

Étude du transfert de chaleur convectif dans un milieu poreux : application à des structures végétales modélisées par IFS

Aymeric Lamorlette, Anthony Collin, Rachid Renane et Olivier Séro-Guillaume

Laboratoire d'Énergétique et de Mécanique Théorique et Appliquée LEMTA, CNRS UMR 7563
ENSEM, 2 avenue de la forêt de Haye - 54504 Vandœuvre-lès-Nancy - France
anthony.collin@ensem.inpl-nancy.fr

Résumé - Dans le cadre des feux de végétation, le transfert de chaleur entre une structure végétale et le milieu environnant est très mal connu. Ce transfert de chaleur est à l'origine de transitions verticales d'incendies, d'un mode de feux vers un autre : feu de sol vers feu de broussailles, ou feu de broussailles vers feu de cimes. Cette étude propose une contribution sur le développement analytique du coefficient modélisant ce transfert de chaleur au sein d'une structure végétale modélisée à l'aide d'outils utilisant des fractales (Systèmes de Fonctions Itérées, IFS). Ces résultats sont comparés à ceux obtenus par une simulation numérique afin de juger de la qualité du modèle analytique proposé.

1. Introduction - Rôle de la convection dans la propagation des feux de forêts

Dans un feu de végétation, les transferts de chaleur sont à la fois convectif, conductif et radiatif. Le transfert radiatif est le mode de transfert dominant ; il est de plus le moteur principal de la propagation horizontale de l'incendie. Le transfert convectif reste cependant important à déterminer car il peut être à l'origine de transitions du feu entre les différentes strates végétales constituant un couvert (propagation verticale). Ce transfert est représenté dans les équations de l'énergie du milieu homogène équivalent à la végétation (obtenue par prise de moyenne des équations de l'énergie à l'échelle des branches) par le terme de transfert Q_{sf} entre les phases solide (s) et fluide (f). Ces équations sont [1] :

$$\Phi \rho_f C_{pf} \frac{\partial T_f}{\partial t} + V_f \nabla T_f - \nabla (\lambda_F \nabla T_f + Q_f^r) = Q_{fs} + R_f \quad (1)$$

$$(1 - \Phi) \rho_s C_{ps} \frac{\partial T_s}{\partial t} - \nabla (\lambda_S \nabla T_s + Q_s^r) = Q_{sf} + R_s \quad (2)$$

où T_f et T_s sont respectivement la température du fluide au sein de la couronne et la température du solide (considérée constante), V_f est la vitesse du fluide au sein de la couronne, λ_F et λ_S sont les conductivités thermiques équivalentes des deux phases, Q_f^r et Q_s^r sont les flux radiatifs R_f et R_s sont les chaleurs dégagées par les réactions chimiques, Φ est la porosité du milieu modélisé. Q_{fs} et Q_{sf} représentent les termes d'échanges convectifs. La valeur de Q_{ij} est considérée positive si la phase j cède de la chaleur à la phase i . Toutes les grandeurs sont ici prises à l'échelle de la couronne. Une équation d'équilibre sur la surface d'échange permet d'écrire :

$$Q_{fs} + Q_{sf} = 0 \quad (3)$$

Il est également possible d'identifier Q_{fs} à partir de la méthode de prise de moyenne ayant permis d'obtenir les équations du milieu homogène équivalent [2] :

$$Q_{fs} = - \int_{S_{arbre}} \lambda_f \frac{\partial \tilde{T}_f}{\partial n} dS \quad (4)$$

où λ_f est la conductivité thermique de la phase fluide et \tilde{T}_f la température de la phase fluide à une échelle inférieure, celle des branches. Finalement, la thermodynamique des processus irréversible étendue permet d'écrire :

$$Q_{fs} = \chi (T_s - T_f) \quad (5)$$

La quantification de l'échange convectif est donc représentée par χ , coefficient d'échange global. Ce coefficient a déjà été étudié à l'aide de simulations numériques d'écoulements au sein de structures végétales représentées par des Systèmes de Fonctions Itérées (IFS) [2]. Il est fait appel à la géométrie fractale et plus particulièrement aux Systèmes de Fonctions Itérées (IFS) du fait de leur aptitude à modéliser des végétaux [3]. Seule la partie ligneuse est modélisée car la partie foliaire est rapidement à l'équilibre thermique avec le milieu environnant (éléments thermiquement minces) et ne participe donc pas à l'échange convectif. Cette précédente étude a permis de mettre en avant deux résultats principaux :

