

Modélisation par homogénéisation des transferts de chaleur dans des structures composites avec prise en compte des effets de bords

Abdelghani MATINE^{1*}, Nicolas BOYARD¹, Patrice CARTRAUD², Grégory LEGRAIN², Yvon JARNY¹

¹Laboratoire de Thermocinétique de Nantes, UMR 6607
La Chantrerie rue Christian Pauc, BP 50609, 44306 Nantes cedex 3 - France

² GeM de Nantes, UMR 6183, CNRS-Ecole centrale de Nantes
BP 92101 F- 44321 Nantes Cedex 3, France

*(abdelghani.matine@univ-nantes.fr)

Résumé - Ce travail porte sur l'homogénéisation des transferts de chaleur par conduction dans des matériaux hétérogènes et multi-échelles comme les composites fibreux, comprenant une matrice polymère. Parmi les différentes méthodes existantes, nous nous sommes intéressés à celle des développements asymptotiques. Cette méthode conduit à la détermination du tenseur de conductivité effective par résolution d'un problème posé sur la période de la structure. Le problème de structure est alors analysé à l'échelle macroscopique, avec ce comportement homogénéisé. La méthode peut être étendue à des cas non périodiques à condition d'avoir déterminé un VER (Volume Élémentaire Représentatif). Cette approche conduit à une bonne approximation des champs de flux de chaleur et de température à l'intérieur de la structure (i.e. loin des frontières). Cependant des effets de bord existent à proximité des limites du domaine considéré et dégradent la qualité de l'approximation dans ces zones. Leur importance dépend de plusieurs paramètres tels que le contraste thermique, le facteur d'échelle (rapport entre la taille de la structure et la longueur caractéristique des hétérogénéités), ainsi que du type de condition aux limites. Afin de corriger ces effets de bords, deux approches ont été développées. La première consiste à rajouter, dans les développements asymptotiques, des termes de couche limite au voisinage des bords (sur la base des travaux de H. Dumontet en l'élasticité). La deuxième approche (Méthode Arlequin) permet quant à elle de capter les effets de bords en raccordant le modèle hétérogène sur les frontières avec le modèle homogénéisé sur toute la structure. Des exemples numériques sont présentés pour un matériau composite unidirectionnel carbone-époxy. Les solutions homogénéisées, calculées à l'aide d'un logiciel d'éléments finis et corrigées avec les termes de couche limite, sont comparées à la solution du problème hétérogène à l'échelle macroscopique.

Nomenclature

e_i	vecteur de l'espace	$T_{BL}^{1,i}$	terme correcteur de couche limite sur la frontière Γ_i , K
Ω	domaine spatial de la pièce	ϕ^ϵ	flux hétérogène, $W.m^{-2}$
Γ_i	frontière de Ω	ϕ^k	flux homogène à l'ordre k , $W.m^{-2}$
Y	domaine spatial de la cellule périodique	K	conductivité hétérogène, $W.m^{-1}.K^{-1}$
G_i	domaine semi infini	K^*	conductivité homogène, $W.m^{-1}.K^{-1}$
L	Longueur de la pièce, m	f	source volumique
l	Longueur de la cellule périodique, m	x, y	variables de l'espace
ϵ	rapport d'échelle	w	solution de problème de la cellule
n	normale extérieur	χ^i	solution de problème de la couche limite dans G_i
T^ϵ	température hétérogène, K		
T^k	température homogène à l'ordre k , K		

1. Introduction

La recherche menée dans la caractérisation des propriétés thermiques de matériaux composites découle de problématiques industrielles réelles comme la prédiction du comportement thermo-mécanique de pièces structurales d'avions, anciennement à structure métallique et maintenant principalement formées de matériaux composites cent fois plus isolants thermiquement.

