

# Etude numérique d'un écoulement assistant autour d'une sphère froide.

Cédric LE BOT\*, Gilles BOUCHET\*\*

\* Université Bordeaux 1, Laboratoire I2M – Département TREFLE  
16, avenue Pey-Berland – 33607 Pessac Cedex

\*\* Laboratoire IUSTI  
5, rue Enrico Fermi – 13453 Marseille Cedex 13  
(auteur correspondant : lebot@enscbp.fr)

**Résumé** - Dans cet article, nous décrivons l'influence du nombre de Reynolds et du nombre de Richardson sur les comportements dynamique et thermique d'un fluide chaud autour d'une sphère froide à température fixée en convection mixte lors d'un écoulement assistant. Le travail est mené par simulation numérique par deux codes de calcul. Ces deux codes apportent des résultats complémentaires et montrent que le fluide adopte des comportements variés (stable, périodique, ou instable) qui dépendent des valeurs de  $Re$  et  $Ri$ , paramètres du problème.

## Nomenclature

|       |  |                       |   |
|-------|--|-----------------------|---|
| $c_p$ | capacité calorifique, $J.kg^{-1}.K^{-1}$ | $t$                   | temps, s                                    |
| $H$   | hauteur de recirculation, $m$            | $T$                   | température, K                              |
| $d$   | diamètre, $m$                            | <i>Symboles grecs</i> |   |
| $p$   | pression, $Pa$                           | $\beta$               | coefficient d'expansion thermique, $K^{-1}$ |
| $Pr$  | nombre de Prandtl                        | $\lambda$             | conductivité thermique, $W.m^{-1}.K^{-1}$   |
| $Re$  | nombre de Reynolds                       | $\nu$                 | viscosité cinématique, $m^2.s^{-1}$         |
| $Ri$  | nombre de Richardson                     | $\rho$                | masse volumique, $kg.m^{-3}$                |

## 1. Introduction

Lorsque nous achetons un produit fini, comme une boîte en plastique par exemple, nous choisissons souvent celui qui possède le meilleur état de surface, le plus homogène, le moins fragile. Pourtant, tout au long du procédé, depuis le matériau brut jusqu'à la forme finale, la fabrication passe par des étapes où le matériau n'est pas en phase homogène. Dans l'exemple de la boîte en plastique, le matériau est porté à l'état fondu, puis refroidi. Des impuretés ou une mauvaise fusion du matériau provoquent alors l'existence de particules solides dans le bain liquide qui vont affecter l'aspect et/ou les propriétés de l'état final. Cette problématique se retrouve dans l'élaboration de nombreux matériaux, comme les métaux ou le verre, où la qualité de la phase liquide est primordiale sur le bon déroulement du procédé de mise en forme. De façon plus générale, la présence de particules solides dans une phase liquide se retrouve dans de nombreux processus naturels, comme le transport des sédiments marins (tel que le sable), la fonte des glaciers ou encore la convection du métal présent dans les bains de magma terrestre [1]. Les trajectoires de ces particules sont en général compliquées : elles résultent d'un couplage complexe entre l'écoulement moyen du fluide, la force de gravité qui induit la sédimentation ou l'ascension de la particule (comme un glaçon dans de l'eau par exemple), les effets dynamiques dus au sillage et les transferts de chaleur, qui, par convection thermique mixte, perturbent le mouvement particulaire. On distingue ainsi deux types d'écoulement particulaire : l'écoulement assistant, où la convection naturelle amplifie le mouvement de la sphère (sphère froide plus lourde que le fluide chaud, ou sphère chaude plus légère que le fluide froid), et l'écoulement opposant où la convection naturelle limite le transport de la particule (sphère chaude plus lourde que le fluide froid ou sphère froide plus

