétrique par rapport au plan horizontal passant par l'origine du système de coordonnées (voir figure 1). Seule la partie supérieure de la cavité ($0 \leq y \leq 1/2$) sera considérée.

Lorsque l'écoulement unicellulaire est antihoraire, on a:

Pour $0 \leq y \leq y_1$, l'expression de la vitesse et de la température u et $\theta(y)$ sont données par:

$$u(y) = (Ra C)^{1/n} F(y) \quad (13)$$

$$\theta(y) = Ra^{1/n} C^{1+1/n} \left[\int_0^y \left(\int_0^y F(y) dy \right) dy \right] - y \quad (14)$$

où la température au centre de la cavité est fixée arbitrairement et égale à zéro.

Pour $y_1 \leq y \leq 1/2$, ces champs de vitesse et de température s'écrivent:

$$u(y) = (Ra C)^{1/n} [F_1 + G(y)] \quad (15)$$

$$\theta(y) = Ra^{1/n} C^{1+1/n} \left[\int_y^{y_1} \left(\int_y^{y_1} [F_1 + G(y)] dy \right) dy \right] - y \quad (16)$$

Les fonctions $F(y)$ et la constante F_1 dans les équations ci-dessus sont données par :

$$F(y) = \int_0^y [-f(y)]^{1/n} dy \quad G(y) = \int_y^{y_1} [f(y)]^{1/n} dy \quad F_1 = \int_0^{y_1} [-f(y)]^{1/n} dy \quad (17)$$

Dans les équations ci-dessus, la valeur de C est obtenue en considérant un volume de contrôle arbitraire à l'extrémité de la cavité et en faisant un bilan d'énergie sur ce dernier. On peut montrer que :

$$C = 2 \left[\int_0^{1/2} u(y) \theta(y) dy \right] \quad (18)$$

Ce qui donne, en considérant les équations (13)-(18), l'expression non linéaire suivante:

$$A_n Ra^{2/n} C^{2/n} + B_n Ra^{1/n} C^{(1-n)/n} - 1 = 0 \quad (19)$$

où les coefficients A_n et B_n sont donnés par:

$$A_n = 2 \int_0^{1/2} F(y) \left\{ \int_0^y \left[\int_0^y F(y) dy - \int_0^{1/2} F(y) dy \right] dy \right\} dy, \quad B_n = -2 \int_0^{1/2} F(y) y dy \quad (20)$$

En raison de la complexité de l'équation (19), une procédure numérique telle que la méthode de Newton-Raphson doit être utilisée pour déterminer la valeur de C en fonction de Ra et n . Une fois cette valeur de C est obtenue, les champs de vitesse et de température peuvent être déterminés à partir des équations (15)-(16) ainsi que le taux de transfert de chaleur dans la cavité, Nu .

5. Résultats et discussion

Il est intéressant de mentionner que, pour quelques valeurs de n , il est possible de trouver, à partir de l'équation (19), des expressions analytiques de C . Par exemple c'est le cas de $n = 3$ et $n = 1/3$ qui seront discutés ci-dessous pour étudier le comportement et le phénomène d'apparition de la convection pour le cas des fluides pseudoplastiques et dilatants.

5.1 Nombre de Rayleigh critique

L'apparition de la convection, au sein d'une couche d'un fluide newtonien chauffée par le bas, a été étudiée dans le passé par des nombreux chercheurs. Parmi eux, Sparrow et al. [6] qui ont étudié le problème d'une couche fluide newtonien horizontale soumise à diverses conditions aux limites thermiques et hydrodynamiques. Pour le cas particulier d'un système soumis à des conditions aux limites thermiques de type Neumann, il a été démontré par ces auteurs que l'apparition de la convection se produit à un nombre d'onde nul. Ainsi, comme discuté par d'autres auteurs, comme par exemple Vasseur et al. [7], le critère pour l'apparition des mouvements convectifs peut être prédit par la théorie de l'écoulement parallèle.

a- Fluide newtonien :

Les figures 2(a)-(c) illustrent l'apparition de la convection dans une couche de fluide non newtonien, soumise à des conditions aux frontières hydrodynamiques RR. Les résultats sont présentés en termes de la fonction de courant Ψ_{\max} versus le nombre de Rayleigh Ra . Nous constatons un bon accord entre les solutions analytiques et numériques. La figure 2(a) correspond au cas classique d'une couche de fluide newtonien traité par Vasseur et al [8]. Pour des tels fluides, l'apparition de la convection à partir d'un état de repos, correspondant à $C = 0$, se produit à un nombre de Rayleigh supercritique égale à $Ra_C^{\text{sup}} = 720$.

b- Fluide dilatant

Le comportement d'un fluide dilatant ($n > 1$) est illustré par la figure 2(b). Les résultats sont présentés pour $n = 3$ puisque pour cette valeur nous avons eu une solution exacte. La courbe de bifurcation obtenue indique que la convection se produit pour toute valeur du nombre de Rayleigh supérieure à zéro. Autrement dit, le nombre de Rayleigh supercritique pour l'apparition de la convection est $Ra_C^{\text{sup}} = 0$.