Toute incertitude sur la connaissance de ces propriétés impacte directement la précision sur les températures maximales atteintes par la structure composite et donc le dimensionnement de celles-ci. La connaissance des propriétés thermiques de ces structures composites est donc cruciale. Il faut disposer de méthodes fiables et optimales du point de vue coût de mise en oeuvre, pour les caractériser thermiquement. Deux approches complémentaires peuvent être employées à cet effet. La première est expérimentale et consiste à estimer les propriétés anisotropes d'échantillons à partir de mesures d'échauffements contrôlés. On peut citer par exemple la méthode flash([1]) qui consiste à soumettre une face d'un échantillon (quelques millimètres d'épaisseur) à un pulse d'énergie de courte durée (comparativement aux phénomènes observés) et d'enregistrer la réponse thermique sur sa face arrière. Une autre méthode ([2]) a pour principe de considérer une chaufferette instrumentée de micro-thermocouples prise en sandwich entre deux échantillons cylindriques. Alimentée électriquement la chaufferette libère de manière symétrique un flux de chaleur connu et maîtrisé dans les échantillons, ainsi il est possible d'estimer le tenseur de conductivité thermique dans l'échantillon à partir des mesures de températures. La seconde approche est numérique et consiste à calculer le tenseur de conductivité thermique effectif. Ainsi, les premiers travaux effectués dans ce cadre sont basés sur des études analytiques permettant de définir un comportement macroscopique moyen ([5]). Cependant, elles ne permettaient pas de remonter aux propriétés locales de la solution. Dans ce travail on se situe dans le cadre de la méthode d'homogénéisation des milieux périodiques ([6]-[7]-[8]) basée sur les développements asymptotiques.

Cette approche est multi échelles puisqu'elle permet non seulement de formuler un problème à l'échelle macroscopique mais aussi d'accéder aux variations locales de la solution. Cependant l'hypothèse de périodicité locale de la solution n'est plus valable au voisinage des bords. Il faut donc à ce niveau mettre en place une approche adaptée, mais qui rentre néanmoins dans le cadre des approches asymptotiques.

Cette méthode est intéressante du point de vue de la thermique sur deux aspects : l'estimation des propriétés thermiques effectives du composite ([9]) et la détermination des champs de température et de flux de chaleur homogénéisés dans la pièce. Par ailleurs, la prise en compte de la nature hétérogène et multi-échelle des composites pour le calcul de ces champs macroscopiques va favoriser la compréhension et l'interprétation des résultats obtenus par différents dispositifs expérimentaux. Plus précisément, les effets de bords dans le domaine de la thermique sont particulièrement importants pour les méthodes expérimentales et peuvent être pris en compte dans la théorie, comme le montrent de nombreux travaux en mécanique ([10]-[11]-[12]). Or, ces effets sont très peu discutés, à notre connaissance en thermique. On peut toutefois citer par exemple ([3],[4]) où on introduit les concepts de la conductivité de couche limite et la résistance de constriction. C'est pourquoi nous nous intéressons dans cet article à l'étude des problèmes de couche limite dans ce domaine sur la base des travaux d'H. Dumontet ([10]) en élasticité.

Dans un premier temps, nous rappelons brièvement les principaux résultats de l'homogénéisation par la méthode des développements asymptotiques, puis nous discuterons sur les deux approches pour corriger les effets de bords, une première méthode qui est basée sur l'introduction des termes de couche limites au voisinage des frontières puis une deuxième méthode (Arlequin) [13] qui permet de capter les effets de bords en raccordant le modèle hétérogène sur les frontières avec le modèle homogénéisé sur toute la structure. Finalement nous comparons les champs de température issus des résolutions des problèmes hétérogènes et homogénéisés pour un matériau composite fibreux.

2. Homogénéisation périodique

2.1. Description du problème

On considère une structure qui occupe un domaine Ω borné de \mathbb{R}^2 de frontière $\partial\Omega$. On notera $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ les coordonnées macroscopiques d'un point de Ω dans le système d'axes cartésien $\mathfrak{R} = (O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. On note la frontière de Ω par $\partial\Omega = \cup_{i=1}^3 \Gamma_i$ avec Γ_i les frontières de Ω . On décide d'imposer un flux F sur Γ_1 , et une température nulle sur la frontière Γ_2 et on considère que le matériau est périodique selon la direction \mathbf{e}_2 (permet ainsi d'éviter des effets localisés dans les coins). On note f une source volumique. On note par Y la cellule périodique (Figure. 1). Le paramètre ϵ dont la valeur est petite représente le rapport de l'épaisseur de la période l et d'une dimension caractéristique L de Ω . Notons aussi la variable macroscopique définie par $\mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \epsilon^{-1}$:

