

# Reconstruction de Source de chaleur 1D par modes de Branche

Jing YE<sup>1\*</sup>, Laurent FARGE<sup>1\*</sup>, Alain NEVEU<sup>2\*</sup>, Stéphane ANDRE<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Laboratoire d’Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée  
2, avenue de la Forêt de Haye TSA 60604 - 54518 Vandoeuvres-Lès-Nancy Cedex

<sup>2</sup> Laboratoire de Mécanique de d’Énergétique d’Evry  
40, rue du Pelvoux 91020 Evry Cedex

\*(auteur correspondant : jing.ye@univ-lorraine.fr,  
a.neveu@iut.univ-evry.fr, Laurent.Farge@univ-lorraine.fr, stephane.andre@univ-lorraine.fr)

**Résumé** - La caractérisation thermomécanique par imagerie infrarouge nécessite un traitement inverse du champ de température afin de reconstruire les sources de la chaleur volumique. Par des mesures cinématiques (déplacements-vitesses), le phénomène d’advection thermique peut-être pris en compte pour l’inversion. Nous proposons ici une méthode de reconstruction de source 1D (éprouvettes élancées) à l’aide d’une base de Branche. Les vitesses locales de déformation lors des instabilités plastiques peuvent être importantes pour un polymère thermoplastique et sont maintenant accessibles par corrélation d’images. On présentera le problème de Branche généralisé, puis la technique de régularisation utilisée : 1) Troncature des modes 2) Méthodes des temps futurs. L’algorithme conduit à une inversion rapide en temps de calcul et ses performances seront analysées sur un cas-test pour lequel une source stationnaire en temps mais présentant des discontinuités sera considérée.

## Nomenclature

$T$	température, K	$V, V^*$	modes de branche propre et adjoint
$k$	conductivité thermique, W/m/K	$z, z^*$	valeurs propres correspondantes à $V, V^*$
$c$	chaleur volumique, J/m <sup>3</sup> /K	$n_{tf}$	nombre de pas de temps futurs
$v_0$	vitesse d’advection constante, m/s	<i>Symboles grecs</i>	
$h_1, h_2$	coefficient d’échange, W/m <sup>2</sup> /K	$\zeta$	nombre de Steklov
$q$	source thermique, W/m <sup>3</sup>	$\delta$	distribution de Dirac
$v$	vitesse d’advection variable, m/s	$\sigma$	écart-type du bruit de mesure

## 1. Introduction

Le problème consistant à mesurer la fonction source associée à un opérateur de type EDP est difficile et a fait l’objet de nombreuses études. Toutes apparaissent comme spécifiques selon l’opérateur considéré, la géométrie du problème, la nature des observables produits, et surtout les méthodes utilisées (pour la résolution directe ou inverse) de sorte qu’il est encore difficile d’imaginer disposer de techniques relativement standard et transposable. Pour les applications thermomécaniques, les données expérimentales sont toujours fournies par des images infrarouges et diverses méthodes ont été utilisées, en général sous l’hypothèse d’un transfert de diffusion pure [1, 2, 3]. Pour les matériaux fortement déformables comme les polymères semi-cristallins (PEHD), il convient d’évaluer si un phénomène d’advection lié aux instabilités plastiques et non pris en compte dans le modèle d’inversion ne conduit pas à un biais trop important sur la source identifiée. Nous proposons ici une méthode spectrale basée sur les modes de branche qui prend en compte ce phénomène. Nous présenterons d’abord le problème physique (Section 2) et la ”méthode de branche” en Section 3. La section 4 sera consacrée à la résolution du problème inverse. A ce stade, deux types de modes de branche seront comparés. L’algorithme

sera appliqué dans un cas-test particulier et les résultats numériques obtenus seront donnés en Section 5 avant de discuter des perspectives de ce travail en cours de réalisation.