légère que le fluide chaud). L'écoulement autour d'une sphère a suscité beaucoup d'intérêt. Plusieurs auteurs ont montré que dans une configuration isotherme, une particule génère un sillage plus ou moins compliqué en fonction des conditions. Le régime d'écoulement et les transitions correspondantes sont généralement décrits au travers de nombres adimensionnels [2]. Des études expérimentales [3] ont montré que le sillage d'une sphère fixe soumise à un écoulement isotherme pouvait être rectiligne, en « fer à cheval » ou hélicoïdal. Plusieurs auteurs [4-5] ont montré que les transitions de comportement du fluide pouvaient être corrélées en fonction des nombres de Reynolds, Prandtl et Richardson. L'intérêt d'étudier le comportement d'une particule dans un liquide ambiant est donc multiple, puisque cela permet d'estimer le transport de masse que l'on retrouve dans plusieurs phénomènes naturels, ou encore d'examiner les zones d'agrégation de particules qui peuvent fragiliser ou dégrader une pièce industrielle lors de sa mise en forme. Le présent travail a pour objectif de présenter l'évolution du fluide dans le cas d'une sphère froide soumise à un écoulement chaud dans le cas d'un écoulement assistant et de déterminer l'influence de  $Ri$  et  $Re$  sur la structure de l'écoulement et sur le nombre de Nusselt.

## 2. Modélisation du problème

### 2.1. Modélisation physique

Le but de ce travail est de déterminer les champs de vitesse et de température d'un fluide Newtonien s'écoulant autour d'une sphère fixe dont la température est maintenue constante et inférieure à celle du fluide au loin. D'un point de vue physique, il s'agit donc de résoudre les équations de Navier-Stokes couplées à l'équation de l'énergie (les échanges thermiques se font à la fois par conduction et par convection). Nous avons fait le choix de prendre en compte les forces volumiques, dues à la flottabilité, par l'approximation de Boussinesq. Il est certain que cette approximation n'est pas valable dans le cas de particules de petite dimension. En effet, pour que les effets thermiques sur la dynamique de telles particules soient perceptibles, il faut des différences de température élevées. Néanmoins, il s'agit d'une approximation valable pour la plupart des expériences effectuées dans des conditions de laboratoire ; de plus, elle présente l'avantage de comporter un nombre minimal de paramètres. La dimension du domaine des paramètres régissant cet écoulement est ainsi réduite à trois : le nombre de Reynolds  $Re = V_\infty d / \nu$ , le nombre de Richardson  $Ri = \beta g (T_s - T_\infty) d / V_\infty^2$  et le nombre de Prandtl  $Pr = \nu \rho c_p / \lambda$ . On obtient, au final, le système d'équations (1).

$$\begin{cases} \nabla \cdot V = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial V}{\partial t} + (V \cdot \nabla) V \right) = -\nabla p + \rho g + \nabla \cdot \left( \mu (\nabla V + \nabla^T V) \right) + \frac{\mu}{K} V \\ \rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + (V \cdot \nabla) T \right) = \nabla \cdot (\lambda \nabla T) \\ \rho = \rho_0 (1 - \beta (T - T_0)) \end{cases} \quad (1)$$

Il existe différentes manières d'approcher ce problème et nous nous proposons ici d'en comparer deux. L'une d'elles consiste à prendre en compte à la fois le fluide et la sphère au sein du même domaine. Le code correspondant est basé sur une méthode à un fluide, qui consiste à prendre en compte à la fois le fluide principal et la sphère (particule solide) considérée comme un fluide. La perméabilité  $K$  affectée à la particule est fixée à une valeur très faible (de l'ordre de  $10^{-90} \text{ m}^2$ ), si bien que, dans les équations (1), cela revient à imposer une vitesse nulle dans cette zone. Dans le fluide ambiant, la perméabilité est prise égale à  $K=10^{-20} \text{ m}^2$ . C'est cette méthode qui est utilisée dans le code 'Thétis'. La seconde méthode consiste à ne prendre en compte que la partie fluide, si bien que la surface de la sphère

représente une partie de la condition limite du domaine. Celle-ci est donc de type Dirichlet. C'est cette méthode qui est utilisée dans le code 'IMFS'.