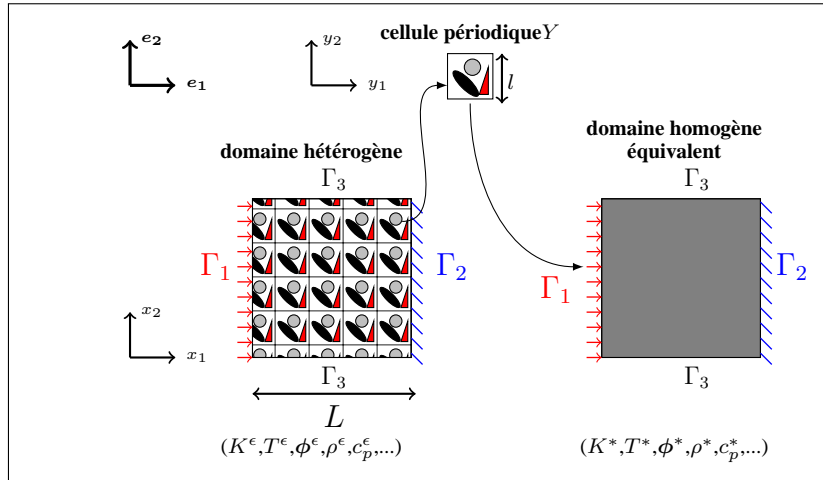


Figure 1: Domaine Ω et la cellule périodique Y associée

On désignera par $T^\epsilon(\mathbf{x})$ et $\phi^\epsilon(\mathbf{x})$ les champs de température et de flux de chaleur dans le milieu hétérogène. Ces champs satisfont le problème de transfert de chaleur par conduction à l'état stationnaire suivant :

$$\begin{cases} \text{div}_{\mathbf{x}}(-\phi^\epsilon(\mathbf{x})) = f(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega & (1) \\ \phi^\epsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{K} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T^\epsilon(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega & (2) \\ T^\epsilon(\mathbf{x}) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 & (3) \\ \phi^\epsilon(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = F(\mathbf{x}) & \text{sur } \Gamma_2 & (4) \\ T^\epsilon \text{ Périodique} & \text{sur } \Gamma_3 & (5) \end{cases}$$

où \mathbf{n} désigne la normale extérieure unitaire à la frontière Γ_1 , et $\nabla_{\mathbf{x}}$ désigne l'opérateur Nabla défini par : $\nabla_{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \end{pmatrix}$, et par $\mathbf{K}(y_1, y_2)$ le tenseur de la conductivité hétérogène.

2.2. Développement asymptotique

Pour déterminer le comportement asymptotique de la température T^ϵ et du flux ϕ^ϵ , solution du problème hétérogène lorsque ϵ tend vers 0, nous utilisons ici la méthode des développements

asymptotiques à plusieurs échelles([6]-[7]). Il s'agit d'écrire T^ϵ comme le développement suivant :

$$T^\epsilon(\mathbf{x}) = T^0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \epsilon + T^2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \epsilon^2 + \dots \quad (6)$$

Où la fonction T^k apparaissant à l'ordre k en ϵ a été supposée dépendante des deux variables, macroscopique \mathbf{x} et microscopique \mathbf{y} . Cette fonction est de plus supposée être périodique à l'échelle microscopique.

De façon tout à fait classique (pour plus de détails on peut consulter ([6]-[7]-[8])), le problème homogénéisé s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} \text{div}_{\mathbf{x}}(-\langle \phi^0 \rangle) = f(\mathbf{x}) & \text{dans } \Omega & (7) \\ \langle \phi^0 \rangle = \mathbf{K}^* \cdot \nabla_{\mathbf{x}} T^0 & \text{dans } \Omega & (8) \\ T^0(\mathbf{x}) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 & (9) \\ \langle \phi^0 \rangle \cdot \mathbf{n} = F(\mathbf{x}) & \text{sur } \Gamma_2 & (10) \\ T^0 \text{ Périodique} & \text{sur } \Gamma_3 & (11) \end{cases}$$

avec $\langle \cdot \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y \cdot d\mathbf{y}$ et où les coefficients de la matrice homogénéisée \mathbf{K}^* sont donnés par :

$$K_{i,j}^* = \frac{1}{|Y|} \int_Y \mathbf{K}(\mathbf{e}_i - \nabla_{\mathbf{y}} w_i) \cdot \mathbf{e}_j d\mathbf{y} \quad (12)$$