## 2. Problème physique direct

Dans le cadre d'une reconstruction de source volumique pour un problème de transfert 1D (éprouvette élancée), nous considérons le modèle d'advection suivant :

$$\begin{aligned}
\forall X \in D = [0, L] \quad c \frac{\partial T(X, t)}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 T(X, t)}{\partial X^2} - cv(X, t) \frac{\partial T(X, t)}{\partial X} + q(X, t) \\
\forall t > 0 \quad -k \frac{\partial T}{\partial X}(0, t) &= -h_1 T \\
-k \frac{\partial T}{\partial X}(L, t) &= h_2 T \\
T(X, 0) &= 0
\end{aligned} \tag{1}$$

où les paramètres  $c, k, h_1, h_2, v$  sont à définir. Le champ de vitesse  $v$  peut être décomposé en une composante constante  $v_0$  et une fluctuation  $v_1$ , soit  $v(X, t) = v_0 + v_1(X, t)$ . La prise en compte des échanges convectifs sur les surfaces libres de l'éprouvette n'est pas explicitée ici (la réduction dimensionnelle du problème 3D→1D les reporte éventuellement sur le terme source à identifier  $q(X, t)$  selon l'approche classique de type ailette).

## 3. Problème de Branche

Notre objectif est d'identifier la source avec une méthode spectrale comme dans des travaux antérieurs [3] avec une base d'approximation différente et la prise en compte de l'advection. L'idée est ici de tester l'approche par modes de Branche qui peuvent permettre d'éliminer les incompatibilités aux limites (à l'aide de la *Condition de Steklov*) et sont susceptibles de fournir une base correcte de décomposition en présence d'un transfert par advection [4, 5]. Deux bases de branche, calculées respectivement pour un opérateur purement diffusif et advectif-diffusif, seront comparées. Compte-tenu de l'application envisagée, la reconstruction de la source thermique par un modèle d'advection-diffusion sera testée pour des nombres de Péclet de l'ordre de l'unité ou inférieur. A ce sujet, notons qu'il a été montré [5] qu'une base de branche calculée en situation de Péclet faible ou nul (opérateur diffusif pur) est relativement performante pour décomposer la solution d'un problème d'advection-diffusion pour des Péclets modérés. Il s'agira donc de voir s'il en est de même dans un objectif de reconstruction de source. Dans les paragraphes suivants, nous présentons les bases de branche obtenues analytiquement dans les deux cas de figure : Modes diffusifs purs 3.1. et Modes Advectifs-Diffusifs 3.2.

### 3.1. Modes Diffusifs (MD)

Cette base est déterminée par l'équation caractéristique suivante :

$$\forall X \in D \quad k \frac{\partial^2 V_i(X)}{\partial X^2} = z_i c V_i \tag{2}$$

$$-k \frac{\partial V_i(X)}{\partial X} \Big|_{X=0} = -z_i \zeta V_i \tag{3}$$

$$-k \frac{\partial V_i(X)}{\partial X} \Big|_{X=L} = z_i \zeta V_i \tag{4}$$

où les  $V_i$  désignent les Modes de Branche et  $z_i$  les valeurs propres associées. Le paramètre  $\zeta$  apparaissant dans les conditions aux limites est indispensable pour assurer l'homogénéité dimensionnelle des valeurs propres  $z_i$ . Il est directement lié à l'introduction de ces valeurs propres dans les conditions aux limites, à l'origine de la spécificité de la base de branche. Du point de vue dimensionnel, ce coefficient est en  $[M][L][T^{-2}][\Theta^{-1}]$ . Dans le système SI, ces unités sont en  $Jm^{-1}K^{-1}$  et traduisent le fait qu'un effet "capacitif" est introduit au niveau des frontières du domaine. Pour le cas 1D, il est possible de montrer que ce paramètre appelé 'Nombre de Steklov' correspond à  $\zeta = c * L/2$ . La résolution du problème est basée sur une approche Volumes Finis avec une précision sur le maillage en  $\mathcal{O}(\Delta X^2)$ . Comme l'opérateur est auto-adjoint, les valeurs propres sont réelles. Les modes sont réels aussi et ils vérifient la condition d'orthogonalité suivante :

$$\mathcal{E}_D(V_i, V_j) = \int_D cV_iV_jdX + \zeta(V_i(L)V_j(L) + V_i(0)V_j(0)) = \delta_{i,j}$$