- Comme les équations (1) et (2) s'appliquent à des milieux poreux équivalents, l'utilisation du nombre de Nusselt est évitée du fait de l'ordre tensoriel de la conductivité (ordre 2) ; le nombre de Stanton est donc préféré pour représenter le transfert thermique. On pose alors

$$St = \frac{\chi L}{\rho_f C p_f V_{\text{moy}}} \quad (6)$$

avec L , l'épaisseur de la couronne et V_{moy} la vitesse intrinsèque dans la couronne.

- L'ajustement d'une loi de puissance liant uniquement le nombre de Stanton au nombre de Reynolds $Re_L = \frac{V_{\text{moy}} L}{\nu}$ peut être représenté par une loi de la forme :

$$St = A_i Re_L^B \quad (7)$$

avec A_i paramètre dépendant de la structure i , B paramètre universel pour une famille d'arbres. En terme de structures végétales, la famille étudiée dans [2] est représentative des feuillus ; on peut penser que le paramètre B est différent pour des conifères.

L'objectif de cette étude est la modélisation analytique du transfert global dans la structure végétale. L'échange global est calculé comme la somme des transferts élémentaires ayant lieu sur chacune des branches constitutives en les considérant comme des cylindres circulaires de longueur L_i et de diamètre D_i . Les transferts élémentaires sont calculés à partir de corrélations de Chilton-Colburn liant le nombre de Nusselt Nu au nombre de Reynolds Re [4] :

$$Nu_{D_i} = \frac{h_i D_i}{\lambda_f} = C_i Re_{D_i}^m Pr^{1/3} \quad (8)$$

avec Pr nombre de Prandtl du fluide, h_i coefficient d'échange. C et m sont des constantes dont les valeurs dépendent du régime d'écoulement, donc de Re_{D_i} [5]. Cette étude est organisée de la manière suivante : l'outil IFS est tout d'abord présenté avec les structures qui seront utilisées lors de l'étude. Les hypothèses simplificatrices permettant l'obtention d'un modèle analytique représentant les échanges de chaleur sont présentées. Ce modèle est ensuite développé avant de comparer ces résultats à ceux des simulations numériques développées dans de précédents travaux [2]. Finalement, les avantages et limites du modèle analytique sont discutés.

2. Présentation du modèle de végétation

L'outil IFS Comme il a été démontré par Mandelbrot [3], le concept de géométrie fractale s'applique à la modélisation des végétaux. En effet, les systèmes de fonctions itérées (IFS)

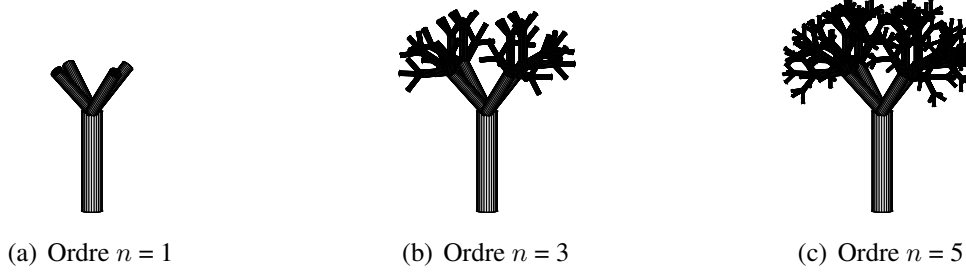


Figure 1 Exemple de construction déterministe à différents ordres ($n=1, 3$ et 5)