$w_{i=1,2}$ sont les solutions des problèmes élémentaires posée sur la cellule périodique Y .

$$\begin{cases} \text{div}_{\mathbf{y}}(\mathbf{K} \cdot (\mathbf{e}_i - \nabla_{\mathbf{y}} w_i)) = 0 & \text{sur } Y & (13) \\ w_i \text{ est périodique} & \text{sur } \partial Y & (14) \end{cases}$$

2.3. Existence d'effets de bords

Le flux ϕ^0 et la température T^0 obtenus par l'homogénéisation périodique constituent une approximation satisfaisante des $(T^\epsilon, \phi^\epsilon)$ dans des régions suffisamment éloignées des frontières $\partial\Omega$, mais cette approximation n'est plus satisfaisante à leurs voisinages. Ceci résulte d'une part de la perte de périodicité quand les frontières sont atteintes. D'autre part le flux ϕ^0 , dont l'évolution à l'échelle microscopique est donnée par la solution des problèmes élémentaires, n'est en général pas compatible avec une condition de Neumann arbitraire (11). Celle-ci sera donc seulement satisfaite au sens faible.

De ce point de vue, on peut dire que la théorie classique de l'homogénéisation des milieux périodiques décrit mal certains effets locaux comme les effets de bords (voir [10]-[11]-[12]). Des termes correctifs doivent donc y être apportés.

2.4. Méthode de correction

2.4.1. Introduction des correcteurs de couche limite

Afin de corriger ces défauts, on se propose dans ce travail une méthode qui consiste à introduire dans le développement asymptotique (6) des termes de couche limite sur les frontières Γ_1 et Γ_2 ([10]). On désigne par G_i les semi bandes (domaine semi-infini) telles que : $G_1 =]0, +\infty[\times]-l/2, l/2[$ et $G_2 =]-l/2, l/2[\times]-\infty, L[$ et sur laquelle des correcteurs de couche limite seront appliqués comme le montre la Figure. 2.

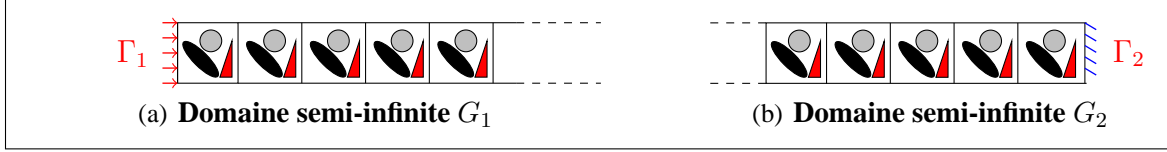


Figure 2: Définition des domaines semi-infini G_1 et G_2

Nous recherchons le champ de température T^ϵ dans le milieu hétérogène sous la forme suivante :

$$T^\epsilon(\mathbf{x}) = T^0(\mathbf{x}) + \left(T^1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \underbrace{T_{BL}^{1,1}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_{\text{terme de couche limite sur } \Gamma_1} + \underbrace{T_{BL}^{1,2}(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_{\text{terme de couche limite sur } \Gamma_2} \right) \cdot \epsilon + \dots \quad (15)$$

où le terme de couche limite $T_{BL}^{1,i}$ est défini pour $\mathbf{x} \in \Gamma_i$ et pour $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in G_i$, et il est périodique selon \mathbf{e}_2 . L'ajout de ce terme va permettre de satisfaire de façon exacte les conditions aux limites.

Le problème de couche limite sur les frontières Γ_i correspond à :

$$T_{BL}^{1,i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^2 \frac{\partial T^0}{\partial x_j}(\mathbf{x}) \cdot \chi_j^i(\mathbf{y}) \quad (16)$$

où i représente l'indice de la frontière Γ_i . Finalement χ_j^1 est solution du problème de couche limite dans G_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}_{\mathbf{y}}(-\mathbf{K}(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}(\chi_j^1(\mathbf{y}))) = 0 \quad \text{dans } G_1 \end{array} \right. \quad (17)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{K}(\mathbf{y})(\nabla_{\mathbf{y}}\chi_j^1(\mathbf{y})) \cdot \mathbf{n} = -\mathbf{K}(\mathbf{y})((\mathbf{e}_j - \nabla_{\mathbf{y}}w_j(\mathbf{y}))) \cdot \mathbf{n} + \frac{1}{|\mathbf{Y}|} \int_{\mathbf{Y}} \mathbf{K}(\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{e}_j - \nabla_{\mathbf{y}}w_j(\mathbf{y})) d\mathbf{y} \cdot \mathbf{n} \quad \text{in } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_j^1(\mathbf{y}) \text{ périodique selon } \mathbf{e}_2 \end{array} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_j^1(\mathbf{y}) \text{ décroissent exponentiellement lorsque } y_1 \rightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (20)$$