### 3.2. Modes Advectifs-Diffusifs (MAD)

La seconde base de branche considérée sera celle produite en prenant en compte un terme advectif dans l'opérateur. Les modes seront solutions du système suivant :

$$\begin{aligned} \forall X \in D \quad k \frac{\partial^2 V_i}{\partial X^2} - cv_0 \frac{\partial V_i}{\partial X} &= cz_i V_i & (5) \\ e : \quad -k \frac{\partial V_i}{\partial X} \Big|_{X=0} &= -(z_i \zeta + cv_0) V_i \\ s : \quad -k \frac{\partial V_i}{\partial X} \Big|_{X=L} &= z_i \zeta V_i \end{aligned}$$

où  $v_0$  est défini en section 2. Pour un problème non auto-adjoint, deux spécificités sont à considérer pour calculer la base spectrale de branche :

- Seule une condition de flux advectif 'entrant' est à considérer dans les conditions aux limites de Steklov
- Les modes propres n'établissent pas une famille orthogonale et il est nécessaire de définir des modes de branche adjoints pour lesquels un flux advectif est considéré cette fois dans la condition aux limites de Steklov 'sortante'.

$$\begin{aligned} \forall X \in D \quad k \frac{\partial^2 V_i^*}{\partial X^2} + cv_0 \frac{\partial V_i^*}{\partial X} &= cz_i^* V_i^* & (6) \\ e : \quad -k \frac{\partial V_i^*}{\partial X} \Big|_{X=0} &= -z_i^* \zeta V_i^* \\ s : \quad -k \frac{\partial V_i^*}{\partial X} \Big|_{X=L} &= (z_i^* \zeta + cv_0) V_i^* \end{aligned}$$

La famille de fonctions  $(V_i, V_j^*)$  forme alors un système biorthogonal, la condition de bi-orthogonalité s'écrivant :

$$\mathcal{E}_D(V_i, V_j^*) = \int_D cV_i \bar{V}_j^* dX + \zeta(V_i(L) \bar{V}_j^*(L) + V_i(0) \bar{V}_j^*(0)) = \delta_{i,j}$$

Dans ce problème 5,6, les modes propres et adjoints peuvent être calculés analytiquement grâce à leur équation transcendante :

$$\tanh(\beta) = \frac{(Pe - Pe^2/4 + \beta^2)\beta}{-\beta^2 - (\beta^2 - Pe^2/4 + Pe)^2/4} \quad (7)$$

## 4. Méthode Inverse

Le champ  $T$  peut s'écrire comme une décomposition modale :

$$T(X, t) = \sum_{i=1}^N x_i(t) V_i(x) \quad (8)$$

Pour  $V_i$ , on pourra considérer indifféremment les modes diffusifs ou les modes advectifs-diffusifs (propres ou adjoints). Introduite dans la formulation variationnelle faible du problème initial (avec les conditions aux limites réelles), cette décomposition conduit à un système d'équations permettant de calculer les états  $x(t)$  :

1. *Base de Branche Diffusive* :

$$\sum_{i=1}^N \dot{x}_i(t) \gamma_{im} = z_m x_m(t) - \sum_{i=1}^N x_i(t) Q_{im} - \sum_{i=1}^N x_i(t) P_{im}(t) + \int_D q V_m dX \quad \forall m \in 1, \dots, N \quad (9)$$

avec

$$\gamma_{im} = \delta_{im} - \zeta \left( V_i(L) V_m(L) + V_i(0) V_m(0) \right)$$

$$Q_{im} = h_2 V_i(L) V_m(L) + h_1 V_i(0) V_m(0)$$

$$P_{im}(t) = \int_D cv(X, t) \frac{\partial V_i}{\partial X} V_m dX$$

2. *Base de Branche Advective* :