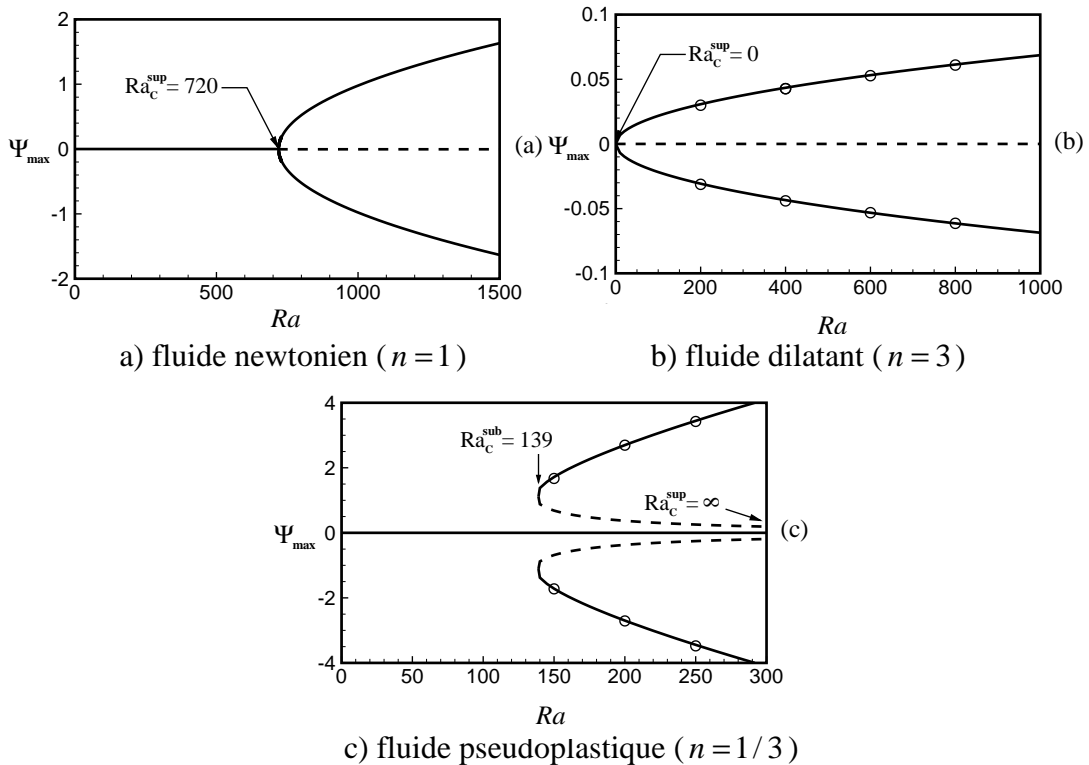


Figure 2 : Diagramme de bifurcation en termes de Ψ_{\max} en fonction de Ra pour une couche avec des frontières RR

a- Fluide pseudoplastique

Le comportement d'un fluide pseudoplastique ($n < 1$) est illustré par la figure 2(c). Les résultats obtenus sont présentés pour le cas $n = 1/3$. Le graphique montre l'occurrence d'une bifurcation souscritique pour laquelle l'apparition de la convection se produit avec une amplitude finie. Pour cette valeur particulière de $n = 1/3$, l'apparition des mouvements convectifs se produit à un nombre de Rayleigh sous critique $Ra_C^{sub} = 139$. Pour des valeurs de $Ra_C^{sub} > 139$, les résultats montrent l'existence de cinq solutions, à savoir, quatre solutions convectives : deux stables (lignes solides) et deux instables (lignes interrompues) et une solution purement diffusive ($\Psi_{max} = 0$). Les branches stables sont reliées à celles instables à un nœud de bifurcation. Il est à noter que les branches instables tendent asymptotiquement vers le nombre de Rayleigh supercritique $Ra_C^{sup} \rightarrow \infty$.