Et χ_j^2 est solution du problème de couche limite dans G_2 :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}_{\mathbf{y}}(-\mathbf{K}(\mathbf{y})\nabla_{\mathbf{y}}(\chi_j^2(\mathbf{y}))) = 0 \quad \text{dans } G_2 \end{array} \right. \quad (21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_j^2(\mathbf{y}) = w_j(\mathbf{y}) \quad \text{in } \Gamma_2 \end{array} \right. \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_j^2(\mathbf{y}) \text{ périodique selon } \mathbf{e}_2 \end{array} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \chi_j^2(\mathbf{y}) \text{ décroissent exponentiellement lorsque } y_1 \rightarrow -\infty \end{array} \right. \quad (24)$$

2.4.2. Méthode Arlequin

Dans cette section, nous nous intéressons à la méthode Arlequin pour corriger les effets de bords, l'idée est de proposer une méthode qui permet de résoudre simultanément le problème homogénéisé obtenu par la méthode de développement asymptotique tout en conservant le problème hétérogène sur les frontières pour capter les effets de bords.

La méthode consiste à superposer les modèles homogénéisé et hétérogène au voisinage des bords de la structure. Ces modèles sont définis sur Ω_m et Ω_f :

- Les effets de bords se localisent à proximité du bord. Ces derniers peuvent être captés par le modèle hétérogène T^ϵ basé sur une discrétisations fine Ω_f (Figure. 3).
- Un modèle homogène T^0 sur Ω_m . Ce dernier permettant l'utilisation d'une discrétisation grossière (Figure. 4).

La méthode consiste à distribuer les énergies entre les deux modèles sur leur zone de superposition. En notant W_f et W_m , les espaces des champs associés aux deux modèles, les formulations variationnelles pondérés par α_m et α_f prennent alors la forme suivante :

Trouver $T^\epsilon \in W_1$ tq $\forall v \in W_1$ on ait :

$$\underbrace{\int_{\Omega_f} \alpha_f \cdot \nabla v_1 \cdot K^\epsilon \nabla T^\epsilon d\Omega_f}_{k_1(T^\epsilon, v_1)} = \underbrace{\int_{\Omega_f} \alpha_f \cdot f \cdot v_1 d\Omega_f + \int_{\Gamma_1} \alpha_f \cdot F \cdot v_1 d\Gamma}_{f_1(v_1)}$$

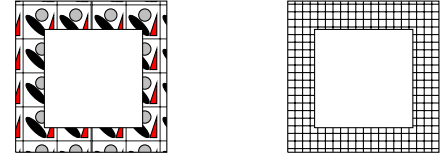


Figure 3: Modèle hétérogène

Trouver $T^0 \in W_2$ tq $\forall v_2 \in W_2$ on ait :

$$\underbrace{\int_{\Omega_m} \alpha_m \cdot \nabla v_2 \cdot K^* \nabla T^0 d\Omega_m}_{k_2(T^0, v_2)} = \underbrace{\int_{\Omega_m} \alpha_m \cdot f \cdot v_2 d\Omega_m + \int_{\Gamma_1} \alpha_m \cdot F \cdot v_2 d\Gamma}_{f_2(v_2)}$$

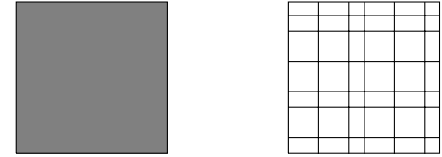


Figure 4: Modèle homogène

Pour ne pas compter deux fois l'énergie du système global dans la zone de recouvrement, chacun des deux modèles est pondéré par des fonctions dites de pondération qui forment une partition de l'unité sur l'ensemble du domaine d'étude (α_m, α_f) (Figure. 5)