$$\sum_{i=1}^N \dot{x}_i(t) \gamma_{im} = z_m x_m(t) - \sum_{i=1}^N x_i(t) Q_{im} - \sum_{i=1}^N x_i(t) P_{im}(t) + \int_D q V_m dX \quad \forall m \in 1, \dots, N \quad (10)$$

avec

$$\gamma_{im} = \delta_{im} - \zeta \left( V_i(L) V_m^*(L) + V_i(0) V_m^*(0) \right)$$

$$Q_{im} = h_2 V_i(L) V_m^*(L) + h_1 V_i(0) V_m^*(0)$$

$$P_{im}(t) = \int_D cv_1(X, t) \frac{\partial V_i}{\partial X} V_m dX - cv_0 V_i(0) V_m^*(0)$$

Le champ de source thermique  $q$  est décomposable aussi sur la base de branche du domaine  $D$ . Compte-tenu des systèmes différentiels en temps (9), (10), on propose de mettre en œuvre une méthode des temps futurs pour identifier la source dans un processus séquentiel (et donc recouvrer sa dépendance temporelle). On posera :

$$q(X, t) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(t) c V_i(X) \quad (11)$$

En fonction de la complexité du champ source (présence de discontinuités en particulier) il faut conserver un nombre plus ou moins grand de modes pour en rendre compte. A l'opposé, la présence de bruit sur le signal de mesure (images infrarouges) impose une régularisation de la

reconstruction inverse qui s'obtient par réduction modale (troncature plus forte sur le nombre de modes). Il faut donc trouver un compromis. Les valeurs propres modales correspondent aux fréquences temporelles. Les modes ayant de petites constantes de temps sont associés aux hautes fréquences spatiales et s'ils sont conservés, vont être très sensibles au bruit de mesure et ne peuvent donc participer à la reconstruction du champ de température expérimental sans introduire un énorme biais sur la source. Reconstruire une discontinuité nécessitant un nombre de modes infinis, il est évident que ce genre de problème test est très difficile pour l'inversion. Notons qu'on a pondéré par la capacité dans (11). Ce n'est pas indispensable, mais cela permet en utilisant l'orthogonalité, de simplifier l'écriture.

En injectant la décomposition (11) dans l'équation d'état (9) et (10), on réécrit le système sous la forme matricielle :

$$\begin{aligned} \gamma \dot{\mathbf{x}} &= \Sigma \mathbf{x} - \mathbf{Q} \mathbf{x} - \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \gamma \mathbf{B} \\ \text{ou } \dot{\mathbf{x}} &= \gamma^{-1} \Sigma \mathbf{x} - \gamma^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{x} - \gamma^{-1} \mathbf{P}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B} \end{aligned} \quad (12)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1(t), \dots, x_N(t))^T, \dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1(t), \dots, \dot{x}_N(t))^T \\ \mathbf{B} &= (b_1(t), \dots, b_N(t))^T \\ \gamma &= (\gamma_{im})_{N \times N}, \mathbf{Q} = (Q_{im})_{N \times N}, \mathbf{P}(t) = (P_{im})_{N \times N}, \Sigma = \text{diag}(z_1, \dots, z_N) \end{aligned}$$

Pour simplifier,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{D}(t) \mathbf{x} + \mathbf{B} \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (13)$$

où

$$\mathbf{D}(t) = \gamma^{-1}(\Sigma - \mathbf{Q} + \mathbf{P}(t)).$$

Par un schéma implicite, on obtient le vecteur des états  $\mathbf{x}$  à partir de la contribution due à la condition initiale  $\mathbf{x}_0$  et celle due à la présence d'un terme source  $\mathbf{B}$  (Convolution en temps). Dans le cas présent, l'opérateur  $D$  "traduit" la composante cinétique du transfert en faisant jouer les valeurs propres  $z_k$  :

$$\frac{\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k}{\Delta t} = \mathbf{D}^{k+1} \mathbf{x}^{k+1} + \mathbf{B}^{k+1}$$