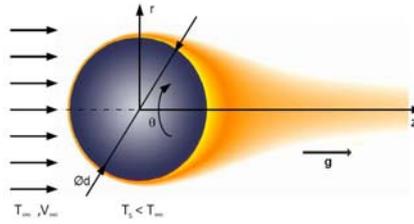


Figure 1 : Définition du problème

Le problème est schématiquement décrit sur la figure 1. Une sphère de diamètre  $d$  et de température surfacique constante  $T_s$  est immergée dans un fluide Newtonien incompressible de température  $T_\infty > T_s$ . La figure 1 représente la configuration d'un écoulement assistant : la vitesse uniforme en amont de la sphère  $V_\infty$  est dans le même sens que le champ de pesanteur  $\mathbf{g}$ . Les équations (1) sont adimensionnalisées par l'échelle de longueur  $d$ , l'échelle de vitesse  $V_\infty$ , l'échelle de temps  $d/V_\infty$  et  $\rho V_\infty^2$  pour la pression. La température sans dimension est définie par  $T^* = (T - T_\infty)/(T_s - T_\infty)$ . Les trois équations s'écrivent ainsi :

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \mathbf{V} + \text{Ri} T^* \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial T^*}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) T^* = \frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Ri}} \nabla^2 T^* \end{cases} \quad (2)$$

## 2.2. Résolution numérique

Le premier code numérique utilisé – Thétis – est développé au laboratoire I2M, département TREFLE (website: <http://thetis.enscibp.fr/>) et a été validé lors de plusieurs travaux antérieurs [6]. La résolution des équations est réalisée sur une grille cartésienne à maillages décalés en pression (scalaire) et vitesse (vecteurs). La discrétisation, implicite, est réalisée selon la méthode des volumes finis. Une méthode de correction de pression est utilisée pour traiter le couplage vitesse-pression, à l'aide de la contrainte d'incompressibilité. L'algorithme correspondant a été décrit par Goda [7]. Les termes de transport des équations de Navier-Stokes sont discrétisés selon un schéma centré [8] et un schéma de discrétisation de type Euler d'ordre 1 est utilisé pour le terme temporel. Le système linéaire obtenu est résolu par un solveur BiCGStab [9] de la librairie HYPRE et un préconditionnement de type Jacobi. L'étape de projection est résolue par un solveur GMRES et un préconditionnement Multigrille. Concernant l'équation de l'énergie, le terme de convection et le terme temporel sont respectivement linéarisés à l'aide d'un schéma upwind et un schéma Gear d'ordre 1. Un solveur GMRES et un préconditionnement Multigrille ont été utilisés. Les résidus des équations de Navier Stokes et de l'énergie sont imposés à  $10^{-10}$ .

Les conditions en limite amont sont une température constante  $T_\infty$  et une vitesse imposée  $V_\infty$ . En face aval, la condition limite est de type Neumann et adiabatique (le domaine est suffisamment long pour obtenir effectivement une vitesse parallèle à la vitesse amont et une température homogène, ce qui est conforme avec la définition de la condition à la limite). Les faces latérales sont des plans de symétrie, ce qui permet de placer la particule sur les plans de symétrie et de n'étudier qu'un quart du domaine. Ceci n'est réalisable qu'à la condition que l'écoulement reste symétrique, ce qui a été vérifié. Nous avons réalisé des simulations pour  $Re = 309$  et  $0,1 < Ri < 1$ . L'étude porte uniquement sur l'écoulement assistant.

Le second code utilisé – IMFS – pour cette étude est basé sur une décomposition du domaine en éléments spectraux [10] dans le plan (z,r) comportant l'axe (voir figure 2 avec un maillage typique de 169 éléments), complétée par une décomposition en série de Fourier dans la direction azimutale, cette dernière n'étant utile que pour des calculs tridimensionnels (voir [11] pour une description détaillée de la méthode). Un très grand nombre de simulations (souvent de longue durée lorsqu'il s'agit d'états asymptotiques complexes) ayant été nécessaire pour mener à bien l'étude présentée, une méthode numérique spécifique a dû être implémentée. En remplaçant la méthode itérative du calcul de la pression par une méthode directe, une accélération très significative a ainsi été obtenue. Le développement numérique spécifique à ce travail a comporté également la prise en compte de l'équation du transport de la chaleur. Le code obtenu nous permet ainsi d'effectuer, soit des calculs axisymétriques, soit des analyses de stabilité linéaire (en supprimant le couplage entre les modes azimutaux), soit des calculs pleinement tridimensionnels (avec un nombre de modes azimutaux variable). Ce code a été validé dans de nombreuses configurations (sphère fixe [12], sphère chauffée [13]).