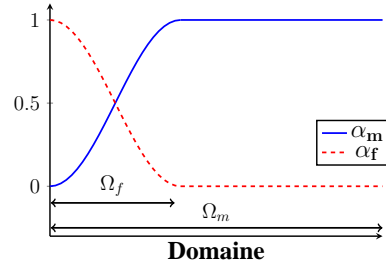


Figure 5: Fonctions de pondérations

Finalement le problème Arlequin correspondant consiste à déterminer les champs de température T^ϵ et T^0 , pour les deux modèles, et le champ de force fictive λ , solutions de l'équation variationnelle suivante sur $W_1 \times W_2$ (Figure. 6) :

Trouver $(T^\epsilon, T^0, \lambda) \in W_1 \times W_2 \times M$
tq $\forall (v_1, v_2, \mu) \in W_1 \times W_2 \times M$ on ait :

$$\begin{cases} k_1(T^\epsilon, v_1) + c(\lambda, v_1) &= f_1(v_1) \\ k_2(T^0, v_2) - c(\lambda, v_2) &= f_2(v_2) \\ c(\mu, T^\epsilon - T^0) &= 0 \end{cases}$$

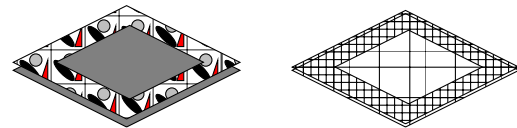


Figure 6: Espace de résolution $W_1 \times W_2$

Où M représente l'espace médiateur, et l'opérateur de couplage c est défini comme suit :

$$c(\lambda, \mu) = \int_S \lambda \cdot \mu + L^2 \cdot \nabla \lambda \cdot \nabla \mu \cdot dS$$

Où L est un paramètre qui a la dimension d'une longueur, qui a pour but de rendre homogène les deux termes sous l'intégrale, et S est la zone de collage des deux modèles dans laquelle il faut assurer la continuité du champ entre ces deux modèles.

3. Résultats numériques

Pour comparer les deux approches nous proposons d'étudier le problème de transfert de chaleur avec deux types de conditions aux limites imposées sur la frontière Γ_1 , sur un domaine composé par un arrangement de fibres circulaires, comme le montre la Figure. 7 :

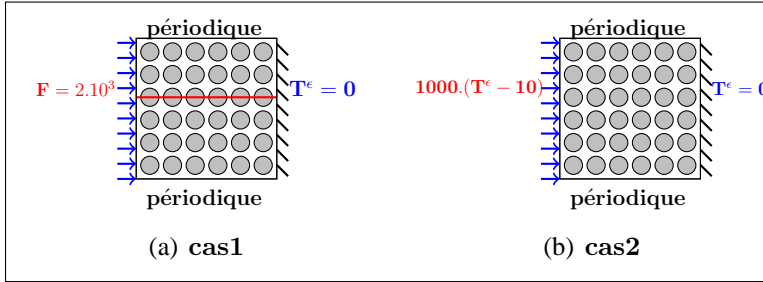
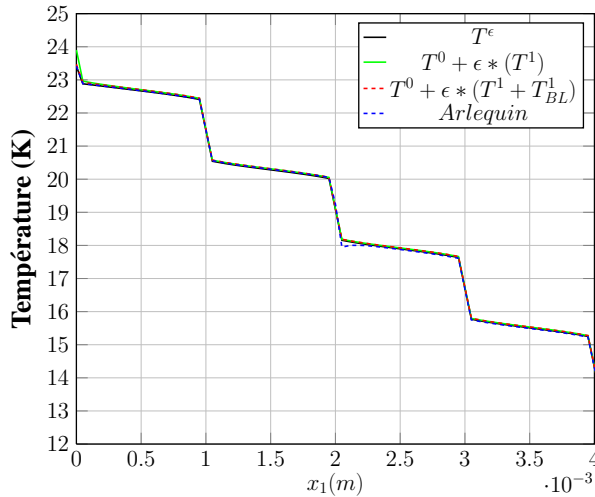