5.2 Effet de l'indice de la loi de puissance et des conditions hydrodynamiques sur l'apparition de la convection

Les effets de l'indice de loi de puissance n et des conditions aux limites hydrodynamiques sur le nombre de Rayleigh critique Ra_C pour l'apparition des mouvements convectifs sont présentés dans la figure 3. Elle montre que pour un fluide dilatant ($n > 1$), le déclenchement de la convection se produit à $Ra_C^{sup} = 0$ indépendamment des conditions aux limites hydrodynamiques imposées sur la couche. Par contre, les travaux de Lamsaadi et al. [3] ont montré que pour $n = 1.4$, le nombre de Rayleigh critique pour l'apparition de la convection pour une couche rigide-rigide est $Ra_C^{sup} = 810$. Ce résultat différent de zéro est probablement dû à la difficulté de trouver numériquement, à partir de l'équation (19), la valeur exacte du nombre de Rayleigh critique pour lequel C est nul. Pour le fluide pseudoplastique ($n < 1$), la théorie de stabilité linéaire indique que le nombre de Rayleigh supercritique marquant la naissance des mouvements convectifs est $Ra_C^{sup} = \infty$. Cette valeur montre que le système est inconditionnellement stable pour des perturbations infinitésimales. Cependant, comme la montre la figure 2(c), le présent modèle non linéaire prédit que l'apparition de la convection se fait par une bifurcation souscritique. Le nombre de Rayleigh souscritique Ra_C^{sub} en fonction de n est déterminé en résolvant les équations (19-20) et les résultats obtenus sont présentés dans figure 3 pour les trois conditions aux limites hydrodynamiques citées précédemment.

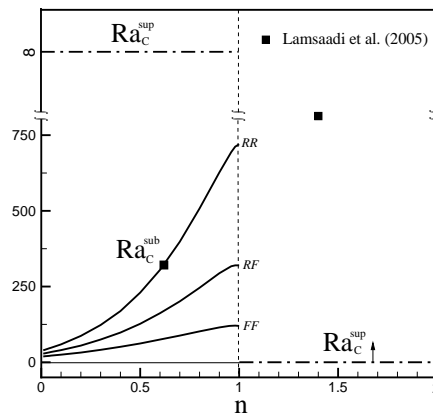


Figure 3 : Effet de l'indice de comportement n sur les nombres de Rayleigh Ra_C^{sup} et Ra_C^{sub} pour l'apparition de la convection dans la couche horizontale.

Lorsque la valeur de $n < 1$, on observe que, pour une condition aux limites hydrodynamique donnée, le nombre de Rayleigh souscritique Ra_C^{sub} augmente progressivement avec n . Pour $n = 1$, il est constaté que le nombre de Rayleigh sous critique Ra_C^{sub} est en bon accord avec les valeurs $Ra_C^{sup} = 720, 320$ et 120 , prédites par la théorie de stabilité linéaire, pour les trois conditions RR, RF et FF (voir [6-8]).

5.3 Diagrammes de bifurcation

Les diagrammes de bifurcation en termes de Ψ_{max} et Nu en fonction de Ra et n sont illustrés par les figures 4(a)-(b) pour des conditions hydrodynamiques RR.

a- Fluide dilatant

Pour un fluide dilatant, ces bifurcations sont représentées par les graphes 4(a). Pour ce type de fluides, la convection se déclenche à un nombre de Rayleigh supercritique $Ra_C^{sup} = 0$ quel que soit la valeur de $n > 1$ et la convection est possible pour toute valeur du nombre de Rayleigh supérieure à zéro. Les résultats indiquent que pour $Ra \leq 720$, l'intensité de convection (Ψ_{max}) et le taux de transfert de chaleur (Nu), sont renforcés lorsque la valeur de n est de plus en plus élevée. Cependant, pour des valeurs de Ra plus grandes, la tendance est inversée. Nos résultats sont parfaitement en accord avec l'ensemble des travaux existants dans la littérature qui ont démontré que pour des valeurs de nombre de Rayleigh relativement élevées, les effets de la convection deviennent importants lorsque les valeurs de n diminuent.