Des conditions de Dirichlet  $V_\infty$  et  $T_\infty$  ont été imposées sur la face amont (entrée) et sur la surface latérale du domaine de calcul cylindrique (frontières latérales). A la sortie du domaine, des conditions de Neumann  $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{n}} = 0$  et  $\frac{\partial T}{\partial \mathbf{n}} = 0$  ont été imposées dans le sens faible afin de permettre l'évacuation de la vorticité et du panache thermique produits par le sillage de la sphère. Ces conditions nous permettent de maintenir les bords du domaine de calcul à une distance raisonnable de la sphère, sans influencer la solution de l'écoulement.

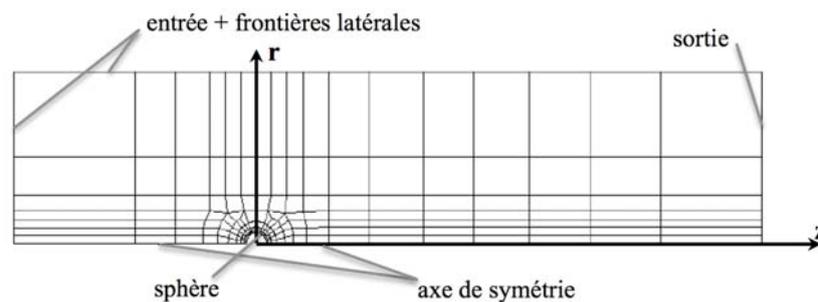


Figure 2 : Maillage typique de 169 éléments

### 3. Résultats

La première étape consiste à comparer les résultats des deux codes. Pour cela, les mêmes paramètres adimensionnels ont été utilisés. Pour  $Re = 309$  et  $0,1 < Ri < 1$ , la structure des recirculations (représentée en figure 4) obtenue par les deux codes a été comparée. On retrouve ainsi dans les deux cas un écoulement stationnaire, où la vitesse en aval de la particule est plus importante qu'en amont, par superposition de l'écoulement principal et des effets de convection naturelle. Les résultats montrent que la longueur de recirculation  $H$  augmente quand  $Ri$  diminue, et un faible écart entre les valeurs obtenues par chaque code est relevé (Tableau 1).

| $Ri$           | 0,1   | 0,2   | 0,3   | 0,4   | 0,5   | 0,6   | 0,7   | 0,8   | 0,9   | 1,0   |
|----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $H/d$ (Thétis) | 1,075 | 0,815 | 0,584 | 0,452 | 0,357 | 0,282 | 0,220 | 0,167 | 0,120 | 0,068 |
| $H/d$ (IMFS)   | 1,175 | 0,813 | 0,610 | 0,467 | 0,361 | 0,278 | 0,209 | 0,149 | 0,091 | 0,037 |

Tableau 1 : Valeurs de  $H/d$  en fonction de  $Ri$

Quelques différences sont à noter : le code IMFS propose l'interface sphère/liquide comme condition à la limite. Cela permet ainsi de mieux représenter les transferts de chaleur interfaciaux. De plus, cela explique les écarts de  $H/d$  plus importants à  $Ri=0,9$  et  $Ri=1$  : la recirculation est très proche de la surface de la particule, et dépend du maillage utilisé sur

Thétis. En contrepartie, la méthode employée dans le code Thétis permettra de prendre en compte plus facilement les transferts de chaleur qui interviennent potentiellement dans la particule. L'intérêt d'utiliser deux codes est de pouvoir fournir des résultats complémentaires.