Figure 7: Cas étudiés pour comparer les deux approches

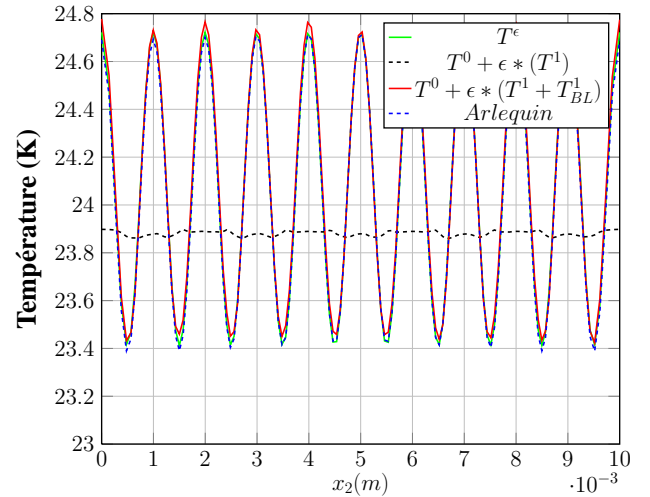
	propriété	valeur
Conductivité	$k_m (W.m^{-1}.K^{-1})$	0.2
	$k_f (W.m^{-1}.K^{-1})$	5
Géométrie	$L(mm)$	10
	$l(mm)$	1
	ϵ	0.1
	Taux de fibre	64%

Tableau 1: Propriétés géométriques et thermiques du domaine Ω .

Pour comparer les deux approches nous traçons sur les figures 8(a)-8(b) pour le cas 1 et les figures 9(a)-9(b) pour le cas 2, les températures T^ϵ de référence, $T^0 + \epsilon.(T^1)$ la solution homogénéisée relocalisée, $(T^0 + \epsilon.(T^1 + T_{BL}^{1,1}))$ la solution homogénéisée relocalisée et prenant en compte des effets de bords avec le terme correcteur $T_{BL}^{1,1}$ puis avec la solution issue de la méthode Arlequin.



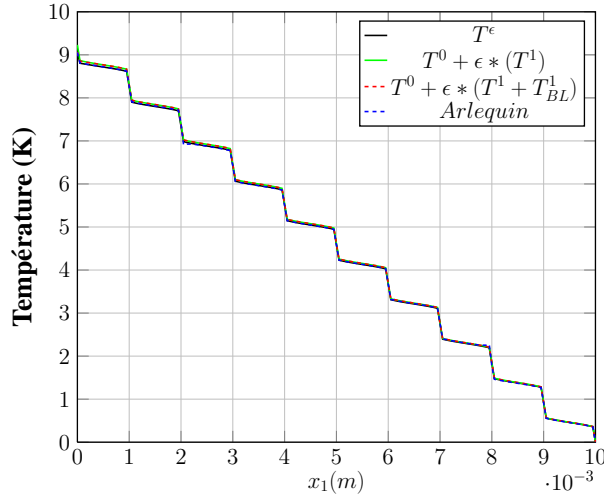
(a) droite : $x_2 = 5.5mm$



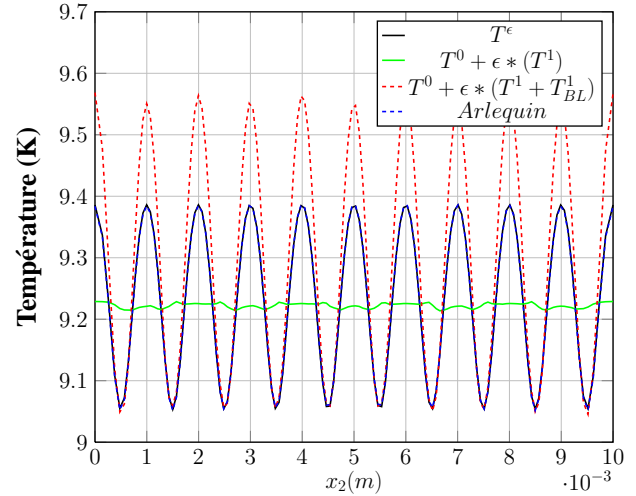
(b) droite : $x_1 = 0mm$

Figure 8: Résultats obtenus pour le cas1

Pour le premier cas qui correspond à une condition de flux F nous remarquons que les deux solutions $T^0 + \epsilon.(T^1 + T_{BL}^1)$ et Arlequin donnent une bonne approximation de la solution hétérogène T^ϵ sur $x_1 = 0$ comme sur $x_2 = 5.5mm$. Pour le deuxième cas qui présente une condition de troisième espèce avec $h = 1000W.m^{-2}.K^{-1}$ et une température extérieure $T^{ext} = 10K$ nous observons que la solution $T^0 + \epsilon.(T^1 + T_{BL}^1)$ approxime mal la solution hétérogène T^ϵ contrairement à la solution Arlequin. Cette comparaison montre les limites de la première approche pour des valeurs importantes de h .