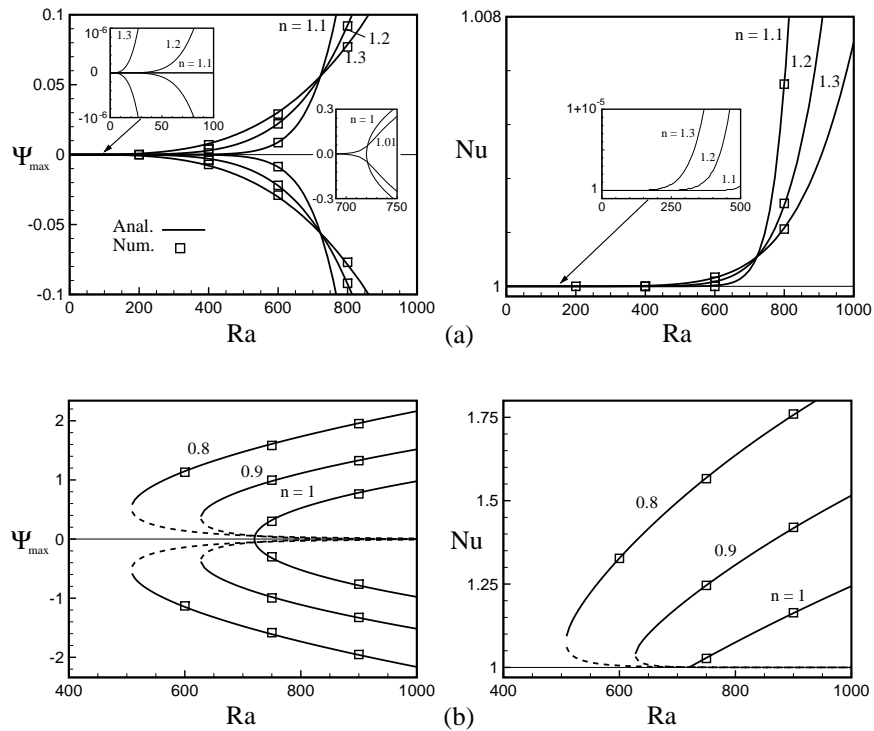


Figure 4 : Diagrammes de bifurcation en termes de Ψ_{max} et Nu en fonction de Ra et n pour une couche avec des frontières rigide-rigide (RR).

a- *Fluide pseudoplastique*

Les résultats correspondant aux fluides pseudoplastiques sont présentés dans la figure 4(b). Telle que montrée par la figure 3, on remarque que la convection est possible seulement au-dessus d'un certain nombre de Rayleigh souscritique Ra_C^{sub} qui est fonction de l'indice de la loi de puissance n . Cette figure montre clairement que, lorsque l'indice de la loi de puissance n diminue, pour une valeur donnée du nombre de Rayleigh Ra , l'intensité de convection dans la cavité et le taux transfert de chaleur augmentent simultanément.

6. Conclusion

Une étude analytique et numérique de la convection au sein d'une couche horizontale d'un fluide non newtonien a été étudiée dans cette étude. Diverses conditions aux frontières hydrodynamiques (rigide-rigide (RR), libre-libre (FF) et rigide-libre (RF)) ont été appliquées sur le système. L'approximation de l'écoulement parallèle a permis la prédiction du nombre de Rayleigh supercritique marquant la naissance des mouvements convectifs à partir de l'état de repos. Pour un fluide dilatant ($n > 1$), il a été trouvé que $Ra_C^{sup} = 0$. Pour un fluide pseudoplastique ($n < 1$), $Ra_C^{sup} = \infty$, ce qui implique que, selon la théorie de la stabilité linéaire, le système est inconditionnellement stable pour des perturbations infinitésimales. Cependant, la théorie non linéaire de l'écoulement parallèle prédit que l'apparition de la convection se produit à un certain nombre de Rayleigh souscritique Ra_C^{sup} qui dépend des valeurs de n et les conditions aux limites appliquées sur le système.

Références

- [1] Ozoe H. H., Churchill S.W., Hydrodynamic stability and natural convection in Ostwald-de Waele and Ellis fluids: the development of a numerical solution, *AIChE Journal*, 18, 1196-1207, (1972).
- [2] G. B. Kim, J. M. Hyun, H. S. Kwak, Transient buoyant convection of a power-law non-Newtonian fluid in an enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 46, 3605-3617, (2003).
- [3] Lamsaadi M., Naimi M., Hasnaoui M., Natural convection of non-Newtonian power-law fluids in a shallow horizontal rectangular cavity uniformly heated from below, *Heat Mass Transfer*, 41, 239-249, (2005).
- [4] Bian W., Vasseur P. And Bilgen E. Boundary-layer analysis for natural convection in a vertical boundary layer filled with a non-Newtonian. *Int. J. Heat Fluid Flow*, 15 384-391, (1994).
- [5] Barletta A., Nield D. A. , Linear instability of a horizontal throughflow in a plane porous layer, *Physics of Fluids* 23 013102, (2011) .
- [6] Sparrow E. M., Goldstein R. J. , Jonsson R. J., Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and nonlinear temperature profile, *J. Fluid Mech.*, 18, 513-528 (1964).
- [7] Vasseur P., Robillard L., Sen M., Unicellular convective motion in an inclined fluid layer with uniform heat flux, *Bifurcation Phenomena in Thermal Processes*, ASME HTD-Vol. 94,23-39, (1987).
- [8] Vasseur P., Wang C. H. , Mihir Sen, The Brinkman model for natural convection in a shallow porous cavity with uniform heat flux, *Numerical Heat Mass Transfer, Part A*, Vol. 15, 221-242, (1989).