### 3.1. Résultats du code Thétis

Les simulations réalisées ont pour but de déterminer l'influence du nombre de Richardson (qui estime la convection mixte) sur la structure de l'écoulement et sur le nombre de Nusselt dans le cas d'un écoulement assistant.

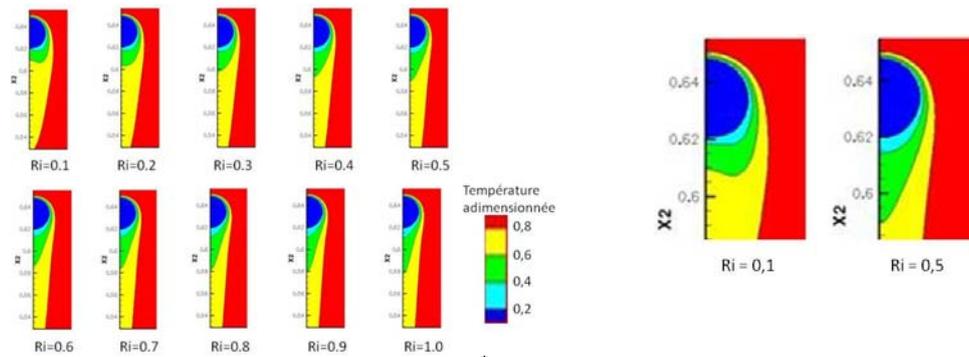


Figure 3 : a) Champ de température  $T^*$  (Thétis) et b) Zoom en aval de la sphère

La figure 3 a) montre que la sphère refroidit le fluide en aval. Selon la température de la particule (et donc selon  $Ri$ ), l'évolution que subit la dynamique du fluide montre deux caractéristiques principales. Tout d'abord, on observe une recirculation qui s'allonge et se rapproche de l'axe vertical lorsque  $Ri$  augmente, ce qui se traduit (figure 4) par une longueur de recirculation  $H$  plus grande. De plus, on observe un changement de comportement pour  $Ri > 0,2$ , correspondant à une modification de la forme des isothermes proches de la particule, comme le montre la figure 3b). Cela montre ainsi que l'on obtient une transition de comportement dès les faibles  $Ri$ . L'étude n'a pas été réalisée pour  $Ri > 1$ , où d'autres transitions de comportement sont à prévoir. Le nombre de Nusselt traduit ce changement, puisqu'à faible  $Ri$ , l'allure que l'on obtient sur la figure 4 n'est plus vérifiée.

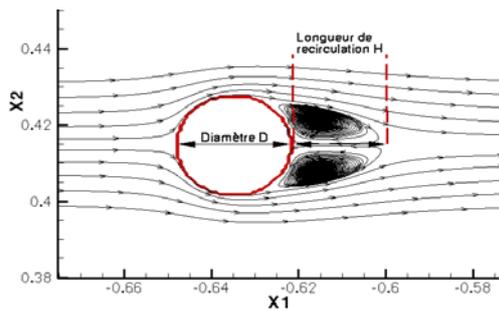


Figure 4 : Schéma de la recirculation en aval

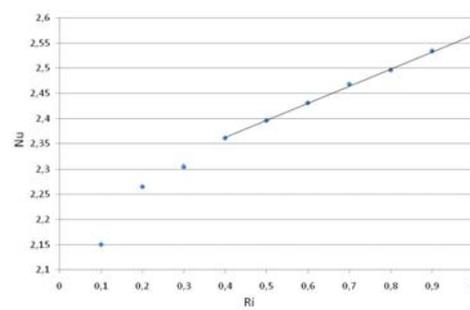


Figure 5 : Variation de  $Nu$  en fonction de  $Ri$

### 3.2. Résultats du code IMFS

Les résultats obtenus représentent le comportement du fluide pour différents nombres de Reynolds et  $Ri = 0,1$ . Pour cela, une représentation de la vorticité est proposée afin de visualiser la dynamique. La figure 6 montre que lorsque le nombre de Reynolds augmente, des instabilités apparaissent, et la périodicité de la figure 6 a) n'apparaît plus en figure 6 b). Il existe donc une valeur critique de  $Re$  expliquant cette transition. Plusieurs cas ont été étudiés, et montrent qu'il existe plusieurs transitions (selon la valeur de  $Re$ ). On passe ainsi d'un écoulement symétrique à un régime oblique (bifurcation régulière), puis à un régime oblique

oscillant lorsqu'on augmente  $Re$ . Il s'agira donc par la suite de déterminer les couples  $(Re, Ri)$  responsables des transitions de comportement du fluide.