où  $\mathbf{x}(t_k) = \mathbf{x}^k$ . On peut réécrire l'équation ci-dessus sous la forme

$$\mathbf{x}^{k+1} = E^{k+1} \mathbf{x}^k + \Delta t E^{k+1} \mathbf{B}^{k+1} \quad (14)$$

en supposant que  $E^{k+1} = (\mathbf{I} - \Delta t \mathbf{D}^{k+1})^{-1}$ . Pour régulariser le calcul (filtrage), on applique classiquement une méthode de pas de temps futurs comme suggéré initialement par Beck [7]. On écrit  $r$  relations donnant les  $r$  états pour les  $r$  pas de temps suivant l'instant  $t_k$  en ayant considéré une source constante (mêmes coefficients  $\mathbf{B}$ , hypothèse dite  $H_k$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= E^{k+1} \mathbf{x}^k + \Delta t E^{k+1} \mathbf{B}^{k+1} \\ \mathbf{x}^{k+2} &= \prod_{i=1}^2 E^i \mathbf{x}^k + \Delta t E^{k+2} (E^{k+1} + \mathbf{I}) \mathbf{B}^{k+1} \\ \mathbf{x}^{k+3} &= \prod_{i=1}^3 E^i \mathbf{x}^k + \Delta t E^{k+3} (E^{k+2} (E^{k+1} + \mathbf{I}) + \mathbf{I}) \mathbf{B}^{k+1} \\ &\vdots \\ &r \text{ pas} \end{aligned} \quad (15)$$

La sortie du modèle est donnée directement par  $\mathbf{Y}(k+1) = \mathbf{V}\mathbf{x}^{k+1}$ . Pour le r-vecteur  $\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}(k+1), \mathbf{Y}(k+2), \dots, \mathbf{Y}(k+r))^T$ , nous allons chercher à minimiser l'estimateur "écart" entre températures mesurées

$\tilde{\mathbf{Y}} = (\tilde{\mathbf{Y}}^{k+1}, \tilde{\mathbf{Y}}^{k+2}, \dots, \tilde{\mathbf{Y}}^{k+r})^T$  et températures recalculées pour une source identifiée, soit  $\|\tilde{\mathbf{Y}} - \mathbf{Y}\|$ . La minimisation de ce critère pour les  $\mathbf{B}^{k+1}$  conduit à une expression matricielle formelle permettant de les calculer (fonction des  $r$  températures mesurées  $\tilde{\mathbf{Y}}^{k+i}, i = 1 \dots r$  et de l'état  $\mathbf{x}^k$ ).

## 5. Résultats Numériques

On étudie ici un cas test pour lequel la source est invariante en temps  $q(x)$ , continue mais de classe  $C_1$ . Ce problème est issu de [6] et nous sert à valider la méthode bien que les données numériques ne reflètent pas spécifiquement le cas d'une application thermomécanique. Les points de discontinuité de la source sont localisés en  $X = 0.6m$  m et  $X = 0.8m$  (unité de longueur en mètres). Les autres paramètres de la modélisation directe sont les suivants :  $c = 1J/m^3/K, k = 0.03W/m/K, h_1 = 0.1W/m^2/K, h_2 = 0.02W/M^2/K, t_{final} = 150s, L = 1.5m, D = [0, L]$  et  $v(X, t) = c*0.1*t/t_{final}*tanh(t/t_{final}*3*(X-L/2)), v_0 = 0.01m/s$ . L'important de toutes façons est de raisonner sur les grandeurs adimensionnelles (Péclet, Biot, Fourier) qui permettent de garantir la similitude du problème étudié avec les cas pratiques envisagés. Le champ de température expérimental simulé est ici produit par un calcul éléments finis 1D transitoire basé sur le logiciel FlexPDE®.