Structure	n	(θ, φ)	σ [m^{-1}]	L [m]	Plage Re_L [-]	A_i num	B num	A_i^* analytique	B^* analytique
# 1	4	$(0, \pi/4)$	23,6	0,76	15 000 - 85 000	930	-0,779	879	-0,774
# 2	5	$(0, \pi/5)$	33,3	0,76	15 000 - 80 000	1407	-0,779	1253	-0,774
# 3	5	$(0, \pi/4)$	41,9	0,74	10 000 - 75 000	1324	-0,779	1332	-0,774
# 4	6	$(0, \pi/4)$	44,0	0,85	15 000 - 75 000	2282	-0,779	2159	-0,774

Tableau 1 Caractéristiques des différentes structures utilisées lors de cette étude

peuvent reproduire n'importe quelles structures fractales [6]. Un algorithme IFS déterministe est un ensemble de N_t transformations $\{\omega_1, \dots, \omega_{N_t}\}$. Considérons un ensemble géométrique initial A_0 de \mathbb{R}^3 et la suite :

$$A_{j+1} = \bigcup_{i=1}^{N_t} \omega_i(A_j) \quad (9)$$

la suite converge vers un ensemble fractal. En pratique, les itérations sont arrêtées à un ordre n , ordre de l'IFS. Pour les N_t transformations, on choisit des transformations affines. Sous forme matricielle, leurs parties linéaires sont créées à l'aide d'un produit de contraction de coefficient s et de rotations définies par les angles d'Euler ϕ , θ et φ , comme il a été proposé dans [7]. Pour toutes les structures considérées dans ce travail, les paramètres sont fixés de la manière suivante : $s = 0,6$ et $\theta = 0$. Les transformations ω_i sont créées en posant $\phi_i = (i-1)\frac{\pi}{2}$. En générant la suite (9), des structures ressemblant à des arbres sont obtenues à différents ordres en fixant $N_t = 4$. Un exemple est présenté sur la figure 1 pour différents ordres d'itération. La forme des transformations utilisées permet de lier simplement les grandeurs comme la longueur L_i ou le diamètre D_i des éléments générés à l'ordre i à celles de l'ordre inférieur $i-1$ par l'intermédiaire du coefficient de contraction s . En considérant S_i la surface de tous les éléments générés à l'ordre i , avec S_0 la surface de l'élément initial et S_t la surface totale de la structure, il vient :

$$D_i = D_{i-1}s = D_0s^i, \quad S_0 = \pi D_0 L_0, \quad S_i = (N_t s^2) S_{i-1} = (N_t s^2)^i S_0 \quad \text{et} \quad S_t = \sum_{i=0}^n S_i \quad (10)$$

Présentation des structures utilisées lors de cette étude Quatre structures numériques utilisant des paramètres d'IFS différents sont étudiées (l'ensemble des paramètres est précisé dans le tableau 1). La longueur $L_0 = 1m$ et le diamètre $D_0 = 0,2m$ de l'élément initial sont les mêmes quelle que soit la structure. La surface spécifique σ ainsi que la plage de Reynolds utilisée lors des simulations numériques sont également résumées dans le tableau 1. Ces différents éléments vont permettre la caractérisation de l'écoulement autour des branches constituant la structure.

3. Hypothèses simplificatrices sur les transferts de chaleurs élémentaires

Calcul des plages de Reynolds locaux relatives aux branches générées aux différents ordres

Afin de pouvoir utiliser les corrélations de Chilton-Colburn dans le but de calculer l'échange local sur une branche de la structure, il faut tout d'abord déterminer le régime d'écoulement autour de cette branche et donc calculer le nombre de Reynolds Re_{D_i} relatif au diamètre D_i de la branche en question [5]. Connaissant les plages de Re_L relatives aux différentes structures ainsi que les hauteurs L des couronnes et le diamètre D_0 du tronc, les plages de Re_{D_0} des différentes structures sont calculées. En utilisant les propriétés des IFS, les plages de nombres de Reynolds relatives aux branches de l'ordre d'itération i sont également calculées, en raison de la relation, $Re_{D_i} = Re_{D_0}s^i$. Ces différents nombres de Reynolds peuvent être calculés d'après les données du tableau 1. L'essentiel des nombres de Re_{D_i} estimés pour toutes les structures (dont l'ordre de génération est supérieur ou égal à 3) se situe approximativement dans la plage 40 – 4000 pour laquelle les constantes C et m de la relation (8) gardent les mêmes valeurs [5], 0,683 et 0,466 respectivement. La pertinence de l'utilisation d'un seul jeu de constantes C et m peut être justifiée à la condition que l'essentiel de la surface de l'arbre soit constitué par ces éléments. Pour ce faire, les contributions relatives (équivalentes aux surfaces relatives) des branches des différents ordres vont être calculées.