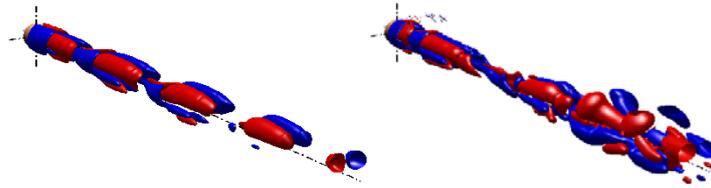


Figure 6 : Isovorticité axiale a)  $Re = 400, Ri=0, 1$  b)  $Re=550, Ri=0, 1$

## 4. Conclusion

La simulation numérique de la convection mixte autour d'une sphère froide a été réalisée dans le cas d'un écoulement assistant à l'aide de deux codes différents. Les résultats ont pu montrer le comportement global de la dynamique et la thermique du fluide. Des transitions de comportement peuvent être observées et corrélées aux nombres de Reynolds et de Richardson. Une comparaison plus poussée des codes est actuellement en cours, la complémentarité des codes permettra alors d'atteindre une large gamme de résultats. En perspective, l'écoulement opposant sera étudié, puis le changement de phase liquide-solide de la particule sera intégré à la simulation numérique.

## Références

- [1] R. Ziethe. Settling of metal droplets in a terrestrial magma ocean: On the correction of the Stokes velocity. *Planetary and Space Science* **57** (2009) 306–317
- [2] J. Happel. *Brenner Low Reynolds number hydrodynamics*. Kluwer Academic Publishers (1983).
- [3] T.A. Johnson, V.C. Patel. Flow past a sphere up to a Reynolds of 300. *J. Fluid Mech.* **378** (1999) 19-70.
- [4] E. Mograbi, E. Bar-Ziv, On the mixed convection hydrodynamic force on a sphere. *Aerosol Science* **36** (2005) 1177-1181.
- [5] H. Gan, J. Chang, J. Feng, H.H. Hu, Direct numerical simulation of the sedimentation of solid particles with thermal convection. *J. Fluid Mech.*, **481** (2003), 385-411.
- [6] A. Maunoury, C. Le Bot, E. Arquis, Numerical analysis of sedimentation of a 2D or 3D cold particle. *Mechanics Research Communications* **37** (2010) 500-503.
- [7] K. Goda., A multistep technique with implicit difference schemes for calculating two or three-dimensional cavity flows. *Journal of Computational Physics*, **30** (1979) 76-95.
- [8] S.V Patankar., *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere Publishing Corporation, New York (USA) (1980).
- [9] H.A. Van Der Vorst, A fast and smoothly converging variant of BiCG for the solution of non-symmetric linear systems SIAM. *J Sci Stat Comput* **44** (1992) 631-644.
- [10] A. Patera, A spectral element method for fluid dynamics: laminar flow in a channel expansion, *Journal of Computational Physics*, **54** (1984), 468-488.
- [11] B. Ghidersa, J. Dušek, Breaking of axisymmetry and onset of unsteadiness in the wake of a sphere, *J. Fluid Mech.*, **423** (2000), 33-69.
- [12] G. Bouchet, M. Mebarek, J. Dušek, Hydrodynamic forces acting on a rigid fixed sphere in early transitional regimes, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **25** (2006) 321-336.
- [13] M. Kotouč, G. Bouchet, J. Dušek, Loss of axisymmetry in flow past a heated sphere - assisting flow, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **51** (2008) 2686-2700.