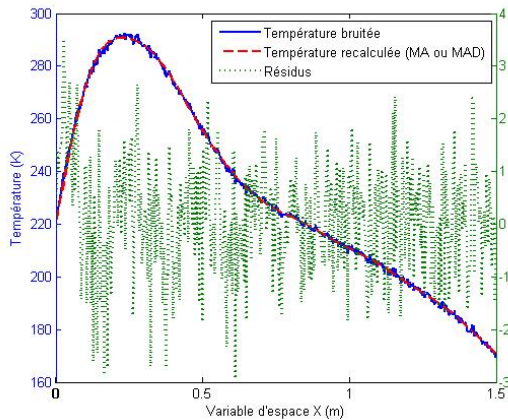


Figure 1 Profil de Température synthétique bruité à  $t = 100s$ , bruit  $\sigma = 1 K$

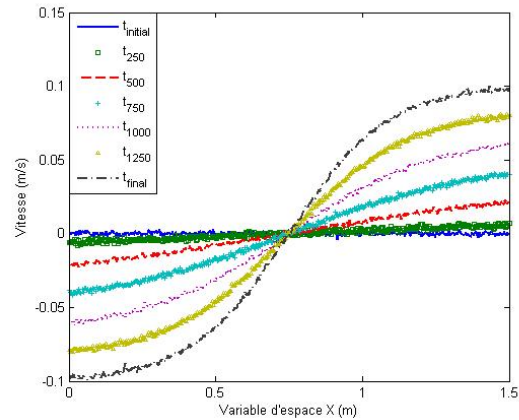


Figure 2 Champ de vitesse temporel bruité (2% de  $MAX(v)$ )

Dans le processus d'inversion, un bruit synthétique (aléatoire) est superposé au calcul direct pour simuler des températures mesurées bruitées. Il est donc additif, à distribution gaussienne et de moyenne nulle et d'écart-type  $\sigma$ . En présence d'un rapport Signal sur Bruit (ou SNR selon l'acronyme anglosaxon) non infini, la qualité de reconstruction de la source ne peut être que dégradée (perte de l'unicité de la solution notamment). Le principe même d'une approche spectrale, séparant les variables temps et espace, conduit à une régularisation du problème inverse agissant sur deux "leviers". Considérer un nombre de modes réduits (typiquement  $N_m = 14$  modes) permet de régulariser la solution vis-à-vis de la reconstruction spatiale. La méthode des temps futurs va permettre de lisser l'effet du bruit sur quelques pas de temps successifs  $n_{tf}$ .

Les figures 1, 3 et 4 correspondent aux résultats d'inversion obtenus pour notre cas test