Calcul des contributions relatives de chaque ordre dans la surface totale de l'arbre

Les contributions dans l'échange de chaleur global sont relatives à la surface d'échange. En calculant la contribution relative des différents ordres, on peut ensuite calculer la surface totale de chaque arbre à l'aide de la relation (10). La contribution relative des éléments d'ordre de génération 3 et supérieur est comprise entre 67% et 86% pour les structures étudiées. Ce résultat permet d'appuyer l'hypothèse précédente selon laquelle l'essentiel de l'échange thermique s'effectue sur des branches dont le nombre de Reynolds se situe dans la plage 40 – 4000.

4. Développement du modèle analytique

Le développement analytique proposé dans cette étude repose sur l'hypothèse selon laquelle le transfert thermique global représente la somme des contributions individuelles des transferts élémentaires de chaque branche constituant la structure. Ces transferts élémentaires sont évalués par la corrélation de Chilton-Colburn pour des cylindres de sections circulaires. On calcule alors χ en pondérant les coefficients locaux h_i par les surfaces S_i de ces éléments,

$$\chi = \frac{1}{V_{\text{env}}} \sum_{i=0}^n h_i S_i \quad (11)$$

V_{env} est le volume de l'enveloppe contenant la couronne [2]. En utilisant la relation (8) pour l'estimation de h_i , il vient alors :

$$\chi = \frac{\lambda_f Pr^{1/3} \pi L_0}{V_{\text{env}}} \sum_{i=0}^n C Re_L^m \frac{D_0^m}{L^m} s^{i(1+m)} N_t^i \quad (12)$$

On obtient finalement de manière adimensionnée :

$$St = Pr^{-2/3} \cdot C \cdot \underbrace{(\sigma D_0^{m-1} L^{2-m})}_{\Pi_\sigma} \cdot \underbrace{\left(\frac{(1 - s^2 N_t)(1 - (s^{1+m} N_t)^{n+1})}{(1 - (s^2 N_t)^{n+1})(1 - (s^{1+m} N_t))} \right)}_{\Pi_{\text{IFS}}} \cdot Re_L^{m-1} \quad (13)$$

où Π_σ et Π_{IFS} sont des groupements sans dimensions formés pour représenter respectivement le rôle de la surface spécifique et des paramètres de l'IFS dans l'échange global. La forme générale

obtenue (Eq 13) est en accord avec la loi de puissance obtenue dans [2]. En effet, on peut assimiler le coefficient A_i de l'équation (7) à $CP_r^{-2/3}\Pi_\sigma\Pi_{\text{IFS}}$ qui dépend bien des paramètres des structures étudiés *via* Π_{IFS} et Π_σ . Le coefficient B est assimilable à l'exposant $m - 1$; il est bien indépendant de la structure considérée. Ce modèle ne permet pas *a priori* de rendre compte de l'interaction entre ces éléments ainsi que de la non orthogonalité de l'écoulement avec ces éléments. Une correction fondée sur les travaux de Kalish [8] permet d'intégrer les effets de la non-orthogonalité. Pour ce faire, on suppose que les branches sont orientées aléatoirement et distribuées de manière homogène par rapport à l'écoulement. La prise en compte de la correction proposée par Kalish [8] permet alors d'écrire :

$$St = \overline{f_\gamma} \cdot Pr^{-2/3} \cdot C \cdot \Pi_\sigma \cdot \Pi_{\text{IFS}} \cdot Re_L^{m-1} \quad (14)$$

$\overline{f_\gamma}$ représente la valeur moyenne du facteur correcteur [8] :

$$\overline{f_\gamma} = \frac{1}{2} \int_0^\pi f(\gamma) \sin(\gamma) d\gamma = \int_0^{\pi/2} 0.84 \sqrt{\frac{\sin(\gamma) + \sin^2(\gamma)}{1 + \sin^2(\gamma)}} \sin(\gamma) d\gamma = 0.7597 \quad (15)$$

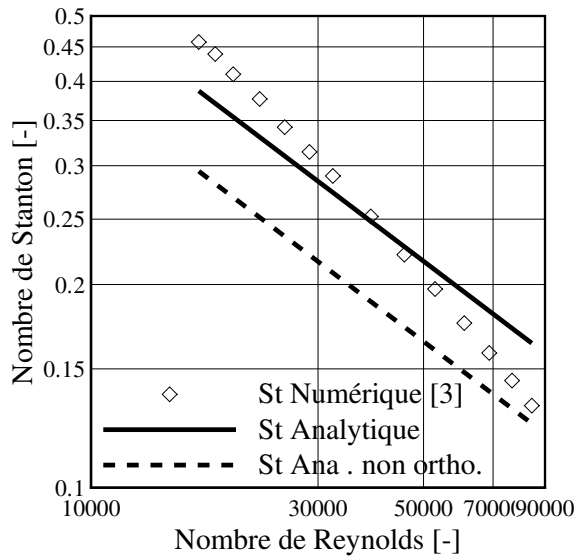
Le modèle initial (Eq. (13)) qui ne prenait pas en compte la non-orthogonalité de l'écoulement surestime alors l'échange de chaleur.

5. Résultats, discussions

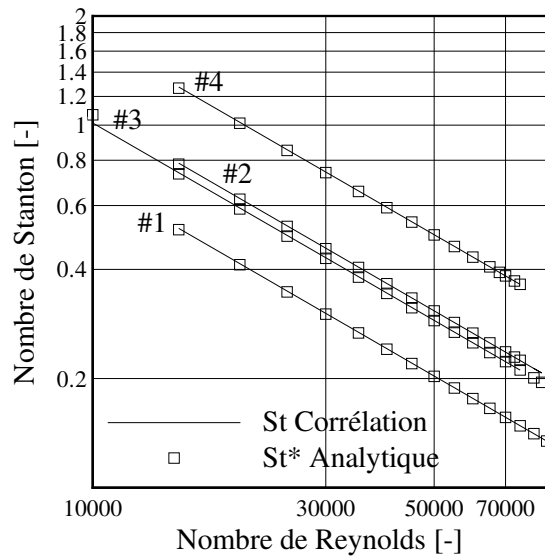
Pour chaque configuration simulée, le nombre de Stanton est déterminé à partir des équations (4), (5) et (6). Les résultats des modèles des équations (13) et (14) sont représentés par le nombre de Stanton en fonction du nombre de Reynolds sur la figure 2(a) avec les résultats numériques de la structure # 1. Il apparaît sur ce graphique que le modèle analytique ne permet pas d'estimer avec précision le transfert convectif global estimé par simulations numériques. En effet, l'erreur maximale observée entre le modèle de l'équation (13) et les résultats numériques est de 24%. De plus, les résultats numériques sont beaucoup plus proches du modèle de l'équation (13) que du modèle de l'équation (14). Ce résultat peut s'expliquer par un effet d'interaction entre les branches (que le modèle ne prend pas en compte) qui améliorerait l'échange thermique. La non-prise en compte de l'interaction des branches est une hypothèse trop forte pour que le modèle analytique soit précis. Cependant la forme de la relation obtenue qui ne dépend que du nombre de Reynolds est consistante avec celle obtenue numériquement. On peut alors penser que l'effet de l'interaction dans le modèle analytique peut être pris en compte uniquement en ré-ajustant les constantes C et m ce que l'on tente d'effectuer à l'aide d'un algorithme génétique identique à celui développé par Duan *et al.* [9]. Il vient un ajustement d'une précision de l'ordre de quelques pourcents avec des valeurs du paramètre m très proches les unes des autres permettant encore de supposer que m possède un caractère universel. Un nouvel ajustement est donc effectué pour $C_{\#i}$ et m permettant de recalculer les coefficients A_i^* analytiques (corrigés) et B^* analytique (corrigé). Les valeurs de ces coefficients sont consignées dans le tableau 1 avec les valeurs obtenues lors de l'ajustement de la corrélation à partir des simulations numériques. Une précision égale à celle obtenue par la corrélation numérique est obtenue. La figure 2(b) représente les résultats de toutes les structures étudiées en comparant la simulation numérique et le modèle analytique corrigé, tous deux en très bon accord. Ce modèle ne possède de plus que deux paramètres dont l'un semble présenter un caractère universel.

6. Conclusion

Un modèle analytique simple a été développé pour rendre compte de l'échange convectif global d'une structure végétale avec son milieu environnant. Celui-ci est fondé sur les hypothèses



(a) Structure # 1 (modèle non corrigé)



(b) Toutes les structures (modèle corrigé)

Figure 2 Nombre de Stanton en fonction du nombre de Reynolds

suivantes : les branches de la $i^{\text{ème}}$ génération peuvent être considérées comme des cylindres circulaires de dimensions D_i et L_i ; les échanges sur chaque branches sont proportionnels à la surface de ces branches ; la relation de Chilton-Colburn permet de calculer les échanges élémentaires sur les branches. Ce modèle permet sans hypothèses supplémentaires de justifier la forme de la corrélation (7) développée dans [2]. Il permet également de préciser la dépendance du coefficient A_i vis-à-vis des paramètres de la structure végétale. Cependant, ce modèle ne permet pas d'estimer avec précision le transfert global du fait de la non prise en compte des effets d'interaction entre les cylindres. En admettant que l'ajustement des constantes $C_{\#i}$ et m permette de prendre en compte cette interaction, le modèle analytique peut alors estimer correctement le transfert global. Finalement, il apparaît que le transfert convectif global au sein d'une structure végétale peut être modélisé de manière simple par une relation à deux paramètres liant le nombre de Stanton au nombre de Reynolds. Cette contribution a permis d'étendre les résultats de [2] en exprimant les coefficients A et B de la relation (7) à partir des propriétés physiques des arbres considérés.

Références

- [1] O. Séro-Guillaume and J. Margerit. Modelling forest fires. Part I : A complete set of equations derived by extended irreversible thermodynamics *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 45-8, pp. 1705-1722, 2002.
- [2] A. Lamorlette, A. Collin and O. Séro-Guillaume. Characterization of heat transfer between phases inside a porous media : Application to vegetal set representations *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 2010, soumis.
- [3] B.B. Mandelbrot. *The fractal geometry of nature*, 1982.
- [4] F.P. Incropera and D.P. Dewitt. Introduction to heat transfer, third Ed. Wiley, NY, 1996.
- [5] J.D. Knudsen and D.L. Katz. Fluid Dynamics and Heat transfer *Mc Graw and Hill*, NY, 1958.
- [6] M.F. Barnsley. *Fractals everywhere, second edition*. Academic press, 1993.
- [7] D. Calogine, N. Rimbart and O. Séro-Guillaume. Modelling of the deposition of retardant in a tree crown during fire fighting *Environmental modelling*, Vol. 22, pp. 1654-1666, 2007.
- [8] S. Kalish and O.E. Dwyer. Heat transfer to NaK flowing through un baffled rod bundles *Int. J. Heat and Mass Transfer*, Vol. 10, pp. 1533-1558, 1967.
- [9] Q.Y. Duan, V.K. Gupta and S. Sorooshian. Shuffled complex evolution approach for effective and efficient global minimization *J. Optimiz. Theory App.*, Vol. 76, pp. 501-521, 1993.