(a) droite : $x_2 = 5.5\text{mm}$



(b) droite : $x_1 = 0\text{mm}$

Figure 9: cas2

4. Conclusion

Nous avons développé, dans le domaine de la thermique, le problème de couche limite permettant de prendre en compte les effets de bord dans le cadre de l'homogénéisation périodique. A titre de premier exemple, nous avons présenté des résultats obtenus pour un composite fibreux dans une configuration donnée. Ces résultats sont encourageants et démontrent l'intérêt de cette correction afin d'obtenir une meilleure approximation des champs de température au voisinage des bords.

Cependant cette méthode présente quelques limites, puisqu'il faut traiter chaque bord séparément et ainsi résoudre chaque problème de couche limite qui dépend des conditions aux limites imposées et en plus elle donne une mauvaise approximation avec la condition de troisième espèce pour des grandes valeurs de h . Une alternative est d'utiliser la méthode Arlequin ([13]) qui consiste à superposer au modèle homogène le modèle hétérogène sur les zones frontières, car elle fournit en une seule résolution une solution qui s'avère très satisfaisante, quelles que soient les conditions aux limites.

Références

- [1] A. Degiovanni, Diffusivité et méthode flash, *Revue Générale de Thermique*, 185 (1977) 420-41.
- [2] M. Thomas, N. Boyard, N. Lefèvre, Y. Jarny, D. Delaunay, An experimental device for the simultaneous estimation of the thermal conductivity 3-D tensor and the specific heat of orthotropic composite materials, *Compos.Sci.Technol*, 53 (2010) 5487-98.
- [3] O. Fudym, J.-C. Batsale, D. Lecomte, Heat diffusion at the boundary of stratified media, Homogenized temperature field and thermal constriction, *Heat and Mass Transfer*, 47 (2004) 2437-77.
- [4] J.-C. Batsale, C. Gobbe, M. Quintard, Local non-equilibrium heat transfer in porous media, Recent Research, *Developments in Heat Mass and Momentum Transfer*, ed Research Sign Post (Trivandrum : India) (1996) 1-21.
- [5] M. Bornet, T. Bretheau, P. Gilormini, *Homogénéisation en mécanique des matériaux 1*, Paris : Hermes Science (2001).
- [6] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis for Periodic Structures*, Amsterdam North Holland Ed (1987).
- [7] J. Sanchez-hubert, E. Sanchez-palencia, *Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation*, Paris : Masson (1992).
- [8] J. Auriault, C. Boutin, C. Geindreau, *Homogénéisation de phénomènes couplés en milieu hétérogènes 1*, Paris : Lavoisier (2009).
- [9] M. Thomas, N. Boyard, N. Lefèvre, Y. Jarny, D. Delaunay, Representative volume element of anisotropic unidirectional carbon-epoxy composite with high-fibre volume fraction, *Compos.Sci.Technol*, 68 (2008) 3184-92.
- [10] H. Dumontet, Homogénéisation et effets de bords dans les matériaux composites, *thèses d'état de l'université Pierre et Marie Curie Paris 6* (1990)
- [11] N. Buannic, P. Cartraud, Higher-order effective modelling of periodic heterogeneous beams -Part 2 : Derivation of the proper boundary conditions for the interior asymptotic solution, *Int.J. of Solids and structures*, 38 (2001) 7163-80.
- [12] D. Leguillon, G. Marion, R. Harry, F. Lécuyer, The onset of delamination at stress-free edges in angle-ply laminates - analysis of two criteria, *Compos.Sci.Technol*, 61 (2001) 377-82.
- [13] G. Rateau, Méthode Arlequin pour les problèmes mécaniques multi-échelles : Applications à des problèmes de jonction et de fissuration de structures élancées, *PhD thesis, Ecole Centrale Paris 6* (2003)