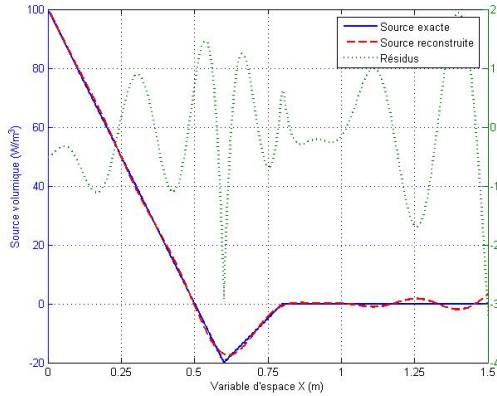


Figure 3 Source identifiée par MD (3.1.) à  $t = 100s$

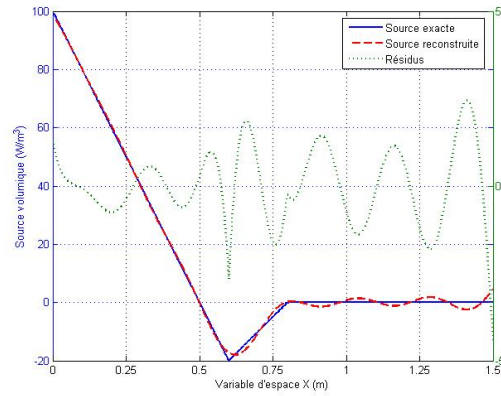


Figure 4 Source identifiée par MAD (3.2.) à  $t = 100s$

avec les conditions suivantes :  $t = 100s$ ,  $\Delta t = 0.1s$ , Bruit  $\sigma = 1K$  ;  $N_m = 14$ ,  $n_{tf} = 20$ ,  $\sigma_{residuals} = 0.999$ . La figure 2 donne les profils de vitesse utilisés pour la reconstruction (mesurés par corrélation d'image dans l'application pratique). Leur forme mathématique correspond exactement à ce qui a pu être mesuré réellement sur une éprouvette en cours de traction. Un biais/bruit de 2% a été ajouté sur ces fonctions idéalisées  $v(X, t)$ . La figure 3 montre la source reconstruite à partir des modes diffusifs purs, la figure 4 à partir des modes advectif-diffusifs. Dans les deux cas, les résidus d'identification sur le profil de température sont identiques et correspondent à ceux présentés en fig. 1. Les commentaires qu'appellent les précédentes figures sont les suivants :

- (i) Les résidus d'identification (fig.1) apparaissent comme non signés et leur écart-type correspond à l'écart-type du bruit introduit en entrée sur les profils de température générés par le calcul direct. On peut donc qualifier la reconstruction de non biaisée.
- (ii) La source reconstruite correspond très bien à la source exacte imposée dans le calcul direct que ce soit en utilisant les modes diffusifs purs ou advectif-diffusifs. Les erreurs maximales se localisent au point de discontinuité (en  $X = 0.6$ ) et aux bords du domaine. L'erreur au point de discontinuité est moindre (très légèrement) en utilisant les MAD.
- (iii) L'écart moyen approximatif entre source exacte et source reconstruite est dans les deux cas inférieur à 2.5%. Il semble légèrement plus important pour MAD ce qui peut être imputable à une précision moindre au niveau du respect de la condition d'orthogonalité.

## 6. Conclusion

Nos études portent sur l'application d'une méthode spectrale basée sur les modes de branche pour reconstruire la source thermique dans un système de diffusion-advection. L'algorithme mis au point est très rapide. Nous présenterons lors du congrès des résultats portant sur la reconstruction d'une source variable temporellement et spatialement. La possibilité de combiner des techniques de régularisation différentes (SVD, pénalisation de Tikhonov...) avec la méthode présente sera vérifiée. Une analyse plus poussée de l'influence sur la solution des biais inhérents aux paramètres mesurés comme la vitesse ou aux paramètres connus (comme  $h_1, h_2$  pour les conditions aux limites de bord) sera faite.

## Références

- [1] A.Chrysochoos and H.Louche, An infrared image processing to analyse the calorific effects accompanying strain localisation, *International Journal of Engineering Science* 38,16 (2000), 1759-1788.
- [2] CS.Doudard, S.Calloch, F.Hild and S.Roux, Identification of heat source from infrared thermography : Determination of 'self-heating' in a dual-phase steel by using a dog bone sample,*Mechanics of Materials* 42 (2010), 55-62.
- [3] N.Renault, S.Andre, D.Maillet and C.Cunat, A spectral method for the estimation of a thermo-mechanical heat source from infrared temperature measurements,*International Journal of Thermal Sciences* 49,8 (2010), 1394-1406.
- [4] O. Quemener, F. Joly and A. Neveu, One-line heat flux identification from a rotating disk at variable speed. *International Journal of Heat & Mass Transfer* 53 (2010),1529-1541. DOI 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2009.11.032
- [5] F. Joly, O. Quemener and A. Neveu, Modal reduction of an advection-diffusion model using a branch basis. *Numerical Heat Transfer, Part B* 53 (2008),466-485
- [6] H. Versteeg, W. Malalasekera, Introduction to Computational Fluid Dynamics : The Finite Volume Method, 2nd edn. PEARSON Prentice Hall (2007)
- [7] J. Beck, B. Blackwell, C.St. Clair, Inverse Heat Conduction :Ill-Posed Problems, *Wiley-Interscience* (1985)

## Remerciements

Les auteurs souhaitent